МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

О НЕТЕРОВОСТИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С СИМВОЛАМИ КЛАССА $S^m_{\rho,\delta}$ $(0 \leqslant \delta = \rho < 1)$

В. С. Рабинович

Настоящая заметка посвящена необходимым и достаточным условиям нетеровости и вопросу гладкости и роста решений псевдодифференциальных уравнений на $\mathbf{R}^n$ с символами класса Л. Хермандера $S^m_{\rho,\sigma}$ [1] в предельном случае $\rho = \delta$ $(0 \leqslant \delta < 1)$.

Достаточность аналогичных условий для операторов с символами класса $S^m_{1,0}$ впервые установлена В. В. Грушиным [2]. Перенос этих результатов на классы $S^m_{\rho,\delta}$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, не вызывает трудностей.

В случае же $\rho = \delta$ традиционная техника оценок остаточных членов не годится, поэтому мы применяем технику, аналогичную развитой в работе [3] (см. также [4]) при оценках нормы псевдодифференциальных операторов (п.д.о.) в L_2 в предельном случае $\rho = \delta$.

В работе рассматриваются более общие, чем $S^m_{\rho,\delta}$, классы символов, допускающих рост также и по переменной x.

Отметим еще работы [5]—[7], где рассматривались близкие вопросы для других классов п.д.о.

§ 1. Обозначения и формулировка основного результата. 1. Через R^n_x мы обозначаем n-мерное вещественное пространство, точки которого обозначаются через $x = (x_1, \ldots, x_n)$, через $\mathbf{R}^n_\xi$ — двойственное к R^n_x пространство относительно линейной формы $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс; тогда $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ — его длина:

$$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial x_{x_n}^{\alpha_n},$$

$$\partial x_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_{x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}, \ \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Определение 1.1. Будем говорить, что C^∞ — функция $a(x, \xi)$, определенная на $R^{2n}_{(x,\xi)} = R^n_x \times R^n_\xi$, принадлежит классу $S_\delta^{m,l}$, $0 \leqslant \delta < 1$, $m \in R$, $l \in R$, если для любых мультииндексов α, β существуют такие константы $C_{\alpha\beta}$ $(C_{\alpha\beta} > 0)$, что

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} \langle x \rangle^l \langle \xi \rangle^{m - \delta(|\alpha| - |\beta|)}.$$

Отметим, что при $l = 0$ получается класс символов $S^m_{\delta,\delta}$ из [1].

Положим

$$\mu^a_{\alpha,\beta}(x, \xi) = \langle x \rangle^{-l} \langle \xi \rangle^{-(m - \delta(|\alpha| - |\beta|))} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)|;$$

$$\nu^a_{k_1,k_2}(x, \xi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k_1 \\ |\beta| \leqslant k_2}} \mu^a_{\alpha,\beta}(x, \xi).$$

В пространстве $S_\delta^{m,l}$ введем топологию системой полунорм

$$a|_{k_1,k_2} = \sup_{x,\xi} \nu^a_{k_1,k_2}(x, \xi).$$

Определение 1.2. Через $\tilde{S}_\delta^{m,l}$ обозначим подмножество в $S_\delta^{m,l}$, состоящее из таких функций, что

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \mu_{\alpha,\beta}(x, \xi) = 0, \quad \forall \beta \neq 0, \quad \forall \alpha$ равномерно по $\xi \in R^n_\xi$,

2) $\lim\limits_{\xi \to \infty} \mu_{\alpha,\beta}(x, \xi) = 0, \quad \forall \alpha \neq 0, \quad \forall \beta$ равномерно по $x \in R^n_x$.

Определение 1.3. Через $\overset{0}{S}{}_\delta^{m,l}$ обозначим подмножество $S_\delta^{m,l}$, состоящее из таких функций, что

$$\lim_{|x|+|\xi| \to \infty} \mu_{\alpha,\beta}(x, \xi) = 0, \text{ для любых } \alpha \text{ и } \beta.$$

Если $a(x, \xi) \in S_\delta^{m,l}$, то через $a(x, D)$ обозначим п.д.о.:

$$a(x, D) u = (2\pi)^{-n} \int a(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi,$$

$$u \in C_0^\infty(R^n),$$

$$\hat{u}(\xi) = \int u(x) e^{-i\langle x, \xi\rangle} dx.$$

Класс всех п.д.о. с символами из $S_\delta^{m,l}$ обозначим $LS_\delta^{m,l}$

Аналогичный смысл имеют обозначения $L\tilde{S}_\delta^{m,l}$, $L\overset{0}{S}{}_\delta^{m,l}$.

Определение 1.4. Через H_r^s обозначим пространство Соболева с весом, т. е. множество таких распределений, что

$$\| u \|_{s,r} = \| \langle x\rangle^r \langle D\rangle^s u \|_{L_2} < \infty.$$

Предложение 1.1. *Пусть* $a(x, D) \in LS_\delta^{m,l}$, $0 \leqslant \delta < 1$; *тогда* $a(x, D)$ *ограничен из* H_r^s *в* H_{r-l}^{s-m}. *Существует такая константа* C, *не зависящая от* $a(x, \xi)$, *такие целые числа* k_1 *и* k_2, *что*

$$\| a(x, D) u \|_{s-m,\, r-l} \leqslant C \,| a |_{k_1,\, k_2} \| u \|_{s,\, r}.$$

Замечание. По поводу ограниченности п.д.о. класса $S_\delta^{m,0} \equiv S_{\delta,\delta}^m$ из H^s в H^{s-m} смотри [4—8]. При $l \neq 0$ ограниченность в классах $LS_\delta^{m,l}$ вытекает из формул композиции, доказанных в § 2, и результатов работы [3].

2. Основные результаты настоящей работы сформулированы в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть* $a(x, D) \in L\tilde{S}_\delta^{m,l}$; *тогда для того, чтобы* $a(x, D)$ *был оператором Нетера из* H_r^s *в* H_{r-l}^{s-m}, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{R\to\infty} \inf_{|x|+|\xi|>R} | a(x, \xi) | \langle x\rangle^{-l} \langle \xi\rangle^{-m} > 0. \tag{1.2}$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Если выполнено условие* (1.2), *то*

$$\{u \in S'(R^n),\ a(x, D) u \in S(R^n) \Rightarrow u \in S(R^n)\}. \tag{1.3}$$

§ 2. Доказательство формул композиции п.д.о из $\widetilde{S}_\delta^{m,l}$, $0 \leqslant \delta < 1$.

1. Предложение 2.1. *Пусть* $a(x, \xi) \in S_\delta^{m_1,l_1}$, $b(x, \xi) \in S_\delta^{m_2,l_2}$; *тогда*

1) $r_\theta(x, \xi) =$

$$= \iint a(x, \xi + \theta\eta)\, b(x + y, \xi)\, e^{-i\langle y,\eta\rangle}\, dy\, d\eta \in S_\delta^{m_1+m_2,\, l_1+l_2} \tag{2.1}$$

равномерно по $\theta \in [0, 1]$.

2) *Пусть* $\overset{a}{\mu}_{\alpha,\beta}(x, \xi) \to 0$ *при* $\xi \to \infty$ *для любых* α, β *равномерно по* x, $\overset{b}{\mu}_{\alpha,\beta}(x, \xi) \to 0$ *при* $x \to \infty$ *для любых* α, β *равномерно по* ξ; *тогда*

$$\lim_{|x|+|\xi|\to\infty} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha r_\theta(x, \xi)|\, \langle x\rangle^{-(l_1+l_2)}\, \langle \xi\rangle^{-(m_1+m_2-\delta(|\alpha|-|\beta|))} = 0$$

равномерно по $\theta \in [0, 1]$.

Замечание. Интеграл в (2.1) понимается как осциллирующий (см., например, [4] — [5]).

Доказательство. Мы используем следующие тождества:

$$e^{-i\langle y,\eta\rangle} =$$
$$= (1 + \langle \xi + \theta\eta\rangle^{2k_1\delta} |y|^{2k_1})^{-1} (1 + \langle \xi + \theta\eta\rangle^{2k_1\delta}(-\Delta_\eta)^{2k_1}) e^{-i\langle y,\eta\rangle}; \tag{2.2}$$

$$e^{-i\langle y,\eta\rangle} = \langle \eta\rangle^{-2k_2} \langle D_y\rangle^{2k_2} e^{-i\langle y,\eta\rangle}, \tag{2.3}$$

(k_1, k_2 — натуральные числа), из которых следует, что интеграл (2.1) можно записать в виде

$$r_\theta(x, \xi) = \iint \langle D_y\rangle^{2k_2} \{\langle\eta\rangle^{-2k_2} (1 + \langle \xi + \theta\eta\rangle^{2k_1\delta} (-\Delta_\eta)^{2k_1}) \cdot$$
$$\cdot (1 + \langle \xi + \theta\eta\rangle^{2k_1\delta} |y|^{2k_1}))^{-1} a(x, \xi + \theta\eta) \cdot$$
$$\cdot b(x + y, \xi)\}\, e^{-i\langle y,\eta\rangle}\, dy\, d\eta.$$

Дифференцируя под знаком интеграла и используя оценки (1.1), получаем

$$|r_\theta(x, \xi)| \leqslant C \iint \overset{b}{\nu}_{0,\,2k_2}(x + y, \xi)\, \overset{a}{\nu}_{2k_1,\,0}(x, \xi + \theta\eta)\, \langle\eta\rangle^{-2k_2} \cdot$$
$$\cdot (1 + \langle \xi + \theta\eta\rangle^{2k_1\delta} |y|^{2k_1})^{-1} \langle x\rangle^{l_1} \langle \xi + \theta\eta\rangle^{m_1} \cdot$$
$$\cdot \langle x + y\rangle^{l_2} \langle \xi\rangle^{m_2+2k_2\delta}\, dy\, d\eta.$$

Используя неравенство $\langle x+y\rangle^l \leqslant C_l \langle x\rangle^l \langle y\rangle^{|l|}$, нахсдим, что

$$|r_\theta(x,\xi)| \leqslant C\langle x\rangle^{l_1+l_2}\langle\xi\rangle^{m_2+2k_2\delta}\iint \nu^b_{0,\,2k_2}(x+y,\xi)\cdot$$
$$\cdot\nu^a_{2k_1,\,0}(x,\xi+\theta\eta)\langle\eta\rangle^{-2k_2}(1+\langle\xi+\theta\eta\rangle^{2k_1\delta}|y|^{2k_1})^{-1}\cdot$$
$$\cdot\langle\xi+\theta\eta\rangle^{m_1}\langle y\rangle^{|l_2|}\,dy\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant C\langle x\rangle^{l_1+l_2}\langle\xi\rangle^{m_2+2k_2\delta}\sup_y(\nu^b_{0,\,2k_2}(x+y,\xi)/\langle y\rangle)\cdot$$
$$\cdot\int\nu^a_{2k_1,\,0}(x,\xi+\theta\eta)\langle\xi+\theta\eta\rangle^{m_1}\langle\eta\rangle^{-2k_2}\,d\eta\cdot$$
$$\cdot\int(1+\langle\xi+\theta\eta\rangle^{2k_1\delta}\langle y\rangle^{2k_1})^{-1}\langle y\rangle^{|l_2|+1}\,dy.$$

Если во внутреннем интеграле сделать замену $z=\langle\xi+\theta\eta\rangle^\delta y$ и выбрать $2k_1>n+1$, то мы получим оценку

$$|r_\theta(x,\xi)|\leqslant$$
$$\leqslant C\langle x\rangle^{l_1+l_2}\langle\xi\rangle^{m_2+2k_2\delta}\sup_y(\nu_{0,\,2k_2}(x+y,\xi)/\langle y\rangle)\cdot$$
$$\cdot\int\nu^a_{2k_1,\,0}(x,\xi+\theta\eta)\langle\xi+\theta\eta\rangle^{m_1-n\delta}\langle\eta\rangle^{-2k_2}\,d\eta. \qquad (2.4)$$

Область интегрирования в интеграле (2.4) разобьем на три части:

$$\begin{aligned}\Omega^1_{\xi,\,\theta}&=\{\eta\colon\ 0\leqslant|\eta|\leqslant(1/2)|\xi+\theta\eta|^\delta\};\\ \Omega^2_{\xi,\,\theta}&=\{\eta\colon\ (1/2)|\xi+\theta\eta|^\delta\leqslant|\eta|\leqslant(1/2)|\xi+\theta\eta|\};\\ \Omega^3_{\xi,\,\theta}&=\{\eta\colon\ |\eta|\geqslant(1/2)|\xi+\theta\eta|\}.\end{aligned}\qquad (2.5)$$

Из неравенств (2.3) следует, что в $\Omega^1_{\xi,\theta}\cup\Omega^2_{\xi,\theta}$ выполнено неравенство $(2/3)|\xi|\leqslant|\xi+\theta\eta|\leqslant 2|\xi|$, а в области $\Omega^3_{\xi,\theta}$ — $|\eta|\geqslant|\xi|/3$. Используя эти неравенства, оценим интеграл в (2.4) по каждой из этих областей:

$$\int_{\Omega_{\xi,\,\theta}}\nu^a_{2k_1,\,0}(x,\xi+\theta\eta)\langle\xi+\theta\eta\rangle^{m_1-n\delta}\langle\eta\rangle^{-2k_2}\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant C\sup_{\Omega^1_{\xi,\,\theta}}\nu_{2k_1,\,0}(x,\xi+\theta\eta)\langle\xi\rangle^{m_1}, \qquad (2.6)$$

$$\int_{\Omega^2_{\xi,\,\theta}}\nu^a_{2k_1,\,0}(x,\xi+\theta\eta)\langle\xi+\theta\eta\rangle^{m_1-n\delta}\langle\eta\rangle^{-2k_2}\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\Omega^2_{\xi,\,\theta}}\nu_{2k_1,\,0}(x,\xi+\theta\eta)\langle\xi\rangle^{m_1-2k_2\delta}. \qquad (2.7)$$

В оценке (2.7) $2k_2 > n$, а в (2.6) $k_1 = 0$. Далее имеем

$$\int_{\Omega^3_{\xi,\theta}} \nu^a_{2k_1,0}(x, \xi+\theta\eta) \langle \xi+\theta\eta\rangle^{m_1-n\delta} \langle\eta\rangle^{-2k_2} d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{\Omega^3_{\xi,\theta}} (\nu^a_{2k_1,0}(x, \xi+\theta\eta)/\langle\eta\rangle) \langle\xi\rangle^{m_1-n\delta-2k_2+n+2}. \tag{2.8}$$

Выберем теперь k_2 так, чтобы

$$2k_2 > \max\{n + 2/(1-\delta),\ m_1 + n(1-\delta) + 2\};$$

тогда из оценок (2.6) — (2.8) получаем

$$|r_\theta(x, \xi)| \leqslant C |a|_{2k_1, 0} |b|_{0, 2k_2} \langle x\rangle^{l_1+l_2} \langle\xi\rangle^{m_1+m_2}.$$

Если же выполнены условия второй части предложения, то

$$\lim_{|x|+|\xi|\to\infty} |r_\theta(x, \xi)| \langle x\rangle^{-(l_1+l_2)} \langle\xi\rangle^{-(m_1+m_2)} = 0$$

равномерно по θ.

Оценки производных функций $r_\theta(x, \xi)$ проводятся точно так же.

Следствие 2.1. 1) *Пусть* $a(x, \xi) \in S^{m_1,l_1}_\delta$, $b(x, \xi) \in S^{m_2,l_2}_\delta$; *тогда символ* $a(x, \xi) \circ b(x, \xi)$ *произведения* $a(x, D) \times b(x, D)$ *принадлежит* $S^{m_1+m_2,l_1+l_2}_\delta$.

2) *Если* $a(x, \xi) \in \mathring{S}^{m_1, l_1}_\delta$, $b(x, \xi) \in \mathring{S}^{m_2, l_2}_\delta$, *то*

$$a(x, \xi) \cdot b(x, \xi) = a(x, \xi)\, b(x, \xi) + q(x, \xi),$$

где $q(x, \xi) \in \mathring{S}^{m_1+m_2, l_1+l_2}_\delta$.

Замечание. Первая часть следствия 2.1 при $l_1 = l_2 = 0$ установлена в работе [4].

Доказательство следствия 2.1. Мы имеем [6]

$$a(x, \xi) \circ b(x, \xi) =$$

$$= a(x, \xi)\, b(x, \xi) + (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^n \int_0^1 d\theta \cdot$$

$$\cdot \iint \partial_{\eta_j} a(x, \xi+\theta\eta)\, D_{x_j} b(x+y, \xi)\, e^{-i\langle y, \eta\rangle} dy\, d\eta. \tag{2.9}$$

Применяя к (2.9) первую и вторую части предложения 2.1, получаем соответствующие части следствия 2.1.

Предложение 2.2 (см. [2]). *Пусть* $a(x, \xi) \in \mathring{S}^{m,l}_\delta$; *тогда* $a(x, D)$ *вполне непрерывен из* H^s_r *в* H^{s-m}_{r-l}.

Это предложение следует из предложения 1.1. Доказательство аналогично [2].

2. Докажем достаточность условия (1.2) теоремы 1.1 о нетеровости п.д.о. $a(x, D) \in LS_{\delta}^{m,l}$.

Из условия (1.2) следует, что существует такое число $R > 0$, что $|a(x, \xi)| \geqslant C\langle x\rangle^l \langle\xi\rangle^m$ при $|x|^2 + |\xi|^2 \geqslant R^2$. Пусть

$$\varphi(x, \xi) = \begin{cases} 1, & |x|^2 + |\xi|^2 > 2R^2, \\ 0, & |x|^2 + |\xi|^2 < R^2, \end{cases}$$

и $\varphi(x, \xi)$ принадлежит C^∞.

Символ $b(x, \xi) = a^{-1}(x, \xi)\varphi(x, \xi) \in \mathring{S}_{\delta}^{-m,-l}$. Из следствия 2.1 находим, что

$$\begin{aligned} b(x, D)\,a(x, D) &= I + r_1(x, D), \\ a(x, D)\,b(x, D) &= I + r_2(x, D), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $r_j(x, D) \in L\mathring{S}_{\delta}^{0,0}$ $(j = 1, 2)$ и, следовательно, вполне непрерывны в пространствах H_r^s для любых s и r.

3. В этом пункте мы докажем теорему 1.2 о гладкости решений уравнения $a(x, D)u = f$, $a(x, \xi) \in \mathring{S}_{\delta}^{m,l}$.

Отметим, что стандартные рассуждения, связанные с априорной оценкой в этой ситуации не подходят, так как $r_1(x, D)$ улучшает свойства H_r^s не контролируемо.

Нам понадобится

Предложение 2.3. *Формально сопряженный к $a(x, D) \in L\mathring{S}_{\delta}^{m,l}$ оператор $A^* \in L\mathring{S}_{\delta}^{m,l}$. Его символ $a^*(x, \xi) = \overline{a(x, \xi)} + q(x, \xi)$, где $q(x, \xi) \in \dot{S}_{\delta}^{m,l}$.*

Доказательство вполне аналогично доказательству предложения 2.1 и его следствия.

Докажем теперь теорему 1.2. Отметим, что $S(R^n) = \bigcap_{s,r} H_r^s$ и $S'(R^n) = \bigcup_{s,r} H_r^s$, где в пресечении берется топология проективного предела, в объединении топология индуктивного предела, а в $S(R^n)$, $S'(R^n)$ — стандартные топологии. Ясно, что $\operatorname{Ker} a(x, D) \subset \operatorname{Ker}(I + r_1(x, D))$, но множество $\operatorname{Ker}(I + r_1(x, D))$ одно и то же во всех пространствах H_r^s, что следует из [9, стр. 313]. Таким образом, $\operatorname{Ker} a(x, D) \subset \bigcap_{s,r} H_r^s = S(R^n)$.

Аналогично доказывается, что ядро оператора A^*, сопряженного к $a(x, D)\colon H_r^s \to H_{r-l}^{s-m}$, также принадлежит $S(R^n)$. Отсюда немедленно следует включение (1.3).

§ 3. Необходимость условий теоремы 1.1. Доказательство необходимости легко сводится к случаю $H_0^0 = L_2$ и операторам класса $L\tilde{S}_\delta^{0,0} = L\tilde{S}_\delta$. Условие (1.1) в этом случае принимает вид

$$\lim_{R\to\infty} \inf_{|x|+|\xi|>R} |a(x, \xi)| = d > 0. \tag{3.1}$$

Пусть последовательность (x_ν, ξ_ν), $(x_\nu, \xi_\nu) \in R^{2n}_{(x,\xi)}$, сходится к бесконечности и

$$d = \lim_{\nu\to\infty} |a(x_\nu, \xi_\nu)|. \tag{3.2}$$

Следует отдельно рассмотреть три случая:

1) $x_\nu \to \infty, \quad \xi_\nu \to \xi_0$;

2) $x_\nu \to x_0, \quad \xi_\nu \to \infty$;

3) $x_\nu \to \infty, \quad \xi_\nu \to \infty$.

Нетрудно показать, используя, что $a(x, \xi) \in \tilde{S}_\delta$, и если $u(x) \in S(R^n)$, то

1) $a(x + x_\nu, \xi_0)\, u(x) = a(x_\nu, \xi_0)\, u(x) + b_\nu(x, \xi_0)\, u$, где $\| b_\nu(x, \xi_0)\, u \|_{L_2} \to 0$ при $\nu \to \infty$;

2) $a(x_0, D + \xi_\nu)\, u(x) = a(x_0, \xi_\nu)\, u(x) + {}$

$$+ b_\nu(x_0, D) u(x),$$

где $\| b_\nu(x_0, D)\, u \|_{L_2} \to 0$ при $\nu \to \infty$;

3) $a(x + x_\nu, D + \xi_\nu)\, u(x) = a(x_\nu, \xi_\nu)\, u(x) + {}$

$$+ b_\nu(x, D)\, u(x),$$

где $\| b_\nu(x, D)\, u \|_{L^2} \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Рассмотрим сначала случай 1). Пусть $a(x, D)$ — нетеров оператор; тогда существует такой вполне непрерывный оператор T, что

$$\| (a(x, D) - T)\, u \|_{L_2} \geqslant C \| u \|_{L_2} \quad (C > 0). \tag{3.3}$$

Зададимся достаточно малым $\varepsilon > 0$ и выберем ν^1 так, чтобы

$$|a(x_\nu, \xi_0)| - d < \varepsilon \text{ при } \nu > \nu^1. \tag{3.4}$$

Пусть $u(x) \in S(R^n)$, $\| u(x) \|_{L_2} = 1$ и $\sup \hat{u}(\xi)$ лежит в достаточно малой окрестности точки ξ_0. Эту окрестность выберем так, чтобы

$$\| (a(x, D) - a(x, \xi_0))\, u \|_{L_2} < \varepsilon.$$

Так как $u\,(\widehat{x - x_\nu}) = e^{i\langle x,\, \xi_\nu\rangle}\, \hat{u}\,(\xi)$, то

$$\|\,(a\,(x, D) - a\,(x, \xi_0))\, u\,(x - x_\nu)\,\|_{L_2} < \varepsilon. \qquad (3.5)$$

Если T вполне непрерывный оператор, то ввиду того, что $u\,(x - x_\nu)$ при $\nu \to \infty$ слабо сходится к нулю, можно найти такое $\nu^2 > \nu^1$, что

$$\|\, Tu\,(x - x_\nu)\,\|_{L_2} < \varepsilon, \quad \nu > \nu^2. \qquad (3.6)$$

Выберем $\nu^3 > \nu^2$ так, чтобы

$$\|\, b_\nu\,(x, D)\, u\,\|_{L_2} < \varepsilon, \quad \nu > \nu^3. \qquad (3.7)$$

Используя (3.3) — (3.7), получаем при $\nu > \nu^3$

$$\begin{aligned} d > |\, a\,(x_\nu, \xi_0)\,| - \varepsilon = \|\, a\,(x_\nu, \xi_0)\, u\,\|_{L_2} - \varepsilon \geqslant \\ \geqslant \|\, a\,(x + x_\nu, \xi_0)\, u\,(x)\,\|_{L_2} - 2\varepsilon = \\ = \|\, a\,(x, \xi_0)\, u\,(x - x_\nu)\,\|_{L_2} - 2\varepsilon \geqslant \\ \geqslant \|\, a\,(x, D)\, u\,(x - x_\nu)\,\|_{L_2} - 3\varepsilon \geqslant \\ \geqslant \|\,(a\,(x, D) - T)\, u\,(x - x_\nu)\,\|_{L_2} - 4\varepsilon \geqslant \\ \geqslant (C - 4\varepsilon)\, \|\, u\,(x - x_\nu)\,\|_{L_2} = C - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ как угодно мало́, получаем, что $d \geqslant C > 0$.

Рассмотрение случаев 2) и 3) проводится аналогично. В случае 2) в качестве слабо сходящейся к нулю последовательности выбирается последовательность $e^{i\langle x,\, \xi_\nu\rangle}\, u\,(x)$, где $\operatorname{sup} u\,(x)$ лежит в малой окрестности точки x_0. В случае 3) мы рассматриваем последовательность $e^{i\langle x,\, \xi_\nu\rangle}\, u\,(x - x_\nu)$, $\xi_\nu \to \infty$, $x_\nu \to \infty$.

В заключение этого параграфа мы отметим следующий результат в пространстве L_2.

Предложение 3.1. *Пусть* $a\,(x, \xi) \in \tilde{S}_\delta$, $\delta < 1$; *тогда*

$$\begin{aligned} |||\, a\,(x, D)\,|||_{L_2} = \inf_T \|\, a\,(x, D) - T\,\|_{L_2} = \\ = \lim_{R \to \infty} \sup_{|x| + |\xi| > R} |\, a\,(x, \xi)\,| \end{aligned} \qquad (3.8)$$

(inf берется по всем вполне непрерывным операторам, действующим в L_2).

Доказательство. Оценка снизу

$$|||\, a\,(x, D)\,||| \geqslant \lim_{R \to \infty} \sup_{|x| + |\xi| > R} |\, a\,(x, \xi)\,|$$

получается теми же рассуждениями, что в доказательстве необходимости теоремы 1.1. Отметим, что для операторов $\tilde{S}_{1,0}$ она ранее получена В. В. Грушиным [2]. Оценка сверху легко получается (см. [10, стр. 39]) из оценки

$$\| a(X, D) u \| \leqslant (K + \varepsilon) \| u \| + C \| Tu \|,$$

где $K = \lim\limits_{R \to \infty} \sup\limits_{|x| + |\xi| > R} |a(x, \xi)|$, $\varepsilon > 0$ мало́, константа $C > 0$ зависит от ε, T — вполне непрерывный оператор.

Замечание 1. Построенная в настоящей заметке теория нетеровости п.д.о. дословно переносится на символы, удовлетворяющие следующим оценкам:

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(x, \xi) \langle x \rangle^{l - \delta(|\beta| - |\alpha|)} \langle \xi \rangle^m, \qquad 0 \leqslant \delta < 1,$$

где

$$\lim_{x \to \infty} C_{\alpha\beta}(x, \xi) = 0, \qquad \beta \neq 0$$

для любого α равномерно по x и

$$\lim_{x \to \infty} C_{\alpha\beta}(x, \xi) = 0, \qquad \alpha \neq 0$$

для любого β равномерно по ξ.

Замечание 2. Класс операторов $S_\delta^{m, r}$ при $\delta = 0$ естественно возникает при изучении дифференциально-разностных операторов с частными производными.

Замечание 3. Класс $\bigcup_{m, r} S_\delta^{m, r}$ инвариантен относительно перехода к двойственным операторам относительно преобразования Фурье F, т. е. относительно отображения $A \to F^{-1} A F$, что весьма важно в асимптотических методах (см. [11]).

Ростовский государственный университет

Поступило 10.V.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Хермандер Л., Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения, Сб., Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1967.

[2] Грушин В. В., Псевдодифференциальные операторы в $\mathbf{R}^n$ с ограниченными символами, Функц. анализ и его прилож., 4, № 3 (1970), 37—50.

[3] Calderon A. P., Vaillanconrt R., A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 69 (1972), 1185—1187.

[4] K u m a n o-g o H., Pseudo-differential operators of multiple symbol and the Calderon — Vaillancourt theorem, J. Math. Soc. Japan, **27**, № 1 (1975), 113—120.
[5] B e a l s R., A general calculus of pseudodifferential operators, Duke Math. J., **42**, № 1 (1975), 1—42.
[6] K u m a n o-g o H., T a n i g u c h i K., Oscillatory integrals of symbols of pseudo-differential operators on R^n and operators of Freaholm type, Proc. Japan. Acad., **49** (1973), 397—402.
[7] Ш у б и н М. А., Псевдодифференциальные операторы в R^n, Докл. АН СССР, **196**, № 2 (1971), 316—319.
[8] C o r d e s H. O., On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundness of pseudodifferential operators, J. Funct. Anal., **18** (1975), 115—131.
[9] Г о х б е р г И. Ц., Ф е л ь д м а н И. А., Уравнение в свертках и проекционные методы их решения, М., «Наука», 1971.
[10] К о н Дж. Дж., Н и р е н б е р г Л., Алгебра псевдодифференциальных операторов, Сб., Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1967.
[11] М а с л о в В. П., Ф е д о р ю к М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., «Наука», 1976.