ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 9 (232)

М. А. Акивис

УДК 514.7

О МНОГОМЕРНОМ ОБОБЩЕНИИ СЕТИ КЁНИГСА

На поверхности трехмерного пространства все линии тени от точек, лежащих на некоторой прямой, и сечения поверхности плоскостями, проходящими через эту прямую, образуют сопряженную сеть, называемую сетью Кёнигса (см., напр., [1], с. 370). В данной работе на гиперповерхности проективного пространства P_n строится двухкомпонентная сопряженная система $S_{p,q}$ [2], аналогичная сети Кёнигса.

Пусть V_{n-1}—тангенциально невырожденная гиперповерхность пространства P_n и P_q $(1 \leqslant q \leqslant n-2)$—его фиксированное q-мерное подпространство, которое находится в общем положении по отношению к V_{n-1}. Это значит, что P_q не содержит точек рассматриваемой области гиперповерхности V_{n-1} и не принадлежит ни одной из ее касательных гиперплоскостей. Через точку x гиперповерхности V_{n-1} и подпространство P_q проведем $(q+1)$-плоскость P_{q+1}, которая пересечет гиперповерхность V_{n-1} по поверхности V_q коразмерности 1, $V_q \subset P_{q+1}$. Поверхности V_q образуют первое семейство поверхностей конструируемой двухкомпонентной сопряженной системы $S_{p,q}$. Это семейство зависит от $p=n-1-q$ параметров.

Для того чтобы построить второе семейство поверхностей, образующих систему $S_{p,q}$, рассмотрим в каждой точке x гиперповерхности V_{n-1} p-мерное направление $\Delta_p(x)$, сопряженное относительно ее асимптотической квадратичной формы q-направлению $\Delta_q(x)$, касательному к поверхности V_q, проходящей через точку x, и докажем, что распределение Δ_p будет интегрируемым на V_{n-1}. Для этой цели присоединим к гиперповерхности V_{n-1} подвижной репер, образованный точками $A_0, A_1, \dots, A_n$, так, что $A_0=x$, $A_a \in \Delta_p(x)$ $(a=1,\dots,p)$, $A_u \in \Delta_q(x) \cap P_q$ $(u=p+1,\dots,n-1)$, $A_n \in P_q$. Уравнения движения этого репера запишутся в виде

$$dA_\xi = \omega_\xi^\eta A_\eta \quad (\xi, \eta = 0, 1, \dots, n),$$

где

$$\omega_0^n = 0, \quad (1) \qquad \omega_a^n = \lambda_{ab}\omega_0^b, \ \omega_u^n = \lambda_{uv}\omega_0^v, \quad (2) \qquad \omega_u^0 = \omega_u^a = \omega_n^0 = \omega_n^a = 0. \quad (3)$$

Здесь уравнение (1)—это уравнение гиперповерхности V_{n-1}. Уравнения (2) получены внешним дифференцированием уравнения (1) с учетом сопряженности распределений Δ_p и Δ_q; в них величины λ_{ab} и λ_{uv} являются коэффициентами асимптотической квадратичной формы гиперповерхности V_{n-1}; образуемые этими величинами матрицы симметричны и невырождены. Уравнения (3) выражают неподвижность подпространства P_q, определяемого точками A_u, A_n. Заметим еще, что формы Пфаффа ω_ξ^η удовлетворяют известным уравнениям структуры проективного пространства (см., напр., [3], с. 22). Распределение Δ_q определяется на V_{n-1} системой уравнений $\omega_0^a=0$. Так как в силу (3) $d\omega_0^a = \omega_0^0 \wedge \omega_0^a + \omega_0^b \wedge \omega_b^a$, то эта система будет вполне интегрируема. Ее интегральными поверхностями являются поверхности V_q. Распределение Δ_p определяется на V_{n-1} системой уравнений $\omega_0^u=0$. Внешнее дифференцирование левых частей этих уравнений дает

$$d\omega_0^u = \omega_0^0 \wedge \omega_0^u + \omega_0^v \wedge \omega_v^u + \omega_0^a \wedge \omega_a^u. \qquad (4)$$

Поэтому, чтобы доказать инволютивность распределения Δ_p, нужно найти вид форм ω_a^u. Для этого продифференцируем внешним образом первую подсистему системы уравнений (2). Получим

$$\nabla\lambda_{ab} \wedge \omega_0^b - \lambda_{uv}\,\omega_a^v \wedge \omega_0^u = 0, \tag{5}$$

где $\nabla\lambda_{ab} = d\lambda_{ab} - \lambda_{ac}\,\omega_b^c - \lambda_{cb}\,\omega_a^c + \lambda_{ab}(\omega_0^0 + \omega_n^n)$. Применяя к соотношению (5) лемму Картана, получим $\nabla\lambda_{ab} = \lambda_{abc}\,\omega_0^c + \lambda_{abu}\,\omega_0^u$, $-\lambda_{uv}\,\omega_a^v = \lambda_{abu}\,\omega_0^b + \lambda_{auv}\,\omega_0^v$, где величины λ_{abu} симметричны по индексам a и b. Из последнего соотношения следует, что $\omega_a^u = -\lambda^{uv}(\lambda_{abv}\,\omega_0^b + \lambda_{avw}\,\omega_0^w)$, где λ^{uv}—матрица, обратная к λ_{uv}. Подставляя эти выражения для форм ω_a^u в соотношения (4), получим уравнения $d\omega_0^u = \omega_0^0 \wedge \omega_0^u + \omega_0^v \wedge \omega_v^u - \lambda^{uv}\,\lambda_{avw}\,\omega_0^a \wedge \omega_0^w$, которые показывают, что система Пфаффа $\omega_0^u = 0$ будет также вполне интегрируемой на V_{n-1}. Обозначим через V_p интегральные поверхности распределения Δ_p. Эти поверхности образуют второе семейство поверхностей сопряженной системы $S_{p,q}$, которое зависит от q параметров.

Рассмотрим теперь поверхности, которые описывают плоскости $\Delta_q(x)$ при перемещении вдоль интегральных поверхностей V_p. Плоскость $\Delta_q(x)$ определяется точками A_0 и A_u. Так как из (2) следует, что $\omega_u^n = 0$ при $\omega_0^u = 0$, то в силу (3) $dA_u = \omega_u^v A_v$. Это значит, что при перемещении точки $A_0 = x$ по поверхности V_p плоскость $A_{p+1} \wedge \ldots \wedge A_{n-1} = P_{q-1}$ остается неподвижной, а проходящая через нее плоскость $\Delta_q(x)$ описывает конус с вершиной P_{q-1}. Таким образом, поверхность V_p представляет собой „поверхность тени", если источник света равномерно распределить по плоскости P_{q-1}.

Доказанные выше утверждения можно сформулировать в следующем виде.

Теорема. *На тангенциально невырожденной гиперповерхности V_{n-1} проективного пространства P_n его подпространство P_q, находящееся в общем положении с V_{n-1}, индуцирует голономную двухкомпонентную сопряженную систему $S_{p,q}$, одно из семейств поверхностей которой высекается на V_{n-1} $(q+1)$-мерными плоскостями, проходящими через P_q, а второе—образовано поверхностями тени от источников света, равномерно распределенных по плоскостям размерности $q-1$, принадлежащим P_q.*

Заметим, что частный вид двухкомпонентной сопряженной системы, подобной построенной выше, рассматривался в работе [4] при изучении геометрии гиперповерхности пространства с вырожденной метрикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия.—М.—Л. 1949.—512 с.
2. Акивис М. А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем.—Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ, т. 1, 1966, с. 7—31.
3. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия.—Калинин, 1977.— с. 84.
4. Норден А. П., Чебышева Б. П. Внутренняя геометрия гиперповерхности пространства с вырожденной метрикой.—Изв. вузов. Матем., 1974, № 10, с. 57—60.

г. Москва

Поступила
10 IV 1979