Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Шкляев, Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I, *Дискрет. матем.*, 2019, том 31, выпуск 4, 102–115

DOI: 10.4213/dm1575

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
13 февраля 2025 г., 21:44:28

Дискретная математика

том 31 выпуск 4 * 2019

УДК 519.218.2 DOI https://doi.org/10.4213/dm1575

Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I

© 2019 г. А. В. Шкляев*

Работа состоит из двух частей. В первой части работы найдены асимптотики вероятностей больших уклонений для последовательности, заданной случайным разностным уравнением $Y_{n+1} = A_nY_n + B_n$, где $A_1, A_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, а B_n может зависеть от $\{(A_k, B_k), 0 \leqslant k < n\}$ при любом $n \geqslant 1$. Во второй части полученные результаты применяются к большим уклонениям ветвящихся процессов в случайной среде.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00111).

Ключевые слова: случайные разностные уравнения, вероятности больших уклонений, ветвящиеся процессы в случайной среде

1. Введение

Пусть (A_n, B_n) — случайные векторы, Y_0 — некоторая случайная величина,

$$Y_{n+1} = A_nY_n + B_n, \quad n \geqslant 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) называют случайным разностным уравнением.

В случае независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных векторов (A_n, B_n) предельное поведение последовательности Y_n хорошо изучено (см., например, [1]). Базовыми в этом направлении стали работы [2] и [3]. Такого рода последовательности играют большую роль в финансовой математике (см. [4]), в теории ветвящихся случайных блужданий (см. [5]) и в других областях.

Для таких случайных последовательностей вероятности больших уклонений в случаях, когда распределения коэффициентов A_n, B_n имеют тяжелые хвосты, изучались рядом авторов (см., например, [6, 7]). Здесь рассматривается случай, когда распределения коэффициентов A_n, B_n имеют легкие хвосты, и используется тот же подход, что в [8].

Будем предполагать, что в последовательности случайных векторов (A_n, B_n) случайные величины (сл.в.) $A_0, A_1, \ldots$ н.о.р., но каждая с.в. B_n может зависеть от

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, ashklyaev@gmail.com

$(A_k, B_k, k < n)$ и иметь распределение, зависящее от n. При моментных ограничениях на A_k, B_k, $k \geqslant 0$, в работе получена асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant x), \quad n \to \infty,$$

где $x/n \geqslant \mu$, $\mu = \mathbf{E}\xi_n$, $\xi_n = \ln A_n$.

В разделе 2 введены обозначения и приведены вспомогательные результаты. В разделе 3 представлены интегро-локальные теоремы 2, 3 о больших уклонениях для рекуррентной последовательности и вытекающая из них интегральная теорема 4. В разделе 4 приведены доказательства теорем 2–4.

Настоящая статья представляет собой первую часть цикла из двух работ. Во второй части полученные результаты применяются к задаче о больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде и ветвящихся процессов с иммиграцией в случайной среде.

2. Вспомогательные результаты

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i, i > 0)$ — последовательность н.о.р. невырожденных с.в. с конечным $\mu := \mathbf{E}\xi$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, удовлетворяющих условию $R(h) := \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$, $h \in [0, h^+)$. При $h \in (0, h^+)$ положим

$$m(h) = (\ln R(h))', \, \sigma^2(h) = m'(h) > 0, \, m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h).$$

Функция $m(h)$ непрерывна и монотонно возрастает при $h \in [0, h^+)$; $m(0) = \mu$. Поэтому для любого $\theta \in [\mu, m^+)$ найдется такое $h_\theta \in [0, h^+)$, что $m(h_\theta) = \theta$. Отметим, что $\sigma^2(h)$ также непрерывна на $(0, h^+)$ и $\sigma^2(0) = \mathbf{D}\xi$, если $\mathbf{D}\xi < \infty$. Введем функцию уклонений $\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta)$. При этом

$$\Lambda'(\theta) = h_\theta, \quad \Lambda''(\theta) = \frac{1}{\sigma^2(h_\theta)}, \quad \Lambda(\mu) = 0, \quad \Lambda'(\mu) = 0, \quad \Lambda''(\mu) = \frac{1}{\mathbf{D}\xi}. \tag{2}$$

Сопряженным с S_n блужданием назовем блуждание $S_n^{(h)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(h)}$, $S_0^{(h)} = 0$, где $(\xi_i^{(h)}, i > 0)$ — последовательность н.о.р. сл.в. с функцией распределения (ф.р.)

$$F^{(h)}(x) = R(h)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hy} dF(y).$$

При этом $\mathbf{E}\xi^{(h)} = m(h)$, $\mathbf{D}\xi^{(h)} = \sigma^2(h)$. Рассмотрим сигма-алгебру подмножеств Ω, порожденную последовательностью $\boldsymbol{\xi}$, зададим на ней меру соотношением

$$\mathbf{P}^{(h)}(A) = \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\xi}^{(h)} \in B\right), \quad A = \boldsymbol{\xi}^{-1}(B), \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty),$$

где $\xi^{(h)} \stackrel{d}{=} (\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \dots)$. Доопределим меру $\mathbf{P}^{(h)}$ на $\mathcal{F}$ формулой

$$\mathbf{P}^{(h)}(A) = \mathbf{E}^{(h)}\left(\mathbf{P}(A|\boldsymbol{\xi})\right), \quad A \in \mathcal{F},$$

$\mathbf{E}^{(h)}$ здесь и далее обозначает математическое ожидание по мере $\mathbf{P}^{(h)}$. Меру $\mathbf{P}^{(h)}$ будем называть мерой, сопряженной с $\mathbf{P}$.

Будем говорить, что некоторое соотношение выполнено для всех числовых последовательностей Δ_n, достаточно медленно стремящихся к нулю при $n \to \infty$, если найдется такая положительная последовательность $\widetilde{\Delta}_n \to 0$, $n \to \infty$, что для любой последовательности $\Delta_n \to 0$, $n \to \infty$, удовлетворяющей неравенствам $\Delta_k > \widetilde{\Delta}_k$ при всех натуральных k, выполнено это соотношение.

Для удобства в дальнейшем мы будем использовать общее обозначение $r_n(u)$ для последовательностей, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по множеству рассматриваемых значений u. Аналогично будем использовать обозначение $r_n(u, v)$ для последовательностей, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по u и v. В разных формулах $r_n(u)$ ($r_n(u, v)$) могут обозначать разные последовательности.

Теорема 1 ([9], стр. 205, 238). *Пусть $(\xi_i, i > 0)$ — последовательность нерешетчатых н.о.р. сл.в.*
1) *Пусть $\sigma^2 := \mathbf{D}\xi < \infty$, $\mu = \mathbf{E}\xi$. Тогда при всех последовательностях Δ_n, стремящихся к нулю достаточно медленно, и $x \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\left(S_n \in [x, x + \Delta_n)\right) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma}\left(\exp\left(-\frac{(x - \mu n)^2}{2n\sigma^2}\right) + r_n(x)\right). \tag{3}$$

2) *Пусть ξ удовлетворяет условию Крамера $R(h) < \infty$, $h \in [0, h^+)$. Тогда при всех последовательностях Δ_n, достаточно медленно стремящихся к нулю, и $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\left(S_n \in [x, x + \Delta_n)\right) = \frac{\Delta_n\left(1 + r_n\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} e^{-\Lambda(x/n)n}. \tag{4}$$

3) *Пусть выполнены условия п. 2) и, кроме того, $\mathbf{D}\xi < \infty$. Тогда соотношение (4) выполнено при $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subset [\mu, m^+)$ и всех Δ_n, достаточно медленно стремящихся к нулю.*

Замечание 1. Отметим также такой факт ([9], стр. 238): пусть ξ нерешетчата, удовлетворяет условию Крамера $R(h) < \infty$, $h \in [0, h^+)$, и пусть $0 \leqslant \widetilde{h}_1 < \widetilde{h}_2 < h^+$. В случае $\widetilde{h}_1 = 0$ потребуем дополнительно конечность дисперсии $\mathbf{D}\xi$. Тогда при достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностях Δ_n соотношение

$$\mathbf{P}\left(S_n^{(h)} \in [x, x + \Delta_n)\right) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)}\left(\exp\left(-\frac{(x - m(h)n)^2}{2n\sigma(h)^2}\right) + r_n(x, h)\right), \quad n \to \infty, \tag{5}$$

выполнено при $h \in [\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2]$ и $x \in \mathbb{R}$.

Мы будем рассматривать пространство L^p при $p > 0$. В случае $p > 1$ мы будем рассматривать его с обычной нормой

$$||f||_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

при $0 < p \leqslant 1$ мы будем рассматривать его как пространство с метрикой

$$\rho_p(f, g) = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|^p dx.$$

Пространство (L^p, ρ_p) является полным при $0 < p \leqslant 1$.

3. Рекуррентные последовательности

Пусть
$$Y_{k+1} = A_k Y_k + B_k,\ k \geqslant 0,$$
где $A_0, A_1, \ldots$ — н.о.р. положительные невырожденные с.в. Положим $\xi_{k+1} = \ln A_k$, $\xi = \xi_0$, и $\mu = \mathbf{E}\xi$, $m^* = \max(0, \mu)$.

Пусть $\theta_1, \theta_2 \geqslant m^*$, $\theta_1 < \theta_2$. Введем следующие условия:
A1) при любом $k \geqslant 0$ вектор $(Y_0, A_0, \ldots, A_k, B_0, \ldots, B_k)$ не зависит от последовательности $(A_{k+1}, \ldots)$,
A2) с.в. $\xi_{k+1} = \ln A_k$ невырождены, нерешетчаты, имеют конечное математическое ожидание $\mathbf{E}\xi = \mu$ и удовлетворяют правостороннему условию Крамера
$$R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty,\ h \in [0, h^+),$$
при некотором таком h^+, что $m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h) > \theta_2$,
A3) величина Y_0 такова, что $\mathbf{E}|Y_0|^h < \infty$, $h \in [0, h_{\theta_2}]$ (функция h_θ определена в начале раздела 2),
A4) при любом $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ найдется такое $\delta > 0$, что
$$\limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}^{(h)}(Y_n \geqslant \delta \exp(S_n)) > 0, \quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$
A5) при некоторых c, $\delta > 0$, всех $k > 0$ и всех $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ выполнено неравенство
$$\mathbf{E}|B_k|^h < ce^{-\delta hk} R(h)^{k+1}.$$

Теорема 2. *Пусть $m^* < \theta_1 < \theta_2$. Предположим, что выполнены условия A1–A5. Тогда при $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$ соотношение*
$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x + \Delta_n)) = \left(1 + r_n\left(\frac{x}{n}\right)\right) \frac{I_Y\left(\frac{x}{n}\right) \Delta_n \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \tag{6}$$
справедливо при всех достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностях Δ_n, где
$$I_Y(\theta) = \lim_{k \to \infty} \frac{\mathbf{E}\left(Y_k^+\right)^{h_\theta}}{R(h_\theta)^k}, \tag{7}$$
$Y_k^+ = \max(Y_k, 0)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. *При этом предел в правой части* (7) *определен и положителен, и сходимость к нему равномерна по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Более того, функция $I_Y(\cdot)$ непрерывна на $[\theta_1, \theta_2]$.*

Напомним, что $r_n(x/n)$ в (6) обозначает последовательность, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по рассматриваемым x/n.
Замечание 2. В условиях теоремы 2 последовательность $Y_k^+ e^{-S_k}$ сходится по распределению относительно меры $\mathbf{P}^{(h)}$ к некоторой случайной величине Y_h^* при каждом $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$, причем
$$I_Y(\theta) = \mathbf{E}(Y_{h_\theta}^*)^{h_\theta}.$$

Для следующей теоремы нам понадобятся дополнительные условия:
A6) при любом $\varepsilon > 0$ найдутся такие l, $I > 0$, что при любой последовательности $t_n \to 0$ и всех $k > l$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \mathbf{E}^{(h)}(Y_k^+ e^{-S_k})^{t_n} - I \right| < \varepsilon,$$

A7) при некотором $\widetilde{\delta} \in (0, 1/2)$ и любом $\varepsilon > 0$ найдется такое l, что при любой последовательности $t_n \to 0$ и всех $k > l$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}^{(h)} \left(\left(Y_k^+ e^{-S_k}\right)^{t_n} ; |\ln Y_k - m(t_n)k| > k^{1/2+\widetilde{\delta}} \right) < \varepsilon.$$

Теорема 3. *Предположим, что* $0 < m^* = \mu = \theta_1 < \theta_2$. *Пусть* $\sigma^2 := \mathbf{D}\xi < \infty$ *и выполнены условия A1–A7. Тогда соотношение* (6) *выполнено при* $x/n \in [\mu, \theta_2]$ *и всех достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностей* Δ_n. *Сходимость в* (7) *равномерна по* $\theta \in [\mu, \theta_2]$.
Замечание 3. Теорема 3 позволяет получить асимптотику вероятностей нормальных и умеренных уклонений вида

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [\mu n + s_n, \mu n + s_n + \Delta_n)),\ n \to \infty,$$

где s_n — положительная последовательность, $s_n = o(n)$ при $n \to \infty$.

Сформулированные результаты имеют интегро-локальную форму. Из них нетрудно получить более привычные интегральные теоремы, например:
Теорема 4. (i) *Пусть* $m^* < \theta_1 < \theta_2$. *Предположим, что выполнены условия A1-A5. Тогда при* $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$ *выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant x) = \frac{(1 + r_n(x/n))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})h_{x/n}} I_Y\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n\right).$$

(ii) *Пусть при некотором* $\varepsilon > 0$ *для* $\theta_1 = \mu$, $\theta_2 = \mu + \varepsilon$ *выполнены условия A1-A7,* $m^* = \mu > 0$ *и* $\sigma^2 := \mathbf{D}\xi < \infty$. *Тогда при любом* $x \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant \mu n + x\sigma\sqrt{n}) \to I_Y(\mu)\left(1 - \Phi(x)\right), \quad n \to \infty,$$

где $\Phi(x)$ *— ф.р. стандартного нормального закона.*

4. Доказательство теорем 2, 3, 4

Доказательство теоремы 2. Доказательство состоит из нескольких этапов, разбитых, в свою очередь, на части. В п. 1) мы покажем, что предел в правой части (7) существует, непрерывен, положителен и сходимость равномерна по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. В пп. 2) и 3) мы получим, соответственно, оценки сверху и снизу для вероятностей $\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x + \Delta_n))$.

Приведем два соотношения, использующиеся в дальнейшем. Из определения величины Y_n вытекает разложенние

$$Y_n = Y_0 A_0 \cdots A_{n-1} + B_0 A_1 \cdots A_{n-1} + \ldots + B_{n-2}A_{n-1} + B_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i}, \quad (8)$$

где $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $B_{-1} = Y_0$.

При любом k, любых сл. в. U и событиях $C \in \mathcal{F}$, не зависящих от последовательности $(\xi_j, j > k)$, в силу определения сопряженной меры

$$\frac{\mathbf{E}\left(U^h; C\right)}{R(h)^k} = \frac{1}{R(h)^k}\mathbf{E}\left(\frac{e^{hS_k}U^h}{e^{hS_k}}; C\right) = \mathbf{E}^{(h)}\left(\left(\frac{U}{e^{S_k}}\right)^h; C\right). \tag{9}$$

1) Докажем, что предел в правой части (7) существует, положителен, непрерывен, а сходимость к нему равномерна по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

1.1) Рассмотрим сначала случай $h_\theta \leqslant 1$. Ясно, что $h_\theta \geqslant h_{\theta_1} > 0$. При $l > k$ и $h \in [h_{\theta_1}, 1]$ имеем

$$\mathbf{E}^{(h)}\left|\frac{Y_l}{e^{S_l}} - \frac{Y_k}{e^{S_k}}\right|^h = \mathbf{E}^{(h)}\left|\sum_{i=k}^{l-1}\frac{B_i}{e^{S_{i+1}}}\right|^h \leqslant \sum_{i=k}^{l-1}\frac{\mathbf{E}|B_i|^h}{R(h)^{i+1}} \leqslant c\sum_{i=k}^{l-1}e^{-\delta h i} \leqslant \frac{ce^{-\delta h_{\theta_1}k}}{1-e^{-\delta h_{\theta_1}}}, \tag{10}$$

здесь мы воспользовались неравенством $\sum_{i=1}^n a_i^h \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^h$ при $a_i \geqslant 0$ и $h \in (0,1]$. За счет выбора достаточно большого k правая часть (10) может быть сделана сколь угодно малой.

Поскольку $(L^h(\mathbf{P}^{(h)}), \rho_h)$ — полное метрическое пространство случайных величин, интегрируемых в h-й степени по мере $\mathbf{P}^{(h)}$, последовательность $Y_k^+ e^{-S_k}$ сходится в нем к некоторой величине Y_h^* при $k \to \infty$. Значит, существует предел

$$I_Y(m(h)) = \mathbf{E}(Y_h^*)^h = \lim_{k\to\infty}\mathbf{E}^{(h)}\left(\frac{Y_k^+}{e^{S_k}}\right)^h, \tag{11}$$

причем сходимость к нему равномерна по $h \in [h_{\theta_1}, 1]$. При этом при любом $h \in [h_{\theta_1}, 1]$

$$\mathbf{P}(Y_h^* > 0) \geqslant \limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}^{(h)}(Y_n \geqslant \delta\exp(S_n)) > 0 \tag{12}$$

при некотором $\delta > 0$ ввиду условия A4. Следовательно, $\mathbf{E}(Y_h^*)^h$ отделено от нуля при всех h. При этом функции $\mathbf{E}(Y_k^+)^h$, $R(h)$ при любом k непрерывны по $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$, откуда следует, что функция $I_Y(\theta)$ непрерывна как равномерный предел последовательности непрерывных функций.

1.2) При $h_\theta > 1$ аналогичные рассуждения вытекают из оценки

$$\mathbf{E}^{(h)}\left|\frac{Y_l}{e^{S_l}} - \frac{Y_k}{e^{S_k}}\right|^h = \mathbf{E}^{(h)}\left|\sum_{i=k}^{l-1}\frac{B_i}{e^{S_{i+1}}}\right|^h \leqslant \left(\sum_{i=k}^{l-1}\left(\mathbf{E}^{(h)}\frac{|B_i|^h}{e^{hS_{i+1}}}\right)^{1/h}\right)^h = \left(\sum_{i=k}^{l-1}\left(\frac{\mathbf{E}|B_i|^h}{R(h)^{i+1}}\right)^{1/h}\right)^h, \tag{13}$$

справедливой при всех $h \in [1, h_{\theta_2}]$ и $l > k$ в силу неравенства Минковского и соотношения (9). В силу условия A5) правая часть (13) не превосходит

$$c\left(\sum_{i=k}^{l-1}e^{-\delta i}\right)^h < \varepsilon$$

при некоторых положительных c, δ, всех $h \in [1, h_{\theta_2}]$, достаточно больших k и всех $l > k$.

2) Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Наша цель — доказать оценку сверху

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x+\Delta_n)) \leqslant (1+\varepsilon) I_Y\left(\frac{x}{n}\right) \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) \tag{14}$$

при всех рассматриваемых x и достаточно больших n.

Фиксируем $\alpha \in (1/2, 1)$, $\beta \in (0, \alpha - 1/2)$ и такую положительную последовательность $\delta_n \to 0$, что $\ln \delta_n = o(n^\beta)$, $n \to \infty$. Будем использовать оценку

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x+\Delta_n)) \leqslant \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right| \geqslant \delta_n \exp(x)\right)$$
$$+\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x + \ln(1-\delta_n), x + \Delta_n + \ln(1+\delta_n))\right). \tag{15}$$

В 2.1) мы оценим первое слагаемое правой части (15), в 2.2) — второе.

2.1) Первое слагаемое (15) в силу неравенства Маркова оценивается сверху величиной

$$\mathbf{P}(\exists i \in [n^\alpha, n] : S_n - S_i + \ln|B_{i-1}| \geqslant x + \ln\delta_n - \ln n)$$
$$\leqslant \sum_{i=n^\alpha}^{n} \mathbf{P}(S_n - S_i + \ln|B_{i-1}| \geqslant x - n^\beta) \leqslant \sum_{i=n^\alpha}^{n} \mathbf{E}|B_{i-1}|^h R(h)^{n-i} e^{-h(x-n^\beta)}$$
$$\leqslant c_1 n e^{-(h_{x/n} x/n - \ln R(h_{x/n}))n} e^{-\delta h n^\alpha} e^{(\ln R(h) - \ln R(h_{x/n}))n} e^{(h_{x/n} - h)x} e^{h n^\beta} \tag{16}$$

при некотором $c_1 > 0$, любом $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ и всех достаточно больших n.

Положим для краткости $h = h_{x/n}$, тогда $h = h_{\theta_1} > 0$. В силу неравенства $\alpha > \beta$ и (15) имеем при всех рассматриваемых x

$$\mathbf{P}(\exists i \in [n^\alpha, n] : S_n - S_i + \ln|B_{i-1}| \geqslant x + \ln\delta_n - \ln n)$$
$$\leqslant c_1 n \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right) \exp(-h_{\theta_1}(\delta n^\alpha - n^\beta)) = r_n\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right)$$

для всех последовательностей Δ_n, достаточно медленно стремящихся к 0.

2.2) Оценим второе слагаемое в (15) сверху. Покажем, что

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum\nolimits_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x, x+\Delta_n)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) I_Y\left(\frac{x}{n}\right) \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) \tag{17}$$

при любых положительных ε, достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностях Δ_n, достаточно больших n и всех рассматриваемых x. Тогда из (15), (17) будет вытекать оценка (14), поскольку при $\delta_n = o(\Delta_n)$, $n \to \infty$, при всех рассматриваемых x выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)) = \left(1 + r_n\left(\frac{x}{n}\right)\right) \mathbf{P}(S_n \in [x + \ln(1-\delta_n), x + \ln(1+\delta_n) + \Delta_n)).$$

Вероятность в левой части (17) представим в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}\left(S_{n-[n^\alpha]} \in [x-y, x-y+\Delta_n)\right) \mathbf{P}\left(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy\right) \leqslant R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]}$$

$$\times \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right) \int_{\mathbb{R}} e^{h_{x/n}y} \mathbf{P}\left(S^{(h_{x/n})}_{n-[n^\alpha]} \in [x-y, x-y+\Delta_n)\right) \mathbf{P}\left(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy\right).$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\mathbf{P}(S_m \in [a,b)) = R(h)^m \int_a^b e^{-hx} \mathbf{P}(S^{(h)}_m \in dx) \leqslant R(h)^m e^{-ha} \mathbf{P}(S^{(h)}_m \in [a,b]), \qquad (18)$$

справедливым при любых m, $a < b$, $h \in [0, h^+)$. В силу замечания 1 выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\left(S^{(h_{x/n})}_{n-[n^\alpha]} \in [x-y, x-y+\Delta_n)\right)$$
$$= \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma\left(h_{x/n}\right)} \left(\exp\left(-\frac{(y - xn^\alpha/n)^2}{2\sigma^2(h_{x/n})(n-n^\alpha)}\right) + r_n\left(\frac{x}{n}, \frac{x-y}{n}\right)\right)$$

при всех рассматриваемых x,y и всех достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностей Δ_n. Таким образом, при достаточно больших n и всех рассматриваемых x

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum\nolimits_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x, x+\Delta_n)\right)$$
$$\leqslant \frac{(1+\varepsilon/4)\,\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma\left(h_{x/n}\right)} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{h_{x/n}y} \mathbf{P}\left(\ln Y_{[n^\alpha]} \in dy\right)}{R(h_{x/n})^{[n^\alpha]}}. \qquad (19)$$

Интеграл в правой части (19) есть $(1 + r_n(x/n))I_Y(x/n)$ в силу равномерности сходимости в (7). Отсюда вытекает неравенство (17).

3) Докажем теперь при всех $\varepsilon \in (0,1)$, достаточно больших n и всех рассматриваемых x оценку снизу

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x, x+\Delta_n)) \geqslant (1-\varepsilon) I_Y\left(\frac{x}{n}\right) \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta_n)). \qquad (20)$$

Аналогично п. 2) вероятность в левой части (20) оцениваем снизу величиной

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum\nolimits_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x + \ln(1+\delta_n), x + \Delta_n + \ln(1-\delta_n))\right) \qquad (21)$$
$$- \mathbf{P}\left(\left|\sum\nolimits_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right| \geqslant \delta_n \exp(x)\right).$$

В силу 2.1) вычитаемое в (21) есть $r_n(x/n)\Delta_n n^{-1/2} \exp(-\Lambda(x/n)n)$. Для оценки уменьшаемого в (21) нам, как и в п. 2), достаточно получить требуемую оценку снизу для вероятности

$$\mathbf{P}\left(\ln\left(\sum\nolimits_{i=0}^{[n^\alpha]} B_{i-1} e^{S_n - S_i}\right) \in [x, x+\Delta_n)\right).$$

Аналогично 2.2) оценим ее снизу величиной

$$\frac{(1-\varepsilon/2)}{\sqrt{2\pi n}\sigma\left(h_{x/n}\right)}\frac{\exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right)}{R(h_{x/n})^{[n^\alpha]}} \times\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{(y-xn^\alpha/n)^2}{2\sigma^2(h_{x/n})(n-n^\alpha)}\right)e^{h_{x/n}y}\mathbf{P}\left(\ln Y_{[n^\alpha]}\in dy\right) \quad (22)$$

при достаточно больших n. Здесь вместо неравенства (18) использовано неравенство

$$\mathbf{P}(S_m\in[a,b))\geqslant R(h)^m e^{-hb}\mathbf{P}(S_m^{(h)}\in[a,b]).$$

Фиксируем $\nu\in(\alpha/2,1/2)$ и оценим интеграл в правой части (22) следующим образом:

$$\int_{xn^\alpha/n-n^\nu}^{xn^\alpha/n+n^\nu}\exp\left(-\frac{(y-xn^\alpha/n)^2}{2\sigma^2(h_{x/n})(n-n^\alpha)}\right)e^{h_{x/n}y}\mathbf{P}\left(\ln Y_{[n^\alpha]}\in dy\right)$$
$$\geqslant\exp\left(-\frac{n^{2\nu}}{2\sigma^2(h_{x/n})(n-n^\alpha)}\right)\int_{xn^\alpha/n-n^\nu}^{xn^\alpha/n+n^\nu}e^{h_{x/n}y}\mathbf{P}\left(\ln Y_{[n^\alpha]}\in dy\right)$$
$$\geqslant\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mathbf{E}\left(Y_{[n^\alpha]}^+\right)^{h_{x/n}}-\left(\int_{-\infty}^{xn^\alpha/n-n^\nu}+\int_{xn^\alpha/n+n^\nu}^{+\infty}\right)e^{h_{x/n}y}\mathbf{P}\left(\ln Y_{[n^\alpha]}\in dy\right) \quad (23)$$

при достаточно больших n.

Для доказательства (20) остается показать, что при рассматриваемых x

$$R(h_{x/n})^{-[n^\alpha]}\left(\int_{-\infty}^{xn^\alpha/n-n^\nu}+\int_{xn^\alpha/n+n^\nu}^{+\infty}\right)e^{h_{x/n}y}\mathbf{P}\left(\ln Y_{[n^\alpha]}\in dy\right)=r_n\left(\frac{x}{n}\right). \quad (24)$$

Пользуясь соотношением (9), представим левую часть (24) в виде

$$\mathbf{E}^{(h_{x/n})}\left(\left(\frac{Y_{k_n}^+}{e^{S_{k_n}}}\right)^{h_{x/n}};\left|\ln Y_{k_n}-m(h_{x/n})k_n\right|>k_n^{\nu/\alpha}\right), \quad (25)$$

где $k_n=[n^\alpha]$. Предположим, что по рассматриваемым x последовательность (25) не является равномерно сходящейся к нулю при $n\to\infty$. Тогда найдутся такие $\varepsilon>0$ и последовательность $\widetilde{h}_n\in[h_{\theta_1},h_{\theta_2}]$, что

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbf{E}^{(\widetilde{h}_n)}\left(\left(\frac{Y_{k_n}^+}{e^{S_{k_n}}}\right)^{\widetilde{h}_n};|\ln Y_{k_n}-m(\widetilde{h}_n)k_n|>k_n^{\nu/\alpha}\right)>\varepsilon. \quad (26)$$

Заметим, что в силу неравенства

$$\mathbf{E}^{(\widetilde{h}_n)}\left(\left(\frac{Y_{k_n}^+}{e^{S_{k_n}}}\right)^{\widetilde{h}_n};\ln Y_{k_n}<S_{k_n}-k_n^{\nu/\alpha}/2\right)\leqslant e^{-k_n^{\nu/\alpha}\widetilde{h}_n/2}$$

часть математического ожидания в левой части (26), соответствующая событию $\{\ln Y_{k_n} < S_{k_n} - k_n^{\nu/\alpha}/2\}$, стремится к нулю. Следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}^{(\widetilde{h}_n)} \left(\left(\frac{Y_{k_n}^+}{e^{S_{k_n}}} \right)^{\widetilde{h}_n} ; A_{k_n, \widetilde{h}_n} \right) > \varepsilon, \tag{27}$$

где

$$A_{l,h} = \{\ln Y_l - S_l \geqslant l^{\nu/\alpha}/2\} \bigcup \{|S_l - m(h)l| > l^{\nu/\alpha}/2\}.$$

Пусть $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$. При $h \leqslant 1$ из соотношения (10) при любом $\varepsilon > 0$, всех достаточно больших k, l, всех $A \in \mathcal{F}$ и $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$ вытекает неравенство

$$\left| \mathbf{E}^{(h)} \left(\left(\frac{Y_k^+}{e^{S_k}} \right)^h ; A \right) - \mathbf{E}^{(h)} \left(\left(\frac{Y_l^+}{e^{S_l}} \right)^h ; A \right) \right| \leqslant \mathbf{E}^{(h)} \left| \frac{Y_k^+}{e^{S_k}} - \frac{Y_l^+}{e^{S_l}} \right|^h < \varepsilon/4. \tag{28}$$

При $h > 1$ оценка (28) вытекает из соотношения (13). Следовательно, при $A = A_{l,h}$

$$\mathbf{E}^{(h)} \left(\left(\frac{Y_l^+}{e^{S_l}} \right)^h ; A_{l,h} \right) \leqslant \varepsilon/4 + \mathbf{E}^{(h)} \left(\left(\frac{Y_k^+}{e^{S_k}} \right)^h ; A_{l,h} \right). \tag{29}$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(h)}(A_{l,h}) \leqslant \mathbf{P}^{(h)} \left(\ln Y_l \geqslant S_l + l^{\nu/\alpha}/2 \right) + \mathbf{P}^{(h)} \left(|S_l - m(h)l| \geqslant l^{\nu/\alpha}/2 \right) \\ \leqslant e^{-hl^{\nu/\alpha}/2} \mathbf{E}^{(h)} \left(\frac{Y_l}{e^{S_l}} \right)^h + \frac{4l\sigma^2(h)}{l^{2\nu/\alpha}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Правая часть (30) стремится к 0 при $l \to \infty$ равномерно по $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$. Таким образом, при любом k и $l \to \infty$ величина

$$\mathbf{E}^{(h)} \left(\left(\frac{Y_k^+}{e^{S_k}} \right)^h ; A_{l,h} \right)$$

стремится к нулю равномерно по $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$. Следовательно, соотношение (29) противоречит (27). Теорема 2 доказана. □

Доказательство теоремы 3. Будем действовать по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 2. Единственным отличием является то, что величина $h_{x/n}$ в условиях теоремы 3 не отделена от нуля.

1) Покажем, что сходимость в (7) равномерна по θ. Предположим, что это не так. Тогда найдутся такие положительное ε и последовательности $l_n > k_n \to \infty$, $t_n \in [0, h_{\theta_2}]$, что справедливо неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \mathbf{E}^{(t_n)} \left(\frac{Y_{k_n}^+}{e^{S_{k_n}}} \right)^{t_n} - \mathbf{E}^{(t_n)} \left(\frac{Y_{l_n}^+}{e^{S_{l_n}}} \right)^{t_n} \right| > \varepsilon. \tag{31}$$

При этом t_n не может иметь 0 в качестве предельной точки в силу условия А6. Значит, $t_n > \widetilde{\varepsilon}$ при всех n и некотором положительном $\widetilde{\varepsilon}$. В силу (10) левая часть (31) оценивается сверху величиной

$$\frac{ce^{-\delta\widetilde{\varepsilon}k_n}}{1-e^{-\delta\widetilde{\varepsilon}}} \to 0$$

при $n \to \infty$, что приводит к противоречию.

Следовательно, предел в (7) существует и сходимость к нему равномерна по $\theta \in [\mu, \theta_2]$. При этом предел положителен при $\theta = \mu$ в силу условия А6, а при $\theta > \mu$ — в силу соотношения (12).

2) Докажем оценку сверху (14).

Оценим первое слагаемое в (15). Неравенство (16) остается справедливым в силу тех же соображений, что и прежде. Положим $h = h_{x/n} + n^{-1/2}$ и заметим, что

$$\ln R(h) = \ln R(h_{x/n}) + \frac{x}{n}n^{-1/2} + \frac{1}{2}\sigma^2(\widetilde{h})n^{-1}$$

при некотором $\widetilde{h} \in [h_{x/n}, h]$. Следовательно, правая часть (16) при всех n оценивается сверху величиной

$$c_1 n \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n - \delta n^{\alpha-1/2} + \frac{1}{2}\sigma^2(\widetilde{h}) + h_{\theta_2}n^{\beta}\right).$$

Поскольку $\beta < \alpha - 1/2$, то при рассматриваемых x соотношение

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} B_{i-1}e^{S_n-S_i}\right| \geqslant \delta_n \exp(x)\right) = r_n\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\Delta_n}{\sqrt{n}}e^{-\Lambda(x/n)n} \tag{32}$$

справедливо при всех достаточно медленно стремящихся к нулю последовательностей Δ_n. Второе слагаемое (15) оценивается тем же образом, что и при доказательстве п. 2.2) в теореме 2.

3) Выберем $\nu \in (\alpha/2, \alpha(1+\widetilde{\delta})/2)$, где $\widetilde{\delta}$ — из условия А7. Доказательство соотношения (23) остается без изменений. Предположим, что найдутся такие $\varepsilon > 0$ и последовательность $\widetilde{h}_n \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$, что выполнено соотношение (26). При этом $\widetilde{h}_n$ не может иметь 0 среди предельных точек в силу условия А7. Следовательно, при некотором положительном $\widehat{\delta}$ и всех достаточно больших n выполнено неравенство $\widetilde{h}_n > \widehat{\delta}$. В таком случае те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 2, приводят к противоречию с (26). □

Доказательство теоремы 4. (i) Фиксируем последовательность Δ_n, положим $M = [n^{1/3}/\Delta_n]$ и воспользуемся представлением

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant x) = \mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant x + M\Delta_n) + \sum_{k=1}^{M}\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x+(k-1)\Delta_n, x+k\Delta_n)). \tag{33}$$

Оценим первое слагаемое (33) с помощью неравенства Маркова:

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant x + M\Delta_n) \leqslant \frac{\mathbf{E}Y_n^{h_{x/n}}}{\exp(h_{x/n}(x+M\Delta_n))} \leqslant \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right)e^{-h_{\theta_1}n^{1/3}}\frac{\mathbf{E}(Y_n^+)^{h_{x/n}}}{R(h_{x/n})^n}.$$

В силу теоремы 2 последовательность $\mathbf{E}(Y_n^+)^h R(h)^{-n}$ является сходящейся при $n \to \infty$ и $h \in [h_{\theta_1}, h_{\theta_2}]$, причем сходимость равномерна по рассматриваемым h. Следовательно, указанная последовательность ограничена некоторой константой при всех n и h, откуда

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant x + M\Delta_n) = r_n\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right).$$

Оценим величины под знаком суммы в (33).

В силу теоремы 2 при $x_k = x + (k-1)\Delta_n$ и достаточно медленно стремящихся к нулю Δ_n справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x_k, x_k + \Delta_n)) = \frac{\Delta_n\left(1 + r_n\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x_k/n})} I_Y\left(\frac{x_k}{n}\right)\exp\left(-\Lambda\left(\frac{x_k}{n}\right)n\right), \tag{34}$$

причем при $n \to \infty$

$$\frac{x_k}{n} = \frac{x}{n} + O(n^{-2/3}),\ \Lambda\left(\frac{x_k}{n}\right)n = \Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n + h_{x/n}(k-1)\Delta_n + o(1).$$

Отсюда и из непрерывности функций h_θ, $I_Y(\theta)$, $\sigma(h)$ вытекает соотношение

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\ln Y_n &\in [x_k, x_k + \Delta_n))\\ &= \exp(-h_{x/n}(k-1)\Delta_n)\frac{\Delta_n\left(1 + r_n\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x/n})} I_Y\left(\frac{x}{n}\right)\exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right).\end{aligned} \tag{35}$$

При $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{M}\Delta_n \exp(-h_\theta(k-1)\Delta_n) \to \int_0^\infty e^{-h_\theta y}\,dy = \frac{1}{h_\theta},$$

причем сходимость равномерна по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Отсюда, суммируя соотношения (35) по k, получаем при $x/n \in [\theta_1, \theta_2]$ соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant x) = \frac{\Delta_n\left(1 + r_n\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma(h_{x/n})h_{x/n}} I_Y\left(\frac{x}{n}\right)\exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right),$$

что и требовалось доказать.

(ii) Фиксируем $x > 0$ и положим

$$x_k = \mu n + \sigma x\sqrt{n} + k\Delta_n, \quad M = [(n^{3/5} - \sigma x\sqrt{n})/\Delta_n] + 1.$$

Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\ln Y_n &\geqslant \mu n + x\sigma\sqrt{n})\\ &= \mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant \mu n + x\sigma\sqrt{n} + M\Delta_n) + \sum\nolimits_{k=1}^{M}\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x_{k-1}, x_k)).\end{aligned} \tag{36}$$

Оценим первое слагаемое в (36) с помощью неравенства Маркова:

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \geqslant \mu n + n^{3/5}) \leqslant \mathbf{E}Y_n^h e^{-h\mu n - hn^{3/5}} = \frac{\mathbf{E}Y_n^h}{R(h)^n}\frac{R(h)^n}{\exp\left(h\mu n + hn^{3/5}\right)}, \tag{37}$$

где $h > 0$. Положим $h = n^{-1/2}$ и отметим, что при $n \to \infty$

$$\frac{\mathbf{E}Y_n^h}{R(h)^n} \to I_Y(0)$$

в силу равномерности сходимости в (7). В силу формулы Тейлора

$$n \ln R(h) = hm(0)n + \frac{1}{2}h^2\sigma^2(0)n + o(1), \ n \to \infty.$$

Следовательно, правая часть соотношения (37) эквивалентна при $n \to \infty$ величине

$$I_Y(0) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) e^{-n^{1/10}},$$

а значит, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Оценим величины под знаком суммы в (36). Согласно теореме 3 при рассматриваемых k справедливо представление

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x_k, x_k + \Delta_n)) = \frac{\Delta_n \left(1 + r_n\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x_k/n})} I_Y\left(\frac{x_k}{n}\right) \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x_k}{n}\right)n\right). \qquad (38)$$

Из соотношений (2) и формулы Тейлора следует, что

$$\frac{x_k}{n} = \mu + O(n^{-2/5}), \ \Lambda\left(\frac{x_k}{n}\right)n = \frac{(x_k - \mu n)^2}{2\sigma^2 n} + o(1), \ n \to \infty.$$

В силу непрерывности функций h_θ, $I_Y(\theta)$, $\sigma(h)$ при $k \leqslant M$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Y_n \in [x_k, x_k + \Delta_n)) = \frac{\Delta_n \left(1 + r_n\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi n}\sigma} I_Y(\mu) \exp\left(-\frac{(x_k - \mu n)^2}{2\sigma^2 n}\right), \qquad (39)$$

При $n \to \infty$

$$\frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \sum_{k=1}^{M} \exp\left(-\frac{(x_k - \mu n)^2}{2\sigma^2 n}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x\sigma}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = 1 - \Phi(x).$$

Отсюда, суммируя выражения (39) по k, получаем требуемое утверждение. □

Автор благодарен Михаилу Васильевичу Козлову за ценные обсуждения вопросов, рассматриваемых в работе, и анонимному рецензенту за кропотливую работу, позволившую существенно улучшить текст.

Список литературы

1. Buraczewski D., Damek E., Mikosch T., *Stochastic Models with Power-Law Tails: The Equation $X = AX + B$*, Springer, 2016.
2. Kesten H., “Random difference equations and renewal theory for products of random matrices”, *Acta Math.*, **51**:1 (1973), 207–248.

3. Goldie C., “Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations”, *Ann. Appl. Probab.*, **1**:1 (1991), 126–166.
4. Engle R.F., “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United”, *Econometrica*, **50**:4 (1982), 987–1000.
5. Alsmeyer G., Iksanov A., “A log-type moment result for perpetuities and its application to martingales in supercritical branching random walks”, *Electr. J. Probab.*, **14** (2009), 289–313.
6. Buraczewski D., Damek E., Mikosch T., Zienkiewicz J., “Large deviations for solutions to stochastic recurrence equations under Kesten’s condition”, *Ann. Probab.*, **41** (2013), 2755–2790.
7. Konstantinides D. G., Mikosch T., “Large deviations and ruin probabilities for solutions to stochastic recurrence equations with heavy-tailed innovations”, *Ann. Probab.*, **33**:5 (2005), 1992–2035.
8. A.V. Shklyaev, “Large deviations for solution of random recurrence equation”, *Markov Processes and Related Fields*, **22**:1 (2016), 139–164.
9. Боровков А.А., *Теория вероятностей*, URSS, 2009, 652 с.

Статья поступила 16.05.2019.
Переработанный вариант поступил 10.10.2019.