Доклады Академии наук СССР
1964. Том 159, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. Я. ЛЕВИН, И. Е. ОВЧАРЕНКО

ОПИСАНИЕ ПРОДОЛЖЕНИЙ ЭРМИТОВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 12 VI 1964)

Как известно, эрмитово положительная (э.п.) функция $F(x; y)$, заданная в полосе $-\infty < x < \infty, |y| \leqslant 2a$, всегда может быть продолжена на всю плоскость с сохранением эрмитовой положительности *. Однако вопрос об описании всех э.п. продолжений остается открытым. В ([3]) методами теории операторов решена задача описания э.п. продолжений в случае, когда $F(x; 0)$ почти периодическая функция. Ниже приводится описание всех продолжений в общем случае. По своему характеру наши методы близки к методам работы ([4]). Одновременно получается независимое доказательство возможности продолжения э.п. функции, заданной в полосе.

1. Пусть $F(x; y)$ — непрерывная э.п. функция, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$. Образуем функцию

$$\sigma(\lambda; y) - \sigma(0; y) = \text{l.i.m.}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}-1}{-ix}F(x; y)\,dx^{**}. \tag{1}$$

Лемма. *Функция* $\sigma(\lambda; y) - \sigma(0; y)$ *непрерывна по* y *и эрмитово монотонна по* λ, *т. е.* $\sigma(\lambda''; y) - \sigma(\lambda'; y)$ *э.п. при* $\lambda'' > \lambda'$, $|y| \leqslant 2a$. *Кроме того*, $|\sigma(\lambda''; y) - \sigma(\lambda'; y)| \leqslant \sigma(\lambda'') - \sigma(\lambda')$, *где* $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda; 0)$.

Рассмотрим линейное множество K_{2a} функций вида

$$x(t) = c + \int_{-2a}^{2a} e^{ity}\varphi(y)\,dy, \quad \varphi(y) \in L^1(-2a, 2a).$$

На K_{2a} определим линейный функционал, полагая

$$F_\lambda[x(t)] = c\sigma(\lambda; 0) + \int_{-2a}^{2a}\sigma(\lambda; y)\varphi(y)\,dy.$$

Покажем, что $F_{\lambda''} - F_{\lambda'}$ неотрицателен на K_{2a} при $\lambda'' > \lambda'$. Действительно, пусть $x(t) \geqslant 0$. Тогда функция $x_1(t) = \gamma + x(t)$, $\gamma > 0$ на вещественной оси удовлетворяет неравенству $\inf x_1(t) \geqslant \gamma > 0$. Как показано в статье ([5]), функция $x_1(t)$ представима следующим образом:

$$x_1(t) = \left|\sqrt{\gamma} + \int_{-a}^{a} e^{ity}\psi(y)\,dy\right|^2, \quad \psi(y) \in L^1(-a, a).$$

---

* Этот результат был получен М. С. Лившицем как следствие одной общей теоремы теории операторов. Он входил в докторскую диссертацию М. С. Лившица, защищенную в 1946 г., однако не был опубликован. Независимо этот результат был получен A. Devinatz ([1]) и Г. И. Эскиным ([2]).

** Существование интеграла следует из неравенства $|F(x; y)| \leqslant F(0; 0)$. Функцию $\sigma(\lambda; y)$ нормируем условиями

$$\sigma(\lambda; y) = \frac{\sigma(\lambda+0; y) + \sigma(\lambda-0; y)}{2}, \quad \sigma(-\infty; y) = 0.$$

Из этого представления и леммы следует, что $(F_{\lambda''} - F_{\lambda'})[x_1(t)] \geqslant 0$. Переходя к пределу при $\gamma \downarrow 0$, получаем, что $(F_{\lambda''} - F_{\lambda'})[x(t)] \geqslant 0$, т. е. $\{F_\lambda\}$ — монотонное семейство функционалов. Из монотонности $\{F_\lambda\}$ и равенства $F_\lambda[1] = \sigma(\lambda; 0)$, $-\infty < \lambda < \infty$, следует, что $\{F_\lambda\}$ равномерно ограничены. Продолжим $\{F_\lambda\}$ по непрерывности на пространство B_{2a} — замыкание множества K_{2a} в равномерной метрике *. Так как любая неотрицательная функция из B_{2a} является равномерным пределом неотрицательных функций из K_{2a}, то семейство $\{F_\lambda\}$ после продолжения останется монотонным. Пусть h_n — некоторая последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Рассмотрим разностное отношение

$$\psi_{\lambda h_n}(x) = \frac{F_{\lambda+h_n}(x) - F_\lambda(x)}{\sigma(\lambda + h_n) - \sigma(\lambda)}, \quad \text{если } \sigma(\lambda + h_n) - \sigma(\lambda) \neq 0;$$

$$\psi_{\lambda h_n}(x) = 0, \quad \sigma(\lambda + h_n) - \sigma(\lambda) = 0.$$

Норма функционала $\psi_{\lambda h_n}(x)$ достигается на функции $x(t) \equiv 1$, а так как $\psi_{\lambda h_n}(1)$ либо единица, либо нуль, то $\|\psi_{\lambda h_n}\| \leqslant 1$. Единичная сфера в B^*_{2a} слабо компактна, поэтому из последовательности $\psi_{\lambda h_n}(x)$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\psi_{\lambda h_n'}(x)$. Положим $\psi_\lambda = \lim\limits_{h_n' \to 0} \psi_{\lambda h_n'}$. Функционал ψ_λ положителен и $\|\psi_\lambda\| \leqslant 1$. В силу известной теоремы М. Г. Крейна ([6]), каждый функционал ψ_λ может быть продолжен с сохранением положительности на пространство C^∞. Продолженные функционалы $\widetilde{\psi}_\lambda(x)$ допускают представление

$$\widetilde{\psi}_\lambda(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, d\rho_\lambda(t) + \mu_\lambda x(\infty) \text{ **}.$$

С помощью неубывающих функций $\rho_\lambda(t)$ построим функции $\psi(\lambda; y)$, полагая

$$\psi(\lambda; y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, d\rho_\lambda(t).$$

Очевидно, что $\psi(\lambda; y) = \lim\limits_{h \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^{y+h} e^{its}\, ds\right) d\rho(\lambda; t)$, и так как подынтегральная функция принадлежит K_{2a}, то $\psi(\lambda; y)$ не зависит от выбора продолжения функционалов. Из дальнейшего будет следовать, что функции $\psi(\lambda; y)$ однозначно определяются э.п. функцией $F(x; y)$.

Функции $\psi(\lambda; y)$ будем называть **каналовыми** функциями э.п. функции $F(x; y)$. Так как $\rho_\lambda(t)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, то $\psi(\lambda; y)$ — непрерывные э.п. функции от y.

Покажем, как находятся каналовые функции и как через них выражается $F(x; y)$. Обозначим при $k > 0$

$$\sigma^k(\lambda; y) = \frac{1}{k} \int\limits_0^k \sigma(\lambda; y + t)\, dt.$$

Неравенство $|\sigma^k(\lambda + h; y) - \sigma^k(\lambda; y)| \leqslant \sigma(\lambda + h; 0) - \sigma(\lambda; 0)$, $h > 0$, показывает, что функция $\sigma^k(\lambda; y)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda; 0)$. Поэтому почти всюду относительно меры $\sigma(\lambda)$

* Элементы пространства B_{2a} — целые функции степени $\leqslant 2a$, имеющие предел на ∞.

** Можно показать, что σ-почти всюду $\mu_\lambda = 0$.

существует $\varphi_k(\lambda; y) = \partial\sigma^k(\lambda; y)/\partial\sigma(\lambda)$ и $\sigma^k(\lambda; y) = \int_0^\lambda \varphi_k(\lambda; y)\, d\sigma(\lambda) + \sigma^k(0; y)$. Обозначив $\psi^k(\lambda; y) = \frac{1}{k}\int_0^k \psi(\lambda; y+t)\, dt$, убеждаемся, что $\psi^k(\lambda; y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\frac{e^{ikt}-1}{kt}\, d\rho_\lambda(t) = \psi_\lambda\left[e^{ity}\frac{e^{ikt}-1}{kt}\right]$. Так как $e^{ity}\frac{e^{ikt}-1}{kt} \in K_{2a}$, то, полагая $x(t) = e^{ity}\frac{e^{ikt}-1}{kt}$, находим, что при фиксированном y

$$\psi^k(\lambda; y) = \lim_{h_n'\to 0}\frac{F_{\lambda+h_n}(x) - F_\lambda(x)}{\sigma(\lambda+h_n)-\sigma(\lambda)} = \lim_{h_n'\to 0}\frac{\sigma^k(\lambda+h_n; y) - \sigma^k(\lambda; y)}{\sigma(\lambda+h_n)-\sigma(\lambda)} = \frac{\partial\sigma^k(\lambda; y)}{\partial\sigma(\lambda)} =$$

$= \varphi_k(\lambda; \varphi)$ для σ-почти всех значений λ. Отсюда $\sigma^k(\lambda; y) - \sigma^k(0; y) = \int_0^\lambda \psi^k(\lambda; y)\, d\sigma(\lambda)$. Так как функции $\sigma^k(\lambda; y) - \sigma^k(0; y)$ и $\psi^k(\lambda; y)$ непрерывны по y ($|y| \leqslant 2a$), то при $k \to 0$ будем иметь $\sigma^k(\lambda; y) - \sigma^k(0; y) \to \sigma(\lambda; y) - \sigma(0; y)$ и $\psi^k(\lambda; y) \to \psi(\lambda; y)$. Кроме того, $|\psi^k(\lambda; y)| \leqslant 1$. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем

$$\sigma(\lambda; y) - \sigma(0; y) = \int_0^\lambda \psi(t; y)\, d\sigma(t). \tag{2}$$

Равенство (2) показывает, что при фиксированном y σ-почти всюду $\psi(\lambda; y) = \partial\sigma(\lambda; y)/\partial\sigma(\lambda)$, т. е. каналовые функции в существенном однозначно определяются э.п. функцией $F(x; y)$. Так как $\psi(\lambda; y)$ — непрерывная функция от y, то последнее равенство может быть использовано для вычисления каналовых функций. Подставляя (2) в (1) и обращая затем равенство (1), получаем:

Теорема 1. *Пусть $F(x; y)$ — непрерывная э.п. функция, определенная в полосе $-\infty < x < \infty$; $|y| \leqslant 2a$; $\sigma(\lambda)$ — мера, задающая представление функции $F(x; 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda)$. Пусть $\psi(\lambda; y)$ — каналовые функции э.п. функции $F(x; y)$. Тогда функция $F(x; y)$ имеет представление*

$$F(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\psi(\lambda; y)\, d\sigma(\lambda), \quad -\infty < x < \infty, \quad |y| \leqslant 2a. \tag{3}$$

Наоборот, если $\sigma(\lambda)$ — ограниченная монотонная функция на $(-\infty, \infty)$, а $\psi(\lambda; y)$ — э.п. непрерывная по y ($|y| \leqslant 2a$) при любом фиксированном λ, измеримая при любом y относительно $\sigma(\lambda)$ и σ-почти всюду $\psi(\lambda; 0) = 1$, то $F(x; y)$ в представлении (3) есть непрерывная э.п. функция в полосе $|y| \leqslant 2a$, $\psi(\lambda; y)$ — ее каналовые функции.

Таким образом, продолжение э.п. функции $F(x; y)$ с полосы $|y| \leqslant 2a$ на всю плоскость с сохранением э.п. эквивалентно одновременному продолжению каналовых функций $\psi(\lambda; y)$ так, чтобы продолжение э.п. функции $\tilde{\psi}(\lambda; y)$ образовывали при фиксированном $|y|$ σ-измеримую функцию от λ. Такие продолжения мы назовем допустимыми.

2. Опишем все допустимые продолжения. Не нарушая общности, можно считать, что за исключением, быть может, множества σ-меры нуль все функции $\psi(\lambda; y)$ продолжаются неоднозначно *. В этом случае продолжения описываются хорошо известным образом ([7]). С помощью функции

* В противном случае можно взять произведение $e^{-\varepsilon|y|}\psi(\lambda; y)$ и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

$\psi(\lambda; y)$ вводится форма $(f, g)_\lambda = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} \psi(\lambda; t-s) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds$. При фиксированных функциях f и g форма $(f, g)_\lambda$ σ-измерима, так как функции $\psi(\lambda; y) = \partial\sigma(\lambda; y)/\partial\sigma(\lambda)$ σ-измеримы. По форме $(f, g)_\lambda$ строятся четыре специальные целые функции $P_1(z; \lambda)$, $P_2(z; \lambda)$, $Q_1(z; \lambda)$, $Q_2(z; \lambda)$ конечной степени $\leqslant 2a$. Из способа построения этих функций следует, что они σ-измеримы по λ. Образуем функцию

$$R(z; \lambda) = \frac{P_1(z; \lambda) + \tau(z; \lambda) Q_1(z; \lambda)}{P_2(z; \lambda) + \tau(z; \lambda) Q_2(z; \lambda)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t; \lambda)}{t-z},$$

где функция $\tau(z; \lambda)$—R-функция по z* и σ-измерима по λ. Из формулы обращения Стильтьеса вытекает, что $\rho(t; \lambda)$ — неубывающая функция ограниченной вариации по t и σ-измерима по λ. Из последнего непосредственно следует, что функции $\tilde{\psi}(\lambda; y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ity} d\rho(t; \lambda)$ — э.п. продолжения каналовых функций, причем $\tilde{\psi}(\lambda; y_0)$ — σ-измерима по λ при любом y_0.

Изложенным выше способом могут быть получены все э.п. продолжения $F(x; y)$. В самом деле, допустимое продолжение $\tilde{\psi}(\lambda; y)$ каналовых функций имеет вид

$$\tilde{\psi}(\lambda; y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ity} d\rho(t; \lambda).$$

Из формулы обращения получается σ-измеримость по λ функции $\rho(t; \lambda)$. Из равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t; \lambda)}{t-z} = \frac{P_1(z; \lambda) + \tau(z; \lambda) Q_1(z; \lambda)}{P_2(z; \lambda) + \tau(z; \lambda) Q_2(z; \lambda)},$$

где $\tau(z; \lambda)$ есть R-функция по z при σ-почти всех λ легко следует σ-измеримость по λ функции $\tau(z; \lambda)$.

3. Пусть $\tilde{\psi}'(\lambda; y)$, $\tilde{\psi}''(\lambda; y)$ — допустимые продолжения каналовых функций $\psi(\lambda; y)$ э.п. функции $F(x; y)$. Будем называть их существенно различными, если хотя бы при одном y_0 функции $\tilde{\psi}'(\lambda; y_0)$ и $\tilde{\psi}''(\lambda; y_0)$ различны на множестве положительной σ-меры.

Теорема 2. *Для того чтобы э.п. функция $F(x; y)$, $-\infty < x < \infty$ $|y| \leqslant 2a$, имела более одного э.п. продолжения, необходимо и достаточно, чтобы ее каналовые функции допускали существенно различные допустимые продолжения.*

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность М. Г. Крейну за внимание и интерес к работе.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Одесский инженерно-строительный институт

Поступило
15 III 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 A. Devinatz, Acta Math., **102**, 1—2, 109 (1959). [2] Г. И. Эскин, ДАН, **133**, № 3, 540 (1960). [3] И. Е. Овчаренко, Докл. АН АрмССР, **38**, в. 5, 257 (1964). [4] М. Г. Крейн, Уч. зап. Куйбышевск. пед. инст., **7**, 123 (1943). [5] Б. Я. Левин, ДАН, **52**, № 4, 291 (1946); Распределение корней целых функций, 1956, стр. 566. [6] Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938. [7] М. Г. Крейн, ДАН, **26**, № 1, 17 (1940).

* То есть функция, голоморфная внутри полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и отображающая ее в себя.