Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Е. И. Хухро, О нильпотентных подпрямых произведениях,
Сиб. матем. журн., 1982, том 23, номер 6, 178–180

https://www.mathnet.ru/smj6667

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
20 января 2026 г., 22:39:02

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beardon A. F.* Fundamental domains for Kleinian groups.— In: Discontinuous groups and Riemann surfaces.— Princeton, 1974, p. 31.
2. *Апанасов Б. Н.* Геометрически конечные группы преобразований пространства.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 6, с. 16—27.
3. *Beardon A. F., Maskit B.* Limit points of Kleinian groups and finite-sided fundamental polyhedra.— Acta Math., 1974, v. 132, N 1—2, p. 1—12.
4. *Greenberg L.* Finiteness theorems for Fuchsian and Kleinian groups.— In: Discrete groups and automorphic functions. London, New York. Academic Press, 1977, p. 199—258.

УДК 519.45

Е. И. ХУХРО

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Если группа G и ее нормальная подгруппа N обе являются подпрямыми произведениями одних и тех же групп, $G_1, G_2, \ldots, G_m$, то фактор-группа G/N нильпотентна (см., например, [1, предложение 4.7]). В самом деле, если N_i — ядра проекций G на G_i, то для каждого i имеем $G = N \cdot N_i$, откуда $\gamma_m(G) = [N \cdot N_1, N \cdot N_2, \ldots, N \cdot N_m] \leqslant N \cdot [N_1, N_2, \ldots, N_m] \leqslant \leqslant N \cdot \left(\bigcap_i N_i\right) = N$.

Ю. М. Горчаковым в «Коуровской тетради» был поставлен вопрос: верно ли, что в этой ситуации ступень нильпотентности группы G/N растет с ростом m [2, вопрос 7.8]? Настоящая работа посвящена положительному решению этого вопроса.

Сначала мы рассмотрим свободную n-ступенно нильпотентную $2n$-порожденную алгебру Ли L над полем из p элементов для простого числа p, большего n. В этой алгебре будет указан идеал I и такое множество идеалов $\{I_\alpha\}$, что $\gamma_n(L)$ не содержится в идеале $I + \bigcap_\alpha I_\alpha$ и $L = I + I_\alpha$ для каждого α. Далее мы воспользуемся тем, что по формуле Кэмпбелла-Хаусдорфа каждую n-ступенно нильпотентную алгебру Ли в характеристике p при $p > n$ можно превратить в n-ступенно нильпотентную группу периода p. Новые операции определяются на том же множестве и вербально выражаются через старые. Такое соответствие задает категорный изоморфизм категории всех n-ступенно нильпотентных алгебр Ли характеристики p и всех n-ступенно нильпотентных групп периода p (см., например, [3]).

В частности, если алгебре L соответствует группа P, то идеалам I и I_α соответствуют нормальные подгруппы N и N_α, для которых также будем иметь: $\gamma_n(P)$ не содержится в подгруппе $N \cdot \left(\bigcap_\alpha N_\alpha\right)$ и $P = N \cdot N_\alpha$ для каждого α.

Группа $P \Big/ \bigcap_\alpha N_\alpha$ так же, как и образ подгруппы N, будет подпрямым произведением групп P/N_α, причем фактор-группа $\left(P \Big/ \bigcap_\alpha N_\alpha\right) \Big/ \left(N \cdot \left(\bigcap_\alpha N_\alpha\right) \Big/ \bigcap_\alpha N_\alpha\right)$ будет ровно n — ступенно нильпотентна.

Стоит заметить, что такое построение — с помощью алгебры Ли — немногим проще вычислений в свободной нильпотентной группе. Однако его изложение показалось нам наиболее коротким (в частности, множество $\{N_\alpha\}$ оказывается конечным автоматически — в силу конечности группы P).

Итак, займемся построением идеалов I и I_α. Пусть алгебра L свободно порождается элементами $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Положим I равным идеалу, порожденному элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если в алгебре L выбрать базу из коммутаторов от x_i, то те коммутаторы из нее, в записи которых участвует хотя бы один из символов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будут составлять базу идеала I. Идеалы I_α определим как порожденные элементами $\overset{\alpha}{x}_{n+1}, \overset{\alpha}{x}_{n+2}, \ldots, \overset{\alpha}{x}_{2n}$ для всевозможных систем векторов $\overset{\alpha}{x}_{n+1}, \ldots, \overset{\alpha}{x}_{2n}$, дополняющих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до базы подпространства, натянутого на все x_i. Ясно, что $L = I + I_\alpha$ для любого α.

Будем обозначать простой коммутатор $[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}]\ldots x_{i_n}]$ через $[x_{i_1}\ldots x_{i_n}]$. Если все индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ различны, то коммутатор $[x_{i_1}\ldots x_{i_n}]$ будем называть *неповторяющимся*. Всюду далее над *y-базой* алгебры L мы будем понимать базу, состоящую из простых коммутаторов от элементов $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, порождающих L. Индексы от 1 до n будем называть *младшими*, а от $n+1$ до $2n$ — *старшими*.

Теперь для любой *x-базы* докажем, что если элемент $a = \sum \alpha_{i_1,\ldots i_n}[x_{i_1}\ldots x_{i_n}]$, где суммирование ведется по этой базе, лежит в $\gamma_n(L) \cap \left(\bigcap_\alpha I_\alpha\right)$, то $\alpha_{j_1\ldots j_n} = 0$ для любого неповторяющегося коммутатора $[x_{j_1}\ldots x_{j_n}]$.

Воспользуемся индукцией по количеству старших индексов, входящих в запись коммутатора. Если все индексы младшие, то утверждение очевидно, так как a лежит в идеале, порожденном элементами $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$.

Пусть теперь $[x_{j_1}\ldots x_{j_n}]$ — один из неповторяющихся коммутаторов, в который входит k старших индексов, $k \geqslant 1$. Пусть j_s — один из них. Обозначим через j_0 любой из младших индексов, не входящих в $\{j_1, \ldots, j_n\}$. Можно выбрать новую базу алгебры L так, чтобы в нее входил неповторяющийся коммутатор $[x_{j_1}\ldots x_{j_{s-1}}x_{j_0}x_{j_{s+1}}\ldots x_{j_n}]$ и все элементы старой базы, в которых не менее k старших индексов.
Легко понять, что при разложении элемента a по этой новой x-базе коэффициенты при всех коммутаторах, где не менее k старших индексов, будут те же, что и ранее. Поэтому можно с самого начала считать, что коммутатор $[x_{j_1}\ldots x_{j_{s-1}}x_{j_0}x_{j_{s+1}}\ldots x_{j_n}]$ входит в нашу x-базу.

Положим теперь $x_i' = \begin{cases} x_i & \text{при } i \neq j_s, \\ x_{j_s} + x_{j_0} & \text{при } i = j_s. \end{cases}$

Если в каждом коммутаторе x-базы x_i всюду заменить на x_i', то получится x'-база алгебры L. Разложим a по этой базе: $a = \sum \beta_{i_1\ldots i_n}[x_{i_1}\ldots x_{i_n}]$.

Ясно, что из всех элементов x'-базы только элемент $[x_{j_1}'\ldots x_{j_n}'] = [x_{j_1}\ldots x_{j_n}] + [x_{j_1}\ldots x_{j_{s-1}}x_{j_0}x_{j_{s+1}}\ldots x_{j_n}]$ имеет ненулевой коэффициент при $[x_{j_1}\ldots x_{j_n}]$ при разложении по x-базе. Применим предположение индукции к x'-базе и элементу a — это возможно, так как множество идеалов, построенное относительно порождающих x_i' так же, как $\{I_\alpha\}$ построено относительно x_i, совпадает с $\{I_\alpha\}$. Получим, что коэффициент при коммутаторе $[x_{j_1}'\ldots x_{j_{s-1}}'x_{j_0}'x_{j_{s+1}}'\ldots x_{j_n}']$ равен 0. Ясно, также, что кроме двух рассмотренных элементов x'-базы остальные имеют нулевую координату при $[x_{j_1}\ldots x_{j_{s-1}}x_{j_0}x_{j_{s+1}}\ldots x_{j_n}]$ при разложении по x-базе. Но по предположению индукции имеем, что $\alpha_{j_1\ldots j_{s-1}j_0j_{s+1}\ldots j_n} = 0$. Поэтому $\beta_{j_1\ldots j_n} = 0$, а значит, и $\alpha_{j_1\ldots j_n} = 0$. Утверждение доказано.

В частности, мы получили, что $[x_{n+1}\ldots x_{2n}]\notin \bigcap_\alpha I_\alpha$. Остается доказать, что $[x_{n+1}\ldots x_{2n}]\notin I+\bigcap_\alpha I_\alpha$.

Если предположить противное, то в $\bigcap_\alpha I_\alpha$ будет лежать сумма $[x_{n+1}\ldots x_{2n}]+l_{n+1}+\ldots+l_{2n}=b$ в которой через l_j обозначены суммы простых коммутаторов, в записи которых нет символа x_j. Заметим теперь, что для каждого $j\geqslant n+1$ отображение

$$\varphi_j: x_i\to\begin{cases}x_i & \text{при } i\neq j,\\ -x_j & \text{при } i=j\end{cases}$$

продолжается до автоморфизма алгебры L, переставляющего идеалы I_α. Поэтому их пересечение φ_j-инвариантно. Имеем:

$$b'=b-b\varphi_{n+1}=2[x_{n+1}\ldots x_{2n}]+l'_{n+2}+\ldots+l'_{2n}\in\bigcap_\alpha I_\alpha;$$

$$b''=b'-b'\varphi_{n+2}=4[x_{n+1}\ldots x_{2n}]+l''_{n+3}+\ldots+l''_{2n}\in\bigcap_\alpha I_\alpha$$

и т. д., в результате получим, что $2^n[x_{n+1}\ldots x_{2n}]\in\bigcap_\alpha I_\alpha$ — противоречие с доказанным утверждением.

Итак, мы показали, что $\gamma_n(L)$ не содержится в идеале $I+\bigcap_\alpha I_\alpha$. Тем самым построение требуемых примеров закончено.

Новосибирск,
Институт математики СО АН СССР

Статья поступила
25 мая 1981 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.
2. *Коуровская тетрадь:* Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1980.
3. *Lazard M.* Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie.— Ann. Sci. Ecole Norm. Supr. (3), 1954, t. 71, p. 101—190.