М. Л. Расулов, Асимптотическое представление фундаментальной матрицы решений одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя параметрами,
Дифференц. уравнения, 1983, том 19, номер 2, 229–253

https://www.mathnet.ru/de4767

Литература

1. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.— Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 3, с. 436—445.
2. Понтрягин Л. С.—Труды МИАН, 1971, т. 112, с. 30—63.
3. Pontryagin L. On the evasion process in differential games.— Appl. Math. and Optim., 1974, vol. 1, N 1, p. 5—19.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.
5. Мищенко Е. Ф., Сатимов Н.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 10, с. 1792—1797.
6. Gamkrelidze R. V., Kharatishvili G. L. A differential game of evasion with nonlinear control.— SIAM J. Control, 1974, vol. 12, N 2, p. 332—349.
7. Никольский М. С.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5, с. 1024—1027.
8. Никольский М. С.— Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 3, с. 539—542.
9. Сатимов Н.— Мат. сб., 1976, т. 99 (141), № 3, с. 380—393.
10. Сатимов Н.— Мат. сб., 1977, т. 103 (145), № 3, с. 430—444.
11. Пшеничный Б. Н.— Кибернетика, 1975, № 4, с. 120—127.
12. Чикрий А. А.— Кибернетика, 1976, № 3, с. 96—99.
13. Остапенко В. В.— Кибернетика, 1978, № 4, с. 106—112.
14. Гусятников П. Б., Ледяев Ю. С.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 9, с. 1566—1575.
15. Мищенко Е. Ф., Никольский М. С., Сатимов Н.— Труды МИАН, 1977, т. 143, с. 105—128.
16. Гусятников П. Б.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 3, с. 446—455.
17. Сатимов Н., Рихсиев Б. Б.— Дифференц. уравнения, 1978, № 6, с. 1046—1052.
18. Азимов А. Я.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 10, с. 1723—1731.
19. Мезенцев А. В.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5, с. 1021—1023.
20. Сатимов Н., Рихсиев Б. Б.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 3, с. 436—443.
21. Мищенко Е. Ф., Никольский М. С., Сатимов Н.— Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization, 1980, vol. 11, N 4, p. 579—591.

Институт математики им. В. А. Стеклова

Поступила в редакцию 10 июня 1981 г.

УДК 517.928

М. Л. РАСУЛОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

В связи с решением смешанных задач динамической теории круговых цилиндрических оболочек настоящая работа посвящена изучению асимптотического представления фундаментальной матрицы решений соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от двух параметров, первый из которых является комплексным, а второй целочисленным.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРИВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Известно, что система динамической теории круговых цилиндрических оболочек имеет вид (см. [1, с. 97])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + P_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + Q_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha} - a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + P_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + Q_2 \frac{\partial w}{\partial \beta} - a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \qquad (1.1)$$

$$\Delta^2 w + P_3 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + Q_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} -$$

$$- a_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + dw + b_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$, P_k, Q_k $(k = 1, 2, 3)$, $-a_k$ $(k = 1, 2)$, a_3, $-b_k$ $(k = 1, 2)$, b_3, d — положительные постоянные, выражаемые через физические константы.

Далее, известно, что в существующей обширной математической литературе фундаментальные исследования систем дифференциальных уравнений с частными производными в основном относятся к системам, охватываемым типовыми классификациями. Что касается системы (1), она не принадлежит ни одному типу упомянутой классификации, более того, соответствующие спектральные задачи оказываются несамосопряженными, что исключает возможность применения к решению смешанных задач для нее метода Фурье. В связи с этим обстоятельством естественно возникает необходимость изучения для системы (1.1) смешанных задач, к решению которых из точных методов может быть успешно применен вычетный метод [2]. Для обоснования вычетного метода прежде всего надо изучать соответствующую спектральную задачу: а) асимптотическое представление фундаментальной матрицы, б) асимптотическое представление матрицы Грина спектральной задачи вне некоторой δ-окрестности спектра (собственных значений) и асимптотическое представление самих собственных значений.

В настоящей работе изучается первая из этих задач для системы

$$\begin{gathered}
\frac{d^2 \tilde{u}_s}{d\alpha^2} + isP_1 \frac{d\tilde{v}_s}{d\alpha} + Q_1 \frac{d\tilde{w}_s}{d\alpha} + (a_1 s^2 + b_1 s^4 \lambda^2) \tilde{u}_s = 0, \\
\frac{d^2 \tilde{v}_s}{d\alpha^2} + isP_2 \frac{d\tilde{u}_s}{d\alpha} + isQ_2 \tilde{w}_s + (a_2 s^2 + b_2 s^4 \lambda^2) \tilde{v}_s = 0, \\
\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - s^2\right)^2 \tilde{w}_s + P_3 \frac{d\tilde{u}_s}{d\alpha} + Q_3 \frac{d^2 \tilde{w}_s}{d\alpha^2} + \\
+ isc^{-2} \tilde{v}_s + (d + a_3 s^2 + b_3 s^4 \lambda^2) \tilde{w} s = 0,
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где s — целочисленный, а λ — комплексный параметры.

С целью упрощения дальнейших вычислений сделаем замену

$$x = s\alpha \tag{1.3}$$

независимого переменного α. После этого, сокращая первое и второе из полученных уравнений на s^2, а третье на s^4, придем к системе

$$\begin{gathered}
\frac{d^2 \tilde{u}_s}{dx^2} + iP_1 s^{-1} \frac{d\tilde{v}_s}{dx} + Q_1 s^{-1} \frac{d\tilde{w}_s}{dx} + (a_1 + b_1 s^2 \lambda^2) \tilde{u}_s = 0, \\
\frac{d^2 \tilde{v}_s}{dx^2} + iP_2 s^{-1} \frac{d\tilde{u}_s}{dx} + iQ_2 s^{-1} \tilde{w}_s + (a_2 + b_2 s^2 \lambda^2) \tilde{v}_s = 0, \\
\frac{d^4 \tilde{w}_s}{dx^4} + (Q_3 s^{-2} - 2) \frac{d^2 \tilde{w}_s}{dx^2} + P_3 s^{-3} \frac{d\tilde{u}_s}{dx} + \\
+ ic^{-2} s^{-3} \tilde{v}_s + (1 + a_3 s^{-2} + b_3 \lambda^2 + ds^{-4}) \tilde{w}_s = 0.
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Для простоты записи положим

$$\rho = s\lambda \tag{1.5}$$

и систему (1.4) приведем к системе первого порядка с помощью замены

$$\tilde{u}_s = y_1,\ \rho^{-1}\frac{d\tilde{u}_s}{dx} = y_2,\ \tilde{v}_s = y_3,\ \rho^{-1}\frac{d\tilde{v}_s}{dx} = y_4,$$
$$\tilde{w}_s = y_5,\ \rho^{-1}\frac{d\tilde{w}_s}{dx} = y_6,\ \rho^{-2}\frac{d^2\tilde{w}_s}{dx^2} = y_7,\ \rho^{-3}\frac{d^3\tilde{w}_s}{dx^3} = y_8. \tag{1.6}$$

После такой замены (1.4) приводится к нормальной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_1}{dx} - \rho y_2 = 0,\quad \frac{dy_2}{dx} + iP_1 s^{-1} y_4 + Q_1 s^{-1} y_6 + (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\, y_1 = 0,$$
$$\frac{dy_3}{dx} - \rho y_4 = 0,\quad \frac{dy_4}{dx} + iP_2 s^{-1} y_2 + iQ_2 s^{-1}\rho^{-1} y_5 + (a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\, y_3 = 0,$$
$$\frac{dy_5}{dx} - \rho y_6 = 0,\quad \frac{dy_6}{dx} - \rho y_7 = 0,\quad \frac{dy_7}{dx} - \rho y_8 = 0, \tag{1.7}$$
$$\frac{dy_8}{dx} + P_3 s^{-3}\rho^{-2} y_2 + ic^{-2}s^{-3}\rho^{-3} y_3 + (\rho^{-3} + a_3 s^{-2}\rho^{-3} +$$
$$+ ds^{-4}\rho^{-3} + b_3\rho^{-1}s^{-2})\, y_5 + (Q_3 s^{-2}\rho^{-1} - 2\rho^{-1})\, y_7 = 0.$$

Обозначим матрицу этой системы

$$M(\rho,\ s) = \|M_{ik}\|_1^8, \tag{1.8}$$

где $M_{1k} = 0$ при $k = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8$; $M_{12} = -\rho$, $M_{21} = a_1\rho^{-1} + b_1\rho$, $M_{24} = iP_1 s^{-1}$, $M_{26} = Q_1 s^{-1}$, $M_{2k} = 0$ при $k = 2, 3, 5, 7, 8$; $M_{3k} = 0$ при $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$; $M_{34} = -\rho$, $M_{4k} = 0$ при $k = 1, 4, 6, 7, 8$; $M_{42} = iP_2 s^{-1}$, $M_{43} = a_2\rho^{-1} + b_2\rho$, $M_{45} = Q_2 s^{-1}\rho^{-1}$, $M_{5k} = 0$ при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8$; $M_{56} = -\rho$, $M_{6k} = 0$ при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$; $M_{67} = -\rho$, $M_{7k} = 0$ при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; $M_{78} = -\rho$, $M_{8k} = 0$ при $k = 1, 4, 6, 8$; $M_{82} = P_3 s^{-3}\rho^{-2}$, $M_{83} = ic^{-2}s^{-3}\rho^{-3}$, $M_{85} = \rho^{-3} + a_3 s^{-2}\rho^{-3} + b_3 s^{-2}\rho^{-1} + ds^{-4}\rho^{-3}$,

$$M_{87} = Q_3 s^{-2}\rho^{-1} - 2\rho^{-1}. \tag{1.9}$$

Пусть

$$y = \mathrm{colon}\,[y_1,\ \ldots,\ y_8] \tag{1.10}$$

обозначает столбец неизвестных функций y_k $(k = \overline{1,\ 8})$ системы (1.7). Тогда, очевидно, в обозначениях (1.9), (1.10) систему (1.7) можно записать в матричном виде

$$\frac{dy}{dx} + M(\rho,\ s)\, y = 0. \tag{1.11}$$

Матрица $M(\rho,\ s)$ разлагается по степеням параметра ρ в сумму вида $M(\rho,\ s) = M_1\rho + M_0(s) + M_{-1}(s)\rho^{-1} + M_{-2}(s)\rho^{-2} + M_{-3}(s)\rho^{-3}$, где, как легко видеть из (1.9), матрица M_1 имеет лишь следующие отличные от 0 элементы: $M_{k,k+1}^{(1)} = -1$, $k = 1, 3, 5, 6, 7$; $M_{21}^{(1)} = b_1$, $M_{43}^{(1)} = b_2$. По известной теореме Я. Д. Тамаркина (см. [3] или [2]), если все θ-корни характеристического уравнения (в смысле Биркгофа [5])

$$\det(\theta e + M_1) = 0 \tag{1.12}$$

различны, существует фундаментальная матрица решений $y^{(k)}$ системы (1.11), допускающих асимптотические представления

$$y^{(k)'}(x,\ \rho,\ s)=\exp(\rho\theta^{(k)}x)\left\{\eta^{(k)}+\frac{E^{(k)}(\rho,\ s)}{\rho}\right\}\quad (k=\overline{1,\ 8}) \tag{1.13}$$

в той части ρ-плоскости, в которой при подходящей нумерации корней $\theta^{(k)}$ характеристического уравнения (1.12) выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}\rho\theta^{(1)}\leqslant\operatorname{Re}\rho\theta^{(2)}\leqslant\ldots\leqslant\operatorname{Re}\rho\theta^{(8)}, \tag{1.14}$$

где e — единичная матрица восьмого порядка, $y^{(k)}$, $\eta^{(k)}$, $E^{(k)}(\rho,\ s)$ — столбцы соответствующей высоты, причем $E^{(k)}(\rho,\ s)$ ограничены при больших ρ для каждого фиксированного номера s (в той части ρ-плоскости, где выполняются неравенства (1.14)).

Нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что $\det(\theta e+ M_1)=\theta^4(\theta^2+b_1)(\theta^2+b_2)$. Из последнего равенства видно, что $\theta=0$ является четырехкратным корнем характеристического уравнения (1.12), и, следовательно, основное условие теоремы Тамаркина о простоте корней характеристического уравнения (1.12) не выполняется (см. [3, 4] или [2]). В связи с этим задача об асимптотическом представлении фундаментальной матрицы решений системы (1.11) остается нерешенной. Для обоснования вычетного метода решения смешанных задач для системы (1.1) оказывается необходимым ее решение даже в более широком плане. А именно надо изучать асимптотику по ρ не только при каждом фиксированном значении s, более того, необходимо исследовать и поведение асимптотики по параметру ρ при больших целочисленных значениях s, чем и займемся ниже.

Очевидно, если θ — простой корень характеристического уравнения

$$D(\theta)\equiv\det(\theta e+M(\rho,\ s))=0, \tag{1.15}$$

то столбец

$$y^{(k)}(x)=\frac{\exp(\theta x)}{D'(\theta)}\operatorname{colon}[D_{k1}(\theta),\ \ldots,\ D_{k8}(\theta)\quad (k=\overline{1,\ 8}), \tag{1.16}$$

является решением системы (1.11), где $D_{kj}(\theta)$ — алгебраическое дополнение элемента $(k,\ j)$ в определителе $D(\theta)$. Это обстоятельство намекает на мысль о том, что с помощью приближенного решения характеристического уравнения (1.15) при больших значениях ρ можно построить приближенные решения системы (1.11), которые окажутся главными частями решений при больших значениях параметра ρ.

§ 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Теперь займемся приближенным решением характеристического уравнения (1.15). С целью сокращения вычислений целесообразно характеристическое уравнение (1.15) заменить эквивалентным ему уравнением

$$D_1(\theta_1)=\rho^{-8}D(\theta)=\rho^{-8}D(\rho\theta_1)=0 \tag{2.1}$$

при $\rho\neq0$. Непосредственным вычислением определителя $D(\theta)$ убеждаемся в том, что

$$D_1(\theta_1)\equiv\theta_1^8+p^{(1)}(\rho,\ s)\theta_1^6+p^{(2)}(\rho,\ s)\theta_1^4+p^{(3)}(\rho,\ s)\theta_1^2+p^{(4)}(\rho,\ s), \tag{2.2}$$

где

$$p^{(1)}(\rho,\ s)\equiv p_{00}^{(1)}+p_{20}^{(1)}\rho^{-2}+p_{22}^{(1)}\rho^{-2}s^{-2},$$

$$p^{(2)}(\rho,\ s)\equiv p_{00}^{(2)}+p_{20}^{(2)}\rho^{-2}+p_{40}^{(2)}\rho^{-4}+p_{22}^{(2)}\rho^{-2}s^{-2}+$$
$$+p_{42}^{(2)}\rho^{-4}s^{-2}+p_{44}^{(2)}\rho^{-4}s^{-4}, \tag{2.3}$$

$$p^{(3)}(\rho,\ s)\equiv p_{20}^{(3)}\rho^{-2}+p_{40}^{(3)}\rho^{-4}+p_{22}^{(3)}\rho^{-2}s^{-2}+p_{60}^{(3)}\rho^{-6}+p_{42}^{(3)}\rho^{-4}s^{-2}+$$

$$+ p_{44}^{(3)}\rho^{-4}s^{-4} + p_{62}^{(3)}\rho^{-6}s^{-2} + p_{64}^{(3)}\rho^{-6}s^{-4} +$$

$$+ p_{65}^{(3)}\rho^{-6}s^{-5} + p_{66}^{(3)}\rho^{-6}s^{-6} + p_{95}^{(3)}\rho^{-9}s^{-5},$$

$$p^{(4)}(\rho,\ s) \equiv p_{40}^{(4)}\rho^{-4} + p_{60}^{(4)}\rho^{-6} + p_{42}^{(4)}\rho^{-4}s^{-2} + p_{80}^{(4)}\rho^{-8} +$$

$$+ p_{62}^{(4)}\rho^{-6}s^{-2} + p_{44}^{(4)}\rho^{-4}s^{-4} + p_{64}^{(4)}p^{-6}s^{-4} +$$

$$+ p_{82}^{(4)}\rho^{-8}s^{-2} + p_{84}^{(4)}\rho^{-8}s^{-4} + p_{142}^{(4)}\rho^{-14}s^{-2},$$

$$p_{00}^{(1)} = b_1 + b_2,\ p_{20}^{(1)} = a_1 + a_2 - 2,\ p_{22}^{(1)} = P_1P_2 + Q_3,$$

$$p_{00}^{(2)} = b_1b_2,\ p_{20}^{(2)} = a_1b_2 + a_2b_1 - 2(b_1 + b_2),$$

$$p_{40}^{(2)} = a_1a_2 + 1 - 2(a_1 + a_2),\quad p_{22}^{(2)} = (b_1 + b_2)Q_3 + b_3,$$

$$p_{42}^{(2)} = (a_1 + a_2 + 1)Q_3 - 2P_1P_2,\ p_{44}^{(2)} = P_1P_2Q_3 + d - P_3Q_1,$$

$$p_{20}^{(3)} = -2b_1b_2,\ p_{40}^{(3)} = b_2 - 2(a_1b_2 + a_2b_1),$$

$$p_{22}^{(3)} = b_2b_3 + b_1b_2Q_3,\ p_{60}^{(3)} = a_1 + a_2 - 2a_1a_2,$$

$$p_{44}^{(3)} = b_2d - P_1P_2b_3 - b_2Q_1P_3,\ p_{62}^{(3)} = a_2a_3 - P_1P_2 + a_1a_2Q_3 + a_1a_3,$$

$$p_{64}^{(3)} = (a_1 + a_2)d + Q_2c^{-2} - P_1P_2a_3 - a_2Q_1P_3, \tag{2.4}$$

$$p_{65}^{(3)} = -P_2Q_1c^{-2},\ p_{66}^{(3)} = -P_1P_2d,\ p_{95}^{(3)} = -P_1P_3Q_2,$$

$$p_{40}^{(4)} = b_1b_2,\ p_{60}^{(4)} = a_1b_2 + a_2b_1,$$

$$p_{42}^{(4)} = (a_1b_2 + a_2b_1)b_3,\quad p_{80}^{(4)} = a_1a_2 + a_1c^{-2}Q_2,$$

$$p_{62}^{(4)} = a_1a_2b_3 + (a_1b_2 + a_2b_1)a_3,\ p_{44}^{(4)} = b_1b_2d,$$

$$p_{64}^{(4)} = (a_1b_2 + a_2b_1)d + b_1c^{-2}Q_2,\ p_{82}^{(4)} = a_1a_2a_3 + b_1b_2a_3,$$

$$p_{84}^{(4)} = a_1a_2d,\quad p_{142}^{(4)} = b_1b_2b_3,$$

причем в дальнейшем коэффициенты $p_{kj}^{(m)}$, отсутствующие в разложениях (2.3), считаются нулями.

Теперь приближенное решение уравнения (2.1) при достаточно больших ρ будем искать в виде

$$\theta_{1p} = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p} g_{ij}\rho^{-i}s^{-j}, \tag{2.5}$$

где p — натуральное число, которое ниже подбирается нужным образом, g_{ij} — искомые коэффициенты. Подставляя (2.5) в (2.2) вместо θ_1, получим

$$\theta_{1p}^8 + p^{(1)}(\rho,\ s)\,\theta_{1p}^6 + p^{(2)}(\rho,\ s)\,\theta_{1p}^4 + p^{(3)}(\rho,\ s)\,\theta_{1p}^2 + p^{(4)}(\rho,\ s) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} f_{nm}\rho^{-n}s^{-m}, \tag{2.6}$$

где

$$f_{nm} = \sum_{i_1+\ldots+i_8=n}\ \sum_{j_1+\ldots+j_8=m} g_{i_1j_1}\cdots g_{i_8j_8} + \sum_{i,j=0}^{4}\ \sum_{i+i_1+\ldots+i_6=n}\ \sum_{j+j_1+\ldots+j_6=m} p_{ij}^{(1)}g_{i_1j_1}\cdots g_{i_6j_6} + \sum_{i,j=0}^{6}\ \sum_{i+i_1+\ldots+i_4=n}\ \sum_{j+j_1+\ldots+j_4=m} p_{ij}^{(2)}g_{i_1j_1}\cdots g_{i_4j_4} + \tag{2.7}$$

$$+\sum_{i,j=0}^{12}\sum_{i+i_1+i_2=n}\sum_{j+j_1+j_2=m} p_{ij}^{(3)} g_{i_1j_1} g_{i_2j_2} + p_{nm}^{(4)},$$

$N=\max\{8p,\ 6p+2,\ 4p+4,\ 2p+6,\ 8\}$, как это видно из формул (2.3) и (2.4).

Коэффициенты g_{ij} в (2.5) подберем так, чтобы было

$$f_{nm}=0 \text{ при } n,\ m=\overline{0,\ p}, \tag{2.8}$$

что приведет нас к системе уравнений для определения коэффициентов g_{nm} суммы (2.5). Если числа g_{nm} при $n,\ m=\overline{0,\ p}$ удовлетворяют уравнениям (2.8), то будем иметь

$$D(\theta_p)=D(\rho\theta_{1p})=\rho^8 D_1(\theta_{1p})=\rho^8\sum_{n,m=0}^{N} f_{nm}\rho^{-n}s^{-m}=$$

$$=\rho^8\sum_{n,m=p+1}^{N} f_{n,m}\rho^{-n}s^{-m}=\rho^{8-(p+1)}s^{-(p+1)}\sum_{n,m=p+1}^{N}\rho^{-(n-p+1)}s^{-n+p+1}=$$

$$=\rho^{8-(p+1)}\,s^{-(p+1)}E(\rho,\ s), \tag{2.9}$$

где $E(\rho,\ s)$ ограничено при больших ρ равномерно по целочисленным $s\geqslant 1$. Следовательно, сумма вида (2.5) дает приближенное решение характеристического уравнения (1.15) при $(p+1)-8>0$ при больших ρ.

Теперь займемся нахождением коэффициентов g_{nm}, удовлетворяющих уравнениям (2.8) при $n,\ m=\overline{0,\ p}$. Из (2.6) имеем $f_{00}\equiv g_{00}^{8}+p_{00}^{(1)}g_{00}^{6}+p_{00}^{(2)}g_{00}^{4}+p_{00}^{(3)}g_{00}^{2}+p_{00}^{(4)}=0$. Ввиду того что в разложениях (2.3) коэффициенты $p_{00}^{(3)}$, $p_{00}^{(4)}$ отсутствуют, согласно нашей договоренности выше, они равны нулю. Что касается других коэффициентов, как это видно из (2.4), для них имеем $p_{00}^{(1)}=b_1+b_2$, $p_{00}^{(2)}=b_1b_2$. Таким образом, последнее уравнение приводится к виду

$$g_{00}^{8}+(b_1+b_2)\,g_{00}^{6}+b_1b_2g_{00}^{4}=0. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) имеет четырехкратный корень

$$g_{00}^{(5)}=g_{00}^{(6)}=g_{00}^{(7)}=g_{00}^{(8)}=0. \tag{2.11}$$

Ненулевые корни (2.10) являются решениями уравнения

$$g_{00}^{4}+(b_1+b_2)\,g_{00}^{2}+b_1b_2=0, \tag{2.12}$$

откуда имеем

$$g_{00}^{(1)}=\sqrt{-b_1},\ g_{00}^{(2)}=-\sqrt{-b_1},\ g_{00}^{(3)}=\sqrt{-b_2},\ g_{00}^{(4)}=-\sqrt{-b_2}. \tag{2.13}$$

Кстати, заметим, что все эти корни действительны и различны ввиду того, что $b_1\neq b_2$ по физической сущности этих коэффициентов системы (1.1), если коэффициент Пуассона $\nu\neq 1/2$.

Определим следующие коэффициенты g_{nm} разложения (2.5), соответствующие ненулевым значениям (2.13) коэффициента g_{00}. Уравнения для g_{10} можно получить из (2.8), (2.7) при $n=1$, $m=0$. При этих значениях в первом слагаемом правой части (2.7) g_{10} встретится 7 раз при следующих комбинациях: $i_1=1$, $i_2=\ldots=i_8=0$, $j_1=\ldots=j_8=0$, $i_1=0$, $i_2=1$, $i_3=\ldots=i_8=0$, $j_1=\ldots=j_8=0$, $\ldots$, $i_1=i_2=\ldots=i_7=0$, $i_8=1$, $j_1=\ldots=j_8=0$. Аналогичные рассуждения показывают, что при $n=1$, $m=0$ во втором слагаемом правой части (2.7) g_{10} встретится 6 раз с коэффициентом $p_{00}^{(1)}$, в третьем — 4 раза с коэффициентом $p_{00}^{(2)}$, в четвертом — 2 раза с коэффициентом $p_{00}^{(3)}$.

Итак, для g_{10} получим уравнение $8g_{00}^{7}g_{10}+6p_{00}^{(1)}g_{00}^{5}g_{10}+4p_{00}^{(2)}g_{00}^{3}g_{10}+$

$+ 2p_{00}^{(3)} g_{00} g_{10} + p_{10}^{(4)} + p_{10}^{(1)} g_{00}^6 + p_{10}^{(2)} g_{00}^4 + p_{10}^{(3)} g_{00}^2 = 0$. Как видно из (2.3), (2.4), имеем $p_{00}^{(1)} = b_1 + b_2$, $p_{00}^{(2)} = b_1 b_2$, $p_{00}^{(3)} = 0$, $p_{10}^{(4)} = 0$, $p_{10}^{(1)} = 0$, $p_{10}^{(2)} = 0$, $p_{10}^{(3)} = 0$, и последнее уравнение приводится к виду $[8g_{00}^7 + 6(b_1 + b_2) g_{00}^5 + 4b_1 b_2 g_{00}^3] g_{10} = 0$. Сумма, стоящая в квадратных скобках, отлична от нуля для всех g_{00} из (2.13), и для g_{10} получаем

$$g_{10} = 0. \tag{2.14}$$

При $n = 0$, $m = 1$ аналогично из (2.7), (2.8) получаем уравнение $[8g_{00}^7 + 6p_{00}^{(1)} g_{00}^5 + 4p_{00}^{(2)} g_{00}^3 + 2p_{00}^{(3)} g_{00}] g_{01} + p_{01}^{(4)} + p_{01}^{(3)} g_{00}^6 + p_{01}^{(2)} g_{00}^4 + p_{01}^{(3)} g_{00}^2 = 0$. С учетом (2.3) из последнего равенства имеем

$$g_{01} = 0. \tag{2.15}$$

Уравнение для g_{11} можно получить из (2.7), (2.8) при $n = 1$, $m = 1$ $[8g_{00}^7 + 6p_{00}^{(1)} g_{00}^5 + 4p_{00}^{(2)} g_{00}^3] g_{11} + p_{11}^{(1)} g_{00}^6 + [6p_{10}^{(1)} (g_{10} + g_{01}) + 6p_{01}^{(1)} (g_{10} + g_{01})] g_{00}^5 + p_{11}^{(3)} g_{00}^2 + 2[p_{10}^{(3)} (g_{10} + g_{01}) + p_{01}^{(3)} (g_{10} + g_{01})] g_{00} + p_{11}^{(4)} = 0$. Принимая во внимание (2.3), (2.4), из последнего уравнения находим

$$g_{11} = 0. \tag{2.16}$$

Таким образом, из уравнений, получаемых из (2.7), (2.8) при $n = 0, 1$, $m = 2, 3, 4, \ldots, p$, аналогичными рассуждениями приходим к заключению

$$g_{0m} = 0, \; g_{1m} = 0, \; m = 1, 2, \ldots, p, \tag{2.17}$$

для всех $g_{00}^{(k)}$ из (2.13). Заметим, что (2.17) является следствием того, что $p_{0m}^{(k)} = 0$, $p_{1m}^{(k)} = 0$ при $k = 1, 2, 3, \ldots$ Уравнение для g_{20} получается из (2.7), (2.8) при $n = 2$, $m = 0$:

$$A^{(k)} g_{20} = B^{(k)} \quad (k = \overline{1, 4}), \tag{2.18}$$

где

$$A^{(k)} = 8 (g_{00}^{(k)})^7 + 6p_{00}^{(1)} (g_{00}^{(k)})^5 + 4p_{00}^{(2)} (g_{00}^{(k)})^3 + 2p_{00}^{(3)} g_{00}^{(k)} \quad (k = \overline{1, 4}),$$

$$B^{(k)} = (a_2 - a_1 - 2)(g_{00}^{(k)})^6 + [2(b_1 + b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)] (g_{00}^{(k)})^4 + 2b_1 b_2 (g_{00}^{(k)})^2 \quad (k = \overline{1, 4}).$$

Ввиду того что $A^{(k)} \neq 0$ $(k = \overline{1, 4})$, из (2.18) имеем

$$g_{20}^{(k)} = (A^{(k)})^{-1} B^{(k)} \quad (k = \overline{1, 4}). \tag{2.19}$$

Таким образом шаг за шагом определяем четыре серии коэффициентов

$$\begin{gathered} g_{1m}^{(k)} \quad (k = \overline{1, 4};\; m = 2, 3, \ldots, p), \\ g_{nm}^{(k)} \quad (k = \overline{1, 4};\; n = 2, 3, \ldots, p;\; m = \overline{0, p}), \end{gathered} \tag{2.20}$$

соответствующих ненулевым значениям $g_{00}^{(k)}$ $(k = \overline{1, 4})$ из (2.13) и удовлетворяющих уравнениям (2.8). Тогда

$$\begin{aligned} \theta_p^{(k)} &= \rho \theta_{1p}^{(k)} = \rho \{ g_{00}^{(k)} + g_{20}^{(k)} \rho^{-2} + g_{21}^{(k)} \rho^{-2} s^{-1} + \ldots + g_{2p}^{(k)} \rho^{-2} s^{-p} + \\ &\quad + (g_{30}^{(k)} + g_{31}^{(k)} s^{-1} + \ldots + g_{3p}^{(k)} s^{-p}) \rho^{-3} + \ldots \\ &\quad \ldots + (g_{p0}^{(k)} + g_{p1}^{(k)} s^{-1} + \ldots + g_{pp}^{(k)} s^{-p}) \rho^{-p} \} = \rho g_{00}^{(k)} + \\ &\quad + \omega_1^{(k)}(s) \rho^{-1} + \omega_2^{(k)}(s) \rho^{-2} + \ldots + \omega_{p-1}^{(k)}(s) \rho^{-p+1} \quad (k = \overline{1, 4}), \end{aligned} \tag{2.21}$$

где

$$\omega_{i-1}^{(k)}(s) = g_{i0}^{(k)} + g_{i1}^{(k)} s^{-1} + \ldots + g_{ip}^{(k)} s^{-p} \quad (i = \overline{2, p}), \tag{2.22}$$

соответствующие значениям $g_{00}^{(k)}$ $(k=\overline{1,\ 4})$ из (2.13), при больших ρ и при $(p+1)-8>0$ окажется приближенным решением уравнения (1.15). Теперь вычислим коэффициенты g_{ij} разложения (2.5), соответствующие нулевому корню g_{00} четвертой кратности (см. (2.11)) уравнения (2.10). Принимая во внимание (2.3), (2.4), легко видеть, что уравнения, получаемые из (2.7), (2.8) для коэффициентов g_{10}, g_{11}, g_{20} при $g_{00}=0$ и $n=1$, $m=0$; $n=0$, $m=1$; $n=1$, $m=1$; $n=2$, $m=0$ для всех g_{10}, g_{01}, g_{11}, g_{22}, удовлетворяются тождественно. Например, уравнения для g_{10}, соответствующие значению $g_{00}=0$, можно получить из (2.7), (2.8) при $n=2$, $m=0$; $n=3$, $m=0$ и $n=4$, $m=0$: $p_{00}^{(3)}g_{10}^2+p_{20}^{(4)}=0$, $p_{10}^{(3)}g_{10}^2+p_{30}^{(4)}=0$, $p_{00}^{(2)}g_{10}^4+$ $+p_{20}^{(3)}g_{10}^2+p_{40}^{(4)}=0$. Но, как видно из (2.3), $p_{00}^{(3)}=0$, $p_{20}^{(4)}=0$, $p_{10}^{(3)}=0$, $p_{30}^{(4)}=0$. Тогда первое и второе из полученных уравнений удовлетворяются тождественно для g_{10}. Ввиду того, что из (2.4) имеем $p_{00}^{(2)}=b_1b_2$, $p_{20}^{(3)}=$ $=-2b_1b_2$, $p_{40}^{(4)}=b_1b_2$, третье уравнение приводится к уравнению

$$g_{10}^4-2g_{10}^2+1=0, \tag{2.23}$$

подходящему для определения значения g_{10}, соответствующего значению g_{00}. Решив уравнение (2.23), находим два различных корня для g_{10}, каждый из которых является корнем второй кратности уравнения (2.23):

$$g_{10}^{(5)}=1,\ g_{10}^{(6)}=1,\ g_{10}^{(7)}=-1,\ g_{10}^{(8)}=-1. \tag{2.24}$$

Чтобы получить уравнение для определения g_{10}, в (2.7), (2.8) положим $n=0$, $m=2$, 3, 4. Тогда с учетом того, что $g_{00}=0$, из них получим уравнения $p_{00}^{(3)}g_{01}^2+p_{02}^{(4)}=0$, $p_{01}^{(3)}g_{01}^2+p_{02}^{(4)}=0$, $p_{00}^{(2)}g_{01}^4+p_{02}^{(3)}g_{01}^2+p_{04}^{(4)}=$ $=0$. Согласно формулам (2.3), $p_{00}^{(3)}=p_{02}^{(4)}=p_{01}^{(3)}=p_{02}^{(4)}=0$, и, следовательно, первые два уравнения удовлетворяются тождественно по g_{01}.

Ввиду того что $p_{00}^{(2)}=b_1b_2$, $p_{02}^{(3)}=0$, $p_{04}^{(4)}=0$, третье уравнение приводится к

$$g_{01}^4=0, \tag{2.25}$$

что дает нулевой корень

$$g_{01}^{(k)}=0 \quad (k=\overline{5,\ 8}) \tag{2.26}$$

кратности четыре.

Методом индукции легко показать, что

$$g_{0m}^{(k)}=0 \quad (k=\overline{5,\ 8}) \text{ при всех натуральных } m. \tag{2.27}$$

Уравнения для g_{11} получаются из (2.7), (2.8) при $n=2$, $m=2$ и $n=3$ $m=3$: $p_{00}^{(3)}g_{11}^2+p_{22}^{(4)}=0$, $p_{11}^{(3)}g_{11}^2+p_{33}^{(4)}=0$. Согласно формулам (2.3), $p_{00}^{(3)}=p_{22}^{(4)}=p_{11}^{(3)}=p_{33}^{(4)}=0$, и последние уравнения удовлетворяются тождественно для всех g_{11}. Однако при $n=4$, $m=4$ из (2.7), (2.8) получаем $p_{00}^{(2)}g_{11}^4+p_{22}^{(3)}g_{11}^2+p_{44}^{(4)}=0$, откуда в силу того что $p_{00}^{(2)}=b_1b_2$, $p_{22}^{(3)}=$ $=b_2b_3+b_1b_2Q_3$, $p_{44}^{(4)}=b_1b_2d$, для определения значений g_{11}, соответствующих корню $g_{00}=0$ уравнения (2.10), получаем

$$g_{11}^4+\left(\frac{b_3}{b_1}+Q_3\right)g_{11}^2+d=0. \tag{2.28}$$

Если дискриминант этого уравнения отличен от нуля, то из него получим четыре значения

$$g_{11}^{(k)} \quad (k=\overline{5,\ 8}), \tag{2.29}$$

соответствующие корню $g_{00}=0$ уравнения (2.10). Комбинируя значения (2.29) с каждым из значений $g_{10}^{(5)}=1$, $g_{10}^{(7)}=-1$, получим восемь сумм

$$g_{10}^{(i)}\rho^{-1}+g_{11}^{(j)}\rho^{-1}s^{-1} \quad (i=5,\ 7;\ j=\overline{5,\ 8}), \tag{2.30}$$

коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям (2.8) при $n=1$, $m=0$ и $n=1$, $m=1$. Если дискриминант уравнения (2.28) равен нулю, то из (2.20) будем иметь четыре различные суммы.

Таким образом шаг за шагом определяются коэффициенты $g_{nm}^{(k)}$ $(k=\overline{5, 8})$ разложения (2.5), соответствующие нулевому корню $g_{00}=0$ уравнения (2.10), из которых составляются еще четыре приближенных решения $\theta_{1p}^{(k)}$ $(k=\overline{5, 8})$ характеристического уравнения (1.15):

$$\theta_p^{(k)} = \rho\theta_{1p}^{(k)} = \rho\{(g_{10}^{(k)} + g_{11}^{(k)}s^{-1} + \ldots + g_{1p}^{(k)}s^{-p})\rho^{-1} + (g_{20}^{(k)} + g_{21}^{(k)}s^{-1} + \ldots + g_{2p}^{(k)}s^{-p})\rho^{-2} + \ldots + (g_{p0}^{(k)} + g_{p1}^{(k)}s^{-1} + \ldots + g_{pp}^{(k)}s^{-p})\rho^{-p}\} = \omega_0^{(k)}(s) + \omega_1^{(k)}(s)\rho^{-1} + \ldots + \omega_{p-1}^{(k)}(s)\rho^{-p+1} \quad (k=\overline{5, 8}), \tag{2.31}$$

где

$$\omega_{i-1}^{(k)}(s) = g_{i0}^{(k)} + g_{i1}^{(k)}s^{-1} + \ldots + g_{ip}^{(k)}s^{-p} \quad (i=\overline{1, p};\ k=\overline{5, 8}), \tag{2.32}$$

причем коэффициенты $g_{ij}^{(k)}$ приближенных корней (2.31) при $k=\overline{5, 8}$ и $i, j=\overline{0, p}$ удовлетворяют уравнениям (2.8). Следовательно, имеем

$$D(\theta_p^{(k)}) = \rho^{8-(p+1)}s^{-(p+1)} \sum_{n,m=0}^{N} f_{nm}^{(k)}\rho^{-n}s^{-m} = \rho^{8-(p+1)}s^{-(p+1)} \sum_{n,m=p+1}^{N} f_{nm}^{(k)}\rho^{-(n-p-1)}s^{-(n-p-1)} = \rho^{8-(p+1)}s^{-(p+1)}E^{(k)}(\rho, s) \quad (k=\overline{1, 8}), \tag{2.33}$$

где

$$f_{nm}^{(k)} = \sum_{i_1+\ldots+i_8=n} \sum_{j_1+\ldots+j_8=m} g_{i_1j_1}^{(k)} \ldots g_{i_8j_8}^{(k)} + \sum_{i,j=0}^{4} \sum_{i+i_1+\ldots+i_6=n} \sum_{j+j_1+\ldots+j_6=m} p_{ij}^{(1)}g_{i_1j_1}^{(k)} \ldots g_{i_6j_6}^{(k)} + \sum_{i,j=0}^{6} \sum_{i+i_1+\ldots+i_4=n} \sum_{j+j_1+\ldots+j_4=m} p_{ij}^{(2)}g_{i_1j_1}^{(k)} \ldots g_{i_4j_4}^{(k)} + \sum_{i,j=0}^{12} \sum_{i+i_1+i_2=n} \sum_{j+j_1+j_2=m} p_{ij}^{(3)}g_{i_1j_1}^{(k)}g_{i_2j_2}^{(k)} \quad (k=\overline{1, 8}), \tag{2.34}$$

причем из (2.33) и (2.34) видно, что $E^{(k)}(\rho, s)$ ограничено при больших ρ равномерно по всем целочисленным $s \geqslant 1$. Следовательно, как видно из (2.33), суммы $\theta_p^{(k)}$, определяемые формулой (2.21) при $k=\overline{1, 4}$ и формулой (2.32) при $k=\overline{5, 8}$, дают восемь различных приближенных корней характеристического уравнения (1.15) при $(p+1)-8>0$ и достаточно больших ρ. С их помощью в следующем параграфе по формулам (1.16) построим независимые приближенные решения системы (1.11) при достаточно больших ρ и $(p+1)-8>0$.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ И ЕЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

С помощью приближенных решений $\theta_p^{(k)}$ характеристического уравнения (1.15), определяемых формулами (2.21) при $k=\overline{1, 4}$, (2.32) при $k=\overline{5, 8}$, составим приближенные решения $u^{(k)}(x, \rho, s)$, $k=\overline{1, 8}$, системы (1.11), по формулам

$$u^{(k)}(x, \rho, s) = \operatorname{colon}[u_{1k}(x, \rho, s, \ldots, u_{8k}(x, \rho, s), \tag{3.1}$$

$$u_{jk}(x, \rho, s) = \frac{D_{kj}(\theta_p^{(k)})}{D'(\theta_p^{(k)})} \exp(\theta_p^{(k)} x) \quad (j = \overline{1, 8}), \tag{3.2}$$

где $D_{kj}(\theta)$ — алгебраическое дополнение элемента (k, j) в определителе $D(\theta)$ характеристической матрицы системы (1.11), $D'(\theta)$ — производная $D(\theta)$.

Очевидно, подставляя (3.2) в i-е уравнение системы (1.11), получим

$$\left[\delta_{i1}\frac{d}{dx} + M_{i1}(\rho, s)\right]u_{1k} + \left[\delta_{i2}\frac{d}{dx} + M_{i2}(\rho, s)\right]u_{2k} +$$

$$+ \cdots + \left[\delta_{i8}\frac{d}{dx} + M_{i8}(\rho, s)\right]u_{8k} \equiv \exp(\theta_p^{(k)} x)\Big\{[\delta_{i1}\theta_p^{(k)} + M_{i1}(\rho, s)] \times$$

$$\times \frac{D_{k1}(\theta_p^{(k)})}{D'(\theta_p^{(k)})} + \cdots + [\delta_{i8}\theta_p^{(k)} + M_{i8}(\rho, s)] \frac{D_{k8}(\theta_p^{(k)})}{D'(\theta_p^{(k)})}\Big\} \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \dfrac{D(\theta_p^{(k)})}{D'(\theta_p^{(k)})} \exp(\theta_p^{(k)} x), & i = k, \\[2ex] 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{3.3}$$

Как видно из (3.3), функции (3.2) не дают решений системы (1.11), но, как будет показано в § 5, с их помощью мы докажем существование фундаментальной матрицы решений, допускающих асимптотические представления вида (1.13).

Основная цель этого параграфа заключается в том, чтобы показать, что столбцы (3.1) при достаточно больших ρ линейно независимы и коэффициент при $\exp(\theta_p^{(k)} x)$ в (3.3) достаточно мал. Для этой цели, очевидно, прежде всего надо получить асимптотические представления коэффициентов при $\exp(\theta_p^{(k)} x)$ в (3.2) и (3.3) при больших значениях параметра ρ.

Вычислением определителя $D(\theta)$ характеристической матрицы $\theta e + M(\rho, s)$ находим

$$D(\theta) = \theta^8 + P^{(1)}(\rho, s)\theta^6 + P^{(2)}(\rho, s)\theta^4 + P^{(3)}(\rho, s)\theta^2 + P^{(4)}(\rho, s), \tag{3.4}$$

где

$$P^{(1)}(\rho, s) = (b_1 + b_2)\rho^2 + (a_1 + a_2 - 2) + (P_1P_2 + Q_3)s^{-2}, \tag{3.5}$$

$$P^{(2)}(\rho, s) = b_1b_2\rho^4 + [a_1b_2 + a_2b_1 - 2(b_1 + b_2)]\rho^2 + a_1a_2 +$$
$$+ 1 - 2(a_1 + a_2) + (b_2Q_3 + b_3 + b_1Q_3)\rho^2 s^{-2} + [a_2Q_3 - 2P_1P_2 +$$
$$+ a_3(a_1 + 1)]s^{-2} + (P_1P_2Q_3 + d - Q_1P_3)s^{-4}, \tag{3.6}$$

$$P^{(3)}(\rho, s) = -2b_1b_2\rho^4 + [b_2 - 2(a_1b_2 + a_2b_1)]\rho^2 +$$
$$+ (b_2b_3 + b_1b_2Q_3)\rho^4 s^{-2} + a_1 + a_2 - 2a_1a_2 + (a_2b_3 + b_2a_3 + a_1b_2 +$$
$$+ a_2b_1 + a_1b_3)\rho^2 s^{-2} + (b_2d - P_1P_2b_3 - b_2Q_1P_3)\rho^2 s^{-4} +$$
$$+ (a_2a_3 - P_1P_2 + a_1a_2Q_3 + a_1a_3)s^{-2} + [(a_1 + a_2)d + Q_2c^{-2} - P_1P_2a_3 -$$
$$- a_2Q_1P_3]s^{-4} - P_2Q_1c^{-2}s^{-5} - P_1P_3Q_2s^{-5}\rho^{-3} - P_1P_2ds^{-6}, \tag{3.7}$$

$$P^{(4)}(\rho, s) = b_1b_2b_3\rho^6 s^{-2} + b_1b_2\rho^4 + (a_1b_2 + a_2b_1)b_3\rho^4 s^{-2} +$$
$$+ b_1b_2d\rho^4 s^{-4} + (a_1b_2 + a_2b_1)\rho^2 + [a_1a_2b_3 + (a_1b_2 + a_2b_1)a_3]\rho^2 s^{-2} +$$
$$+ [(a_1b_2 + a_2b_1)d + b_1c^{-2}Q_2]\rho^2 s^{-4} + (a_1a_2a_3 + b_1b_2a_3)s^{-2} + a_1a_2ds^{-4}. \tag{3.8}$$

Как видно из (3.5) — (3.8), при больших ρ справедливы асимптотические формулы

$$\rho^{-2}P^{(1)}(\rho,\ s) = b_1 + b_2 + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho},\quad \rho^{-4}P^{(2)}(\rho,\ s) = b_1 b_2 + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho},$$

$$\rho^{-4}P^{(3)}(\rho,\ s) = -2b_1 b_2 + (b_2 b_3 + b_1 b_2 Q_3)\,s^{-2} + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}, \tag{3.9}$$

$$\rho^{-4}P^{(4)}(\rho,\ s) = b_1 b_2 b_3 s^{-2}\rho^2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, b_3 s^{-2} + b_1 b_2 d s^{-4} + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho},$$

где в дальнейшем $E(x,\ \rho,\ s)$ обозначает непрерывно дифференцируемую по $x \in [0,\ s]$ функцию, ограниченную при больших ρ равномерно по целочисленным $s \geqslant 1$. Из (2.21), (2.32) и (3.9) видно, что имеют место и асимптотические формулы

$$\rho^{-7}D'(\theta_p^{(k)}) = A^{(k)} + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} \text{ при } k = \overline{1,\ 4},\quad \rho^{-4}D'(\theta_p^{(k)}) =$$

$$= A^{(k)}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} \text{ при } k = \overline{5,\ 8}, \tag{3.10}$$

где

$$A^{(k)} = 8\,(g_{00}^{(k)})^7 + 6\,(b_1 + b_2)\,(g_{00}^{(k)})^5 + 4b_1 b_2\,(g_{00}^{(k)})^3 \quad (k = \overline{1,\ 4}), \tag{3.11}$$

$$A^{(k)}(s) = 4b_1 b_2 \omega_0^{(k)}(s)\, B^{(k)}(s) \quad (k = \overline{5,\ 8}), \tag{3.12}$$

$$B^{(k)}(s) = (\omega_0^{(k)}(s))^2 - 1 + \frac{b_3 + b_1 Q_3}{4b_1}\, s^{-2} \quad (k = \overline{5,\ 8}), \tag{3.13}$$

$\omega_j^{(k)}(s)$ определены формулами (2.32), причем асимптотика (3.8) равномерна по целочисленным $s \geqslant 1$. Легко видеть, что при больших s имеем асимптотическую формулу

$$sB^{(k)}(s) = s\left[(\omega_0^{(k)}(s))^2 - 1 + \frac{b_3 + b_1 Q_3}{4b_1}\, s^{-2}\right] =$$

$$= g_{11}^{(k)} + \frac{E(s)}{s},\quad g_{11}^{(k)} = 1,\ k = 5,\ 6;\quad g_{11}^{(k)} = -1,\ k = 7,\ 8, \tag{3.14}$$

$E(s)$ ограничено при больших s.

Вычисляя миноры элементов первой строки определителя, получим

$$\begin{aligned}
D_{11}(\theta) &= \theta^7 + [b_2\rho^2 + a_2 - 2 + (P_1 P_2 + Q_3)]\,\theta^5 + \\
&+ (b_2\rho^2 + a_2 + 1 + a_3\rho^{-2} + b_2\rho^2 s^{-2} + d\rho^{-3}s^{-10})\,\theta^3 + \\
&+ (b_2\rho^2 + a_2 - P_1 P_2 s^{-2} + iP_1 Q_2 \rho^{-1} s^{-4} - P_3\rho s^{-1} + iQ_2 c^{-2}\rho s^{-4})\,\theta, \\
D_{12}(\theta) &= -(a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\,\theta^6 - (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\,(a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\,\rho\theta^4, \\
D_{13}(\theta) &= \left(-ib_1 P_2 s^{-1} + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right)\rho^2\theta^4,\quad D_{14}(\theta) = \Big(-ib_1 P_2 + \\
&+ \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\Big)\,\rho\theta^5,\quad D_{1j}(\theta) = 0 \text{ при } j = \overline{5,\ 8}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Из этих формул с учетом (2.13), (2.31) и (3.9) получим

$$\rho^{-7}D_{11}(\theta_p^{(1)}) = (g_{00}^{(1)})^7 + b_2\,(g_{00}^{(1)})^5 + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} =$$

$$=(\sqrt{-b_1})^7+b_2(\sqrt{-b_1})^5+\frac{E(\rho,\ s)}{\rho},$$

$$\rho^{-7}D_{12}(\theta_p^{(1)})=b_1(\sqrt{-b_1})^6+b_1b_2(\sqrt{-b_1})^4+\frac{E(\rho,\ s)}{\rho},$$

$$\rho^{-7}D_{1j}(\theta_p^{(1)})=0+\frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\ \text{при}\ j=3,\ 4,\ \rho^{-7}D_{1j}(\theta_p^{(1)})=0\ \text{при}\ j=\overline{5,\ 8}. \tag{3.16}$$

На основании (3.10), (3.11) и (3.16) имеем

$$\frac{D_{11}(\theta_p^{(1)})}{D'(\theta_p^{(1)})}=\eta_{11}+\frac{E(\rho,\ s)}{\rho},$$

$$\eta_{11}=\frac{(\sqrt{-b_1})^7+b_2(\sqrt{-b_1})^5}{8(\sqrt{-b_1})^7+6(b_1+b_2)(\sqrt{-b_1})^5+4b_1b_2(\sqrt{-b_1})^3}=2^{-1},$$

$$\frac{D_{12}(\theta_p^{(1)})}{D'(\theta_p^{(1)})}=\eta_{21}+\frac{E(\rho,\ s)}{\rho},\ \eta_{21}=\frac{b_1(\sqrt{-b_1})^6+b_1b_2(\sqrt{-b_1})^4}{A^{(1)}}=2^{-1}\sqrt{-b_1}, \tag{3.17}$$

$$\frac{D_{1j}(\theta_p^{(1)})}{D'(\theta_p^{(1)})}=\eta_{j1}+\frac{E(\rho,\ s)}{\rho},\ \eta_{j1}=0\ \text{при}\ j=\overline{3,\ 8}. \tag{3.18}$$

Таким образом, для элементов $u_{j1}(x,\ \rho,\ s)$ $(j=\overline{1,\ 8})$ столбца (3.1) при $k=1$ получаем асимптотические представления

$$u_{j1}(x,\ \rho,\ s)=\left\{\eta_{j1}+\frac{E(x,\ \rho,\ s)}{\rho}\right\}\exp(\theta_p^{(1)}x), \tag{3.19}$$

где

$$\eta_{11}=2^{-1},\ \eta_{21}=-2^{-1}\sqrt{-b_1},\ \eta_{j1}=0\ \text{при}\ j=\overline{3,\ 8}. \tag{3.20}$$

С помощью аналогичных вычислений для элементов $u_{jk}(x,\ \rho,\ s)$ $(j=\overline{1,\ 8})$ столбца (3.1) при $k=2,\ 3,\ 4$ получаем асимптотические представления

$$u_{j2}(x,\ \rho,\ s)=\left\{\eta_{j2}+\frac{E(x,\ \rho,\ s)}{\rho}\right\}\exp(\theta_p^{(2)}x)\quad (j=\overline{1,\ 8}), \tag{3.21}$$

$$\eta_{12}=(2\sqrt{-b_1})^{-1},\ \eta_{22}=2^{-1},\ \eta_{32}=b_1[2(b_2-b_1)]^{-1},\ \eta_{j2}=0\ \text{при}\ j=\overline{4,\ 8}, \tag{3.22}$$

$$u_{j3}(x,\ \rho,\ s)=\left\{\eta_{j3}+\frac{E(x,\ \rho,\ s)}{\rho}\right\}\exp(\theta_p^{(3)}x)\quad (j=\overline{1,\ 8}), \tag{3.23}$$

$$\eta_{j3}=0\ \text{при}\ j=1,\ 2;\ \eta_{33}=2^{-1},\ \eta_{43}=2^{-1}\sqrt{-b_2},\ \eta_{j3}=0\ \text{при}\ j=\overline{5,\ 8}, \tag{3.24}$$

$$u_{j4}(x,\ \rho,\ s)=\left\{\eta_{j4}+\frac{E(x,\ \rho,\ s)}{\rho}\right\}\exp(\theta_p^{(4)}x)\quad (j=\overline{1,\ 8}), \tag{3.25}$$

$$\eta_{k4}=0\ \text{при}\ k=1,\ 2;\ \eta_{34}=-(2\sqrt{-b_2})^{-1},\ \eta_{44}=2^{-1},\ \eta_{j4}=0\ \text{при}\ j=\overline{5,\ 8}. \tag{3.26}$$

Теперь займемся получением асимптотических представлений элементов $u_{jk}(x,\ \rho,\ s)$ $(j=\overline{1,\ 8})$ столбца (3.1) при $k=\overline{5,\ 8}$. Для этого прежде всего необходимо вычислить определители $D_{kj}(\theta)$ при $k=\overline{5,\ 8}$; $j=\overline{1,\ 8}$. Вычислив эти определители, находим

$$D_{51}(\theta)=iP_1Q_2s^{-1}\theta^4,\ D_{52}(\theta)=iP_1Q_2\rho^{-1}s^{-3}\theta^5,\ D_{53}(\theta)=-Q_2s^{-1}\theta^5-$$

$$-(a_1\rho^{-1}+b_1\rho)Q_2s^{-1}\rho^2\theta^3,\ D_{54}(\theta)=Q_2\rho^{-1}s^{-3}-Q_2(a_1\rho^{-1}+b_1\rho)s^{-2}\theta^4, \tag{3.27}$$

$$D_{55}(\theta)=\theta^7+[(a_1\rho^{-1}+b_1\rho)+(a_2\rho^{-1}+b_2\rho)]\theta^5+$$

$$+ b_1b_2\rho^4\theta^3 + P_1P_2s^{-2}\theta^5, \quad D_{5j}(\theta) = 0, \quad j = 6,\ 7,\ 8.$$

Принимая во внимание формулу (2.31), из (3.27) получаем асимптотические равенства

$$\rho^{-4}D_{5j}(\theta_p^{(5)}) = 0 + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} \text{ при } j = \overline{1,\ 4}, \quad \rho^{-4}D_{55}(\theta_p^{(5)}) = b_1b_2(\omega_0^{(5)}(s))^3 +$$

$$+ \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}, \quad \rho^{-4}D_{5j}(\theta_p^{(5)}) = 0 \text{ при } j = \overline{6,\ 8}. \tag{3.28}$$

На основании (3.10), (3.12) — (3.14) и (3.28) имеем

$$\frac{D_{5j}(\theta_p^{(5)})}{D'(\theta_p^{(5)})} = 0 + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} \text{ при } j = \overline{1,\ 4}, \tag{3.29}$$

$$\frac{D_{55}(\theta_p^{(5)})}{D'(\theta_p^{(5)})} = \frac{b_1b_2(\omega_0^{(5)}(s))^2}{4b_1b_2B^{(5)}(s)} + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} = s\left\{\eta_{55}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right\}, \tag{3.30}$$

$$\text{где} \quad \eta_{55}(s) = \frac{(\omega_0^{(5)}(s))^2}{4B^{(5)}(s)} \to \frac{1}{8g_{11}^{(5)}} \text{ при } s \to \infty, \tag{3.31}$$

$$\frac{D_{5j}(\theta_p^{(5)})}{D'(\theta_p^{(5)})} = 0 \text{ при } j = 6,\ 7,\ 8. \tag{3.32}$$

Из (3.29) — (3.32) следует справедливость асимптотических представлений

$$u_{j5}(x,\ \rho,\ s) = s\left\{\eta_{j5}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right\}\exp(\theta_p^{(5)}x) \quad (j = \overline{1,\ 8}), \tag{3.33}$$

где

$$\eta_{j5}(s) = 0 \text{ при } j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8, \quad \eta_{55}(s) = \frac{(\omega_0^{(5)}(s))^2}{4B^{(5)}(s)}, \tag{3.34}$$

причем

$$\lim_{s\to\infty} \eta_{55}(s) = (8g_{11}^{(5)})^{-1}. \tag{3.35}$$

Асимптотика элементов $u_{jk}(x,\ \rho,\ s)$ столбцов (3.1) при $k = 6,\ 7,\ 8$ несколько отличается от асимптотики столбцов с номерами, меньшими 6, именно тем, что коэффициенты при $\exp(\theta_p^{(k)}x)$ при $k \geqslant 6$ могут расти с ростом ρ. В связи с этим, несмотря на сходство вычислений для получения этой асимптотики, с теми, которые приводились выше, для полной ясности их целесообразно проделать. Вычислив необходимые определители, при $k = 6$ находим

$$D_{61}(\theta) = iP_1Q_2\rho s^{-1}\theta^3 - Q_1\rho s^{-1}\theta^5 - Q_1(a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho^2s^{-1}\theta^3,$$

$$D_{62}(\theta) = -Q_1s^{-1}\theta^6 + [iP_1Q_2s^{-1} - Q_1(a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho s^{-1}]\theta^4,$$

$$D_{63}(\theta) = (Q_1s^{-2} - Q_2s^{-1})\rho\theta^4 - Q_2(a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\rho^2s^{-1}\theta^2,$$

$$D_{64}(\theta) = (Q_2s^{-1} + P_2Q_1s^{-2})\theta^5 - Q_2(a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\rho s^{-1}\theta^3,$$

$$D_{65}(\theta) = [b_2\rho^3 + P_1P_2\rho s^{-3} + (a_1\rho^{-1} + b_1\rho + a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho]\theta^4 +$$

$$+ \rho\theta^3 + (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)(a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho^3\theta^2,$$

$$D_{66}(\theta) = \theta^7 + [P_1P_2s^{-2} + (a_1\rho^{-1} + b_1\rho) + (a_2\rho^{-1} + b_2\rho)]\theta^5 +$$

$$+ (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)(a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho^2\theta^3, \quad D_{6j}(\theta) = 0 \text{ при } j = 7,\ 8. \tag{3.36}$$

С учетом (2.31) из этих формул получаем

$$\rho^{-4}D_{6j}(\theta_p^{(6)}) = \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} \text{ при } j = \overline{1,\ 4}, \quad \rho^{-4}D_{6j}(\theta_p^{(6)}) = 0 \text{ при } j = 7,\ 8,$$

$$\rho^{-4}D_{66}(\theta_p^{(6)}) = b_1b_2(\omega_0^{(6)}(s))^3 + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}. \tag{3.37}$$

Ввиду наличия ρ^5 в выражении $D_{65}(\theta)$ для получения асимптотики $D_{65}(\theta_p^{(6)})$ необходимо воспользоваться асимптотическим представлением $\theta_p^{(6)}$ с точностью до первой степени ρ^{-1}, которое легко получить из (2.31):

$$\theta_p^{(6)} = \omega_0^{(6)}(s) + \omega_1^{(6)}(s)\rho^{-1} + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho^2}. \tag{3.38}$$

Подставляя (3.38) в выражение $D_{65}(\theta_p^{(6)})$, получаемое из (3.36), находим

$$\rho^{-4}D_{65}(\theta_p^{(6)}) = b_1b_2(\omega_0^{(6)}(s))^2\rho + 2b_1b_2\omega_0^{(6)}(s)\,\omega_1^{(6)}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}. \tag{3.39}$$

На конец, принимая во внимание (3.10), (3.12), (3.13), (3.37) и (3.39), получим

$$\frac{D_{6j}(\theta_p^{(6)})}{D'(\theta_p^{(6)})} = \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} \quad \text{при } j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8, \quad \frac{D_{65}(\theta_p^{(6)})}{D'(\theta_p^{(6)})} =$$

$$= s\left\{\eta_{561}(s)\rho + \eta_{560}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right\},$$

$$\eta_{561}(s) = \frac{\omega_0^{(6)}(s)}{4sB^{(6)}(s)} \to \frac{1}{8g_{11}^{(6)}} \quad \text{при } s \to \infty,$$

$$\eta_{560}(s) = \frac{2\omega_1^{(6)}(s)}{4sB^{(6)}(s)} \to \frac{g_{20}^{(6)}}{8g_{11}^{(6)}} \quad \text{при } s \to \infty, \tag{3.40}$$

$$\frac{D_{66}(\theta_p^{(6)})}{D'(\theta_p^{(6)})} = s\left\{\frac{(\omega_0^{(6)}(s))^2}{4sB^{(6)}(s)} + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right\} =$$

$$= s\left\{\eta_{66}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right\} = s\left\{\eta_{660}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right\},$$

$$\eta_{66}(s) = \eta_{660}(s) = \frac{(\omega_0^{(6)}(s))^2}{4sB^{(6)}(s)} \to \frac{1}{8g_{11}^{(6)}} \quad \text{при } s \to \infty.$$

На основании (3.2) из (3.40) следует справедливость асимптотических представлений

$$u_{j6}(x,\ \rho,\ s) = s\left\{\rho\eta_{j61}(s) + \eta_{j60}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right\}\exp(\theta_p^{(6)}x), \tag{3.41}$$

где $\eta_{j61}(s) = 0$ при $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,$

$$\eta_{561}(s) = \frac{\omega_0^{(6)}(s)}{4sB^{(6)}(s)} \to \frac{1}{8g_{11}^{(6)}} \quad \text{при } s \to \infty, \tag{3.42}$$

$$\eta_{j60}(s) = 0 \text{ при } j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7, \quad \eta_{560}(s) = \frac{\omega_1^{(6)}(s)}{2sB^{(6)}(s)} \to$$

$$\to \frac{g_{20}^{(6)}}{8g_{11}^{(6)}} \text{ при } s \to \infty, \quad \eta_{660}(s) = \eta_{66}(s) = \frac{(\omega_0^{(6)}(s))^2}{4sB^{(6)}(s)} \to \frac{1}{8g_{11}^{(6)}} \text{ при } s \to \infty.$$

Далее, вычисляя определители $D_{7j}(\theta)$, получим

$$D_{71}(\theta) = iP_1Q_2\rho^2s^{-1}\theta^2, \quad D_{72}(\theta) = -Q_1\theta^5 - (Q_1\rho^2 - iQ_2\rho s^{-2})\theta^2,$$

$$D_{73}(\theta) = -Q_2(\rho^2 s^{-1}\theta^3 + b_1\rho^4 s^{-1}\theta),\quad D_{74}(\theta) = -Q_2\rho s^{-1}\theta^4 - (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\,Q_2\rho^2 s^{-1}\theta^2, \tag{3.43}$$

$$D_{75}(\theta) = \rho^2\theta^5 + (a_1\rho^{-1} + b_1\rho + a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\,\rho^3\theta^3 + b_1 b_2\rho^6 + P_1P_2\rho^2 s^{-1}\theta^3,$$

$$D_{76}(\theta) = \rho\theta^6 + (a_1\rho^{-1} + b_1\rho + a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\,\rho^2\theta^4 + b_1b_2\rho^5\theta^2 + P_1P_2\rho s^{-2}\theta^4,$$

$$D_{77}(\theta) = \theta^7 + (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\,\rho\theta^5 + b_1b_2\rho^4\theta^3 + (a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\,\theta^5 + P_1P_2 s^{-2}\theta^4,\quad D_{78}(\theta) = 0.$$

На основании формулы (2.31) из (3.43) имеем

$$\rho^{-4}D_{7j}(\theta_p^{(7)}) = 0 + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho} \text{ при } j = 1,\ 2,\ 4,\quad \rho^{-4}D_{78}(\theta_p^{(7)}) = 0,$$

$$\rho^{-4}D_{73}(\theta_p^{(7)}) = b_1 s^{-1}\omega_0^{(7)}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho},\quad \rho^{-4}D_{77}(\theta_p^{(7)}) = b_1b_2(\omega_0^{(7)}(s))^3 + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}. \tag{3.44}$$

Получение асимптотического равенства для $D_{75}(\theta_p^{(7)})$ ввиду наличия ρ^6 в выражении $D_{75}(\theta)$ требует использования асимптотического представления $\theta_p^{(7)}$ с точностью до второй степени ρ^{-1}, что легко находится из (2.31): $\theta_p^{(7)} = \omega_0^{(7)}(s) + \omega_1^{(7)}(s)\,\rho^{-1} + \omega_2^{(7)}(s)\,\rho^{-2} + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}$. Подставляя это в выражение $D_{75}(\theta)$ из (3.43), придем к асимптотическому равенству

$$\rho^{-4}D_{75}(\theta_p^{(7)}) = b_1b_2\omega_0^{(7)}(s)\,\rho^2 + b_1b_2\omega_1^{(7)}(s)\,\rho + (b_1 + b_2)(\omega_0^{(7)}(s))^3 + b_1b_2\omega_2^{(7)}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}. \tag{3.45}$$

Точно так же использование асимптотического представления для $\theta_p^{(7)}$ с точностью до первой степени ρ^{-1} дает

$$\rho^{-4}D_{76}(\theta_p^{(7)}) = b_1b_2(\omega_0^{(7)}(s))^2\rho + 2b_1b_2\omega_0^{(7)}(s)\,\omega_1^{(7)}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}. \tag{3.46}$$

Принимая во внимание (3.44) — (3.46) и (3.10), (3.12), (3.13), находим

$$u_{j7}(x,\ \rho,\ s) = s\left\{\rho^2\eta_{j72}(s) + \rho\eta_{j71}(s) + \eta_{j70}(s) + \frac{E(\rho,\ s)}{\rho}\right\}\exp(\theta_p^{(7)}x), \tag{3.47}$$

где $\eta_{j72}(s) = 0$ при $j \neq 5$, $\eta_{572}(s) = \dfrac{1}{4sB^{(7)}(s)} \to \dfrac{-1}{8g_{11}^{(7)}}$ при $s \to \infty$,

$$\eta_{571}(s) = \frac{\omega_1^{(7)}(s)}{4s\omega_0^{(7)}(s)\,B^{(7)}(s)} \to \frac{-g_{20}^{(7)}}{8g_{11}^{(7)}} \text{ при } s \to \infty,$$

$$\eta_{570}(s) = \frac{(b_1 + b_2)(\omega_0^{(7)}(s))^3 + b_1b_2\omega_2^{(7)}(s)}{4b_1b_2\omega_0^{(7)}(s)\,B^{(7)}(s)} \to \frac{b_1 + b_2 - b_1b_2(g_{30}^{(7)})^2}{8b_1b_2g_{11}^{(7)}} \text{ при } s\to\infty,$$

$$\eta_{j71}(s) = 0 \text{ при } j \neq 5,\ 6,\quad \eta_{671}(s) = \frac{\omega_0^{(7)}(s)}{4sB^{(7)}(s)} \to \frac{1}{8g_{11}^{(7)}} \text{ при } s \to \infty, \tag{3.48}$$

$$\eta_{j70}(s) = 0 \text{ при } j = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\quad \eta_{670}(s) = \frac{2\omega_1^{(7)}(s)}{4sB^{(7)}(s)} \to \frac{-g_{20}^{(7)}}{4g_{11}^{(7)}} \text{ при } s\to\infty,$$

$$\eta_{770}(s) = \eta_{77}(s) = \frac{(\omega_0^{(7)}(s))^2}{4sB^{(7)}(s)} \to \frac{1}{g_{11}^{(7)}} \text{ при } s \to \infty.$$

Наконец, для $D_{8j}(\theta)$ имеем выражения:

$$D_{81}(\theta) = Q_1\rho^3 s^{-1}\theta^3 + (a_1b_2\rho^5 s^{-1} - iP_1Q_2\rho^3 s^{-1})\,\theta,$$

$$D_{82}(\theta) = -Q_1\rho^2 s^{-1} + iP_1Q_2\rho^2 s^{-1} - Q_1(a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho^3 s^{-1}\theta^2,$$
$$D_{83}(\theta) = -(P_2\rho^3 s^{-1} + Q_1P_2\rho^3 s^{-2})\theta^2 - a_1P_2\rho^3 s^{-1} - b_1P_2\rho^5 s^{-1},$$
$$D_{84}(\theta) = (Q_1P_2\rho^2 s^{-2} - Q_2\rho^2 s^{-1})\theta^3 - (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)Q_2\rho^3 s^{-1}\theta,$$
$$D_{85}(\theta) = \rho^3\theta^4 - [P_1P_2\rho^3 s^{-3} + a_2\rho^3 + b_2\rho^5 - (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\rho]\theta^2 + b_1b_2\rho^4,$$
$$D_{86}(\theta) = \rho^2\theta^5 + (a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho^3\theta^3 - (a_1\rho^{-1} + b_1\rho)\rho^3\theta^3 -$$
$$-(a_1\rho^{-1} + b_1\rho)(a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\theta,$$
$$D_{87}(\theta) = \rho\theta^6 - (a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho^2\theta^4 + a_1a_2\rho + (a_1b_2 + a_2b_1)\rho^3 + b_1b_2\rho^5,$$
$$D_{88}(\theta) = \theta^7 + P_1P_2s^{-2}\theta^5 + (a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho\theta^4 + b_1\rho^2\theta^2 +$$
$$+(a_1\rho^{-1} + b_1\rho)(a_2\rho^{-1} + b_2\rho)\rho^2\theta^3.$$

Из этих формул вычислениями, аналогичными проделанным выше, получаем асимптотические представления:

$$u_{j8}(x, \rho, s) = s\left\{\eta_{j81}(s)\rho + \eta_{j80}(s) + \frac{E(\rho, s)}{\rho}\right\}\exp(\theta_p^{(8)}x), \qquad (3{,}49)$$

где $\eta_{j81}(s)=0$ при $j \neq 1, 3, 5, 7$, $\eta_{181}(s) = \dfrac{a_1}{4b_1sB^{(8)}(s)} \to \dfrac{-a_1}{8b_1g_{11}^{(8)}}$ при $s\to\infty$,

$$\eta_{381}(s) = -\frac{P_2}{4b_2s\omega_0^{(8)}(s)B^{(8)}(s)} \to \frac{-P_2}{8b_2g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty,$$

$$\eta_{581}(s) = \frac{1}{4b_1sB^{(8)}(s)} \to \frac{-1}{8b_1g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty,$$

$$\eta_{781}(s) = \frac{1}{4s\omega_0^{(8)}(s)B^{(8)}(s)} \to \frac{1}{8g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty,$$

$$\eta_{180}(s) = \frac{a_1\omega_2^{(8)}(s)}{4b_1s\omega_0^{(8)}(s)B^{(8)}(s)} \to \frac{a_1g_{20}^{(8)}}{8g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty,$$

$$\eta_{280}(s) = -\frac{Q_2\omega_0^{(8)}(s)}{4b_1B^{(8)}(s)} \to \frac{-Q_2}{8b_1g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty, \ \eta_{380}(s) = 0,$$

$$\eta_{480}(s) = \frac{-Q_2}{4b_2sB^{(8)}(s)} \to \frac{Q_2}{4b_2g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty,$$

$$\eta_{580}(s) = \frac{b_1 + \omega_2^{(8)}(s)}{4b_1s\omega_0^{(8)}(s)B^{(8)}(s)} \to \frac{b_1 + g_{20}^{(8)}}{8b_1g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty,$$

$$\eta_{680}(s) = \frac{(\omega_0^{(8)}(s))^2}{4sB^{(8)}(s)} \to \frac{-1}{8g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty, \ \eta_{780}(s) = 0, \qquad (3.50)$$

$$\eta_{880}(s) = \frac{(\omega_0^{(8)}(s))^2}{4sB^{(8)}(s)} \to \frac{-1}{8g_{11}^{(8)}} \text{ при } s\to\infty.$$

Теперь докажем, что построенные нами по формулам (3.1), (3.2) столбцы $u^{(k)}(x, \rho, s)$ $(k = \overline{1, 8})$ линейно независимы при больших ρ и s. С этой целью вычислим детерминант этой матрицы U:

$$U = \|u_{ij}\|_1^8 \qquad (3.51)$$

при больших ρ. Подставляя асимптотические представления (3.19), (3.21), (3.23), (3.25), (3.33), (3.41), (3.47), (3.49) в определитель матрицы U, получим

$$\det U = s^4 \Big\{ \exp[(\theta_p^{(1)} + \cdots + \theta_p^{(8)})x]\, \eta_{880}(s)\, \eta_{770}(s)\, \eta_{660}(s)\, \eta_{55}(s) \times$$

$$\times (\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{21}\eta_{12})(\eta_{33}\eta_{44} - \eta_{43}\eta_{34}) + \frac{E(x,\ \rho,\ s)}{\rho} = s^4 \Big\{ \exp[(\theta_p^{(1)} + \theta_p^{(2)} + \cdots$$

$$\cdots + \theta_p^{(8)})x]\, \eta_{88}(s)\, \eta_{77}(s)\, \eta_{66}(s)\, \eta_{55}(s)\, \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{E(x,\ \rho,\ s)}{\rho} \Big\}. \quad (3.52)$$

Отсюда, принимая во внимание (1.5), (3.31), (3.40), (3.42), (3.48), (3.50), получаем

$$\lim_{s\to\infty} s^{-4} \det U \exp[-(\theta_p^{(1)} + \cdots + \theta_p^{(8)})x] =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{8^4}\,\frac{1}{g_{11}^{(5)} g_{11}^{(6)} g_{11}^{(7)} g_{11}^{(8)}} = \frac{1}{4\cdot 8^4 d} \neq 0, \quad (3.53)$$

согласно тому, что $g_{11}^{(k)}$ $(k = \overline{5, 8})$ является решениями уравнения $g_{11}^4 + (b_1^{-1} b_3 + Q_3)\, g_{11}^2 + d = 0$. Из (3.53) следует обратимость матрицы (3.51) при больших ρ.

§ 4. СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЯДЕР СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $Z(x) = \|z_{ij}\|_1^8$ — обратимая матрица 8-го порядка произвольных непрерывно дифференцируемых функций $z_{ij}(x)$ на $[0, s]$, а $y(x) = \mathrm{colon}\,[y_1(x), \ldots$ $\ldots, y_8(x)]$ — столбец произвольных непрерывно дифференцируемых функций на этом же интервале.

Обозначим через $z_k(x) = (z_{k1}(x), \ldots, z_{k8}(x))$ k-ю строк у матрицы $Z(x)$ и через x_k — произвольные фиксированные точки интервала $[0, s]$. Очевидно, интегрированием по частям получим

$$\int_{x_k}^{x} z_k(\xi) \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} + M(\rho,\ s)\, y(\xi) \right] d\xi = z_k(x)\, y(x) - z_k(x_k)\, y(x_k) -$$

$$- \int_{x_k}^{x} \left[\frac{dz_k(\xi)}{d\xi} - z_k(\xi)\, M(\rho,\ s) \right] y(\xi)\, d\xi. \quad (4.1)$$

Если $y(x)$ есть решение системы

$$\frac{dy}{dx} + M(\rho,\ s)\, y = 0, \quad (4.2)$$

непрерывно дифференцируемое на $[0, s]$, то интеграл в левой части (4.1) исчезнет, и мы придем к системе интегральных уравнений

$$z_k(x)\, y(x) = z_k(x_k)\, y(x_k) + \int_{x_k}^{x} \left[\frac{dz_k(\xi)}{d\xi} - z_k(\xi)\, M(\rho,\ s) \right] y(\xi)\, d\xi \quad (4.3)$$

для решений системы (4.2). Если c_{kl} $(k,\ l = \overline{1, 8})$ — произвольно заданные числа, то, как видно из (4.3), решение $y^{(l)}(x)$ системы (4.2), удовлетворяющее условиям

$$z_k(x_k)\, y^{(l)}(x_k) = c_{kl} \quad (k,\ l = \overline{1, 8}), \quad (4.4)$$

окажется решением системы интегральных уравнений*)

$$z_k(x)\, y^{(l)}(x) = c_{kl} + \int\limits_{x_k}^{x} \left[\frac{dz_k(\xi)}{d\xi} - z_k(\xi)\, M(\rho,\ s) \right] y^{(l)}(\xi)\, d\xi, \tag{4.5}$$

где столбец $y^{(l)}(x)$ имеет вид

$$y^{(l)}(x) = \mathrm{colon}\,[y_{1l}(x),\ \ldots\, y_{8l}(x)]. \tag{4.6}$$

Систему (4.5) можно записать в развернутом виде

$$\sum_{q=1}^{8} z_{kq}(x)\, y_{ql}(x) = c_{kl} + \int\limits_{x_k}^{x} \sum_{q=1}^{8} \left[\frac{dz_{kq}}{d\xi} - \sum_{j=1}^{8} z_{kj}(\xi)\, M_{jq}(\rho,\ s) \right] y_{ql}(\xi)\, d\xi \quad (k = \overline{1,8}), \tag{4.7}$$

где $M_{jq}(\rho,\ s)$—элементы матрицы $M(\rho,\ s)$, определенные в (1.9). Согласно выбору матрицы $Z(x)$, систему (4.7) можно разрешить относительно $y_{il}(x)$ $(i,\ l = \overline{1,8})$:

$$y_{il}(x) = \sum_{k=1}^{8} \frac{\Delta_{ki}(x)}{\Delta(x)} c_{kl} + \sum_{k=1}^{8} \sum_{q=1}^{8} \int\limits_{x_k}^{x} \frac{\Delta_{ki}(x)}{\Delta(x)} \left[\frac{dz_{kq}(\xi)}{d\xi} - \sum_{j=1}^{8} z_{kj}(\xi)\, M_{jq}(\rho,\ s) \right] y_{ql}(\xi)\, d\xi, \tag{4.8}$$

где $\Delta(x) = \det Z(x)$, а $\Delta_{ki}(x)$ — алгебраические дополнения элемента $(k,\ i)$ в определителе $\Delta(x)$. Произвольно заданные числа c_{kl} выберем так, чтобы

$$c_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases} \tag{4.9}$$

Тогда из (4.8) получим систему интегральных уравнений

$$y_{il}(x) = \frac{\Delta_{li}(x)}{\Delta(x)} + \sum_{k=1}^{8} \sum_{q=1}^{8} \int\limits_{x_k}^{x} \frac{\Delta_{ki}(x)}{\Delta(x)} \left[\frac{dz_{kq}(\xi)}{d\xi} - \sum_{j=1}^{8} z_{kj}(\xi)\, M_{jq}(\rho,\ s) \right] y_{ql}(\xi)\, d\xi \quad (i = \overline{1,8};\ l = \overline{1,8}). \tag{4.10}$$

Как видно из хода рассуждений, всякое непрерывно дифференцируемое решение системы (4.2), удовлетворяющее условиям (4.4), где числа c_{kl} определены в (4.9), является решением системы интегральных уравнений (4.10). Можно доказать и обратное, т. е. всякое непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений является решением системы (4.2), удовлетворяющим условиям (4.4) с таким выбором чисел c_{kl}, который дан в (4.9). В самом деле, пусть (4.6) есть решение системы интегральных уравнений для фиксированного номера l. Тогда (4.10) превращаются в систему, эквивалентную тождествам

$$z_k(x)\, y^{(l)}(x) = \delta_{kl} + \int\limits_{x_k}^{x} \left[\frac{dz_k(\xi)}{d\xi} - z_k(\xi)\, M(\rho,\ s) \right] y^{(l)}(\xi)\, d\xi, \tag{4.11}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера.

Применяя к строке $z_k(x)$ и к столбцу $y^{(l)}(x)$ формулу Лагранжа (4.1), с учетом условий (4.4), (4.9) придем к тождествам

*) Речь идет о непрерывно дифференцируемом решении на $[0,\ s]$.

$$z_k(x)\,y^{(l)}(x)=\delta_{kl}+\int\limits_{x_k}^{x} z_k(x)\left[\frac{dy^{(l)}(\xi)}{d\xi}+M(\rho,\ s)\,y^{(l)}(\xi)\right]d\xi+$$
$$+\int\limits_{x_k}^{x}\left[\frac{dz_k(\xi)}{d\xi}-z_k(\xi)\,M(\rho,\ s)\right]y^{(l)}(\xi)\,d\xi. \tag{4.12}$$

Вычитая из (4.2) тождества (4.11) по частям, получим $\int\limits_{x_k}^{x} z_k(\xi)\left[\frac{dy^{(l)}(\xi)}{d\xi}+\right.$ $\left.+M(\rho,\ s)\,y^{(l)}(\xi)\right]d\xi=0$. Дифференцируя по x последние тождества, будем иметь $z_k(x)\left[\frac{dy^{(l)}(x)}{dx}+M(\rho,\ s)\,y^{(l)}(x)\right]\equiv 0$ или $Z(x)\left[\frac{dy^{(l)}(x)}{dx}+M(\rho,\ s)\times\right.$ $\left.\times y^{(l)}(x)\right]\equiv 0$. Принимая во внимание обратимость матрицы $Z(x)$, умножением слева на $Z^{-1}(x)$ из последних тождеств получаем $\frac{dy^{(l)}(x)}{dx}+M(\rho,\ s)\times$ $\times y^{(l)}(x)\equiv 0$. Таким образом, доказано, что $y^{(l)}(x)$ является решением системы (4.2). Из (4.11) получаем

$$z_k(x_k)\,y^{(l)}(x_k)=\delta_{kl}. \tag{4.13}$$

Воспользуясь тем фактом, что всякое непрерывно дифференцируемое решение $y^{(l)}(x,\ \rho,\ s)$ системы (4.2), удовлетворяющее условиям (4.13), является решением системы интегральных уравнений (4.10), и обратно для построения решений системы (4.2), обладающих асимптотическими представлениями построенных выше столбцов $u^{(k)}(x,\ \rho,\ s)$, матрицу $Z(x)$ выберем следующим образом:

$$Z(x)=U^{-1}(x,\ \rho,\ s), \tag{4.14}$$

где

$$U(x,\ \rho,\ s)=\|u_{jk}(x,\ \rho,\ s)\|_1^8, \tag{4.15}$$

$u_{jk}(x,\ \rho,\ s)$ $(j,\ k=\overline{1,\ 8})$ определены формулами (3.2). Выше доказано, что матрица $U(x,\ \rho,\ s)$ обратима при достаточно больших ρ и при всех целочисленных s для $x\in[0,\ s]$. По выбору (4.14) имеем

$$\frac{\Delta_{li}(x)}{\Delta(x)}=u_{il}(x,\ \rho,\ s)\quad (i,\ l=\overline{1,\ 8}). \tag{4.16}$$

Тогда всякое непрерывно дифференцируемое решение системы (4.2), удовлетворяющее условиям (4.13), оказывается решением системы интегральных уравнений

$$y_{il}(x,\ \rho,\ s)=u_{il}(x,\ \rho,\ s)+\sum_{k=1}^{8}\sum_{q=1}^{8}\int\limits_{x_k}^{x} Q_{kq}^{(i)}(x,\ \xi,\ \rho,\ s)\,y_{ql}(\xi,\ \rho,\ s)\,d\xi \tag{4.17}$$

и обратно, где

$$Q_{kq}^{(i)}(x,\ \xi,\ \rho,\ s)=u_{ik}(x,\ \rho,\ s)\left[\frac{dz_{kq}(\xi,\ \rho,\ s)}{d\xi}-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{8} z_{kj}(\xi,\ \rho,\ s)\,M_{jq}(\rho,\ s)\right]. \tag{4.18}$$

Теперь докажем, что система интегральных уравнений (4.17) имеет непрерывно дифференцируемое решение на $[0,\ s]$ при больших ρ и всех целочисленных s, причем первое слагаемое u_{il} в правой части (4.17) при больших ρ и всех целочисленных $s\geqslant 1$ есть главная часть $y_{il}(x,\ \rho,\ s)$. Для этого сначала необходимо получить подходящую оценку ядер (4.18) при больших ρ. Заметим, что выражение, заключенное в квадратные скобки в правой части (4.18), является элементом (k, q) матрицы $\frac{dZ(\xi, \rho, s)}{d\xi} - Z(\xi, \rho, s) M(\rho, s)$:

$$\left\{\frac{dZ(\xi, \rho, s)}{d\xi} - Z(\xi, \rho, s) M(\rho, s)\right\}_{kq} = \\ = \frac{dz_{kq}(\xi, \rho, s)}{d\xi} - \sum_{j=1}^{8} z_{kj}(\xi, \rho, s) M_{jq}(\rho, s). \tag{4.19}$$

Далее, по определению $Z(x)$

$$U(\xi, \rho, u) Z(\xi, \rho, s) = e, \quad \xi \in [0, s], \tag{4.20}$$

где e — единичная матрица 8-го порядка. Из (4.20) имеем $\frac{dU}{d\xi} Z + U \frac{dZ}{d\xi} = 0$, откуда получаем $\frac{dZ}{d\xi} = -U^{-1} \frac{dU}{d\xi} U^{-1}$. Тогда

$$\frac{dZ}{d\xi} - ZM(\rho, s) = -U^{-1} \frac{dU}{d\xi} U^{-1} - U^{-1} M(\rho, s) = \\ = -U^{-1} \frac{dU}{d\xi} U^{-1} - U^{-1} M(\rho, s) U U^{-1} = \\ = -U^{-1}\left\{\frac{dU}{d\xi} + MU\right\} U^{-1}. \tag{4.21}$$

Из (4.19) и (4.21) следует справедливость тождества

$$\frac{dz_{kq}(\xi, \rho, s)}{d\xi} - \sum_{j=1}^{8} z_{kj}(\xi, \rho, s) M_{jq}(\rho, s) = \\ = -\sum_{j=1}^{8} \sum_{r=1}^{8} z_{kr}(\xi, \rho, s) \left(\frac{du_{rj}(\xi, \rho, s)}{d\xi} + \right. \\ \left. + \sum_{t=1}^{8} M_{rt}(\rho, s) u_{tj}(\xi, \rho, s)\right) z_{jq}(\xi, \rho, s). \tag{4.22}$$

Эта формула поможет нам в получении асимптотической оценки ядер (4.18)

В самом деле, из (3.3) имеем

$$\frac{du_{rj}(\xi, \rho, s)}{d\xi} + \sum_{t=1}^{8} M_{rt}(\rho, s) u_{tj}(\xi, \rho, s) = \\ = \begin{cases} \dfrac{D(\theta_p^{(j)})}{D'(\theta_p^{(j)})} \exp(\theta_p^{(j)} x) & \text{при } r = j, \\ 0 & \text{при } r \neq j \ (r, j = \overline{1, 8}), \end{cases} \tag{4.23}$$

причем, согласно (2.33),

$$D(\theta_p^{(j)}) = \rho^{8-(p+1)} s^{-(p+1)} E^{(j)}(\rho, s) \quad (j = \overline{1, 8}). \tag{4.24}$$

где $E^{(j)}(\rho, s)$ ограничено при больших ρ равномерно по $s \geqslant 1$. Принимая во внимание (3.10), (4.24), из (4.23) получаем

$$\frac{du_{rj}(\xi, \rho, s)}{d\xi} + \sum_{t=1}^{8} M_{rt}(\rho, s)\, u_{tj}(\xi, \rho, s) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\rho^{8-(p+1)}E^{(j)}(\rho, s)}{(A^{(j)} + \rho^{-1}E^{(j)}(\rho, s))\,\rho^7 s^{p+1}} \exp(\theta_p^{(j)}\xi) & \text{при } r = j, \\ 0 & \text{при } r \neq j \ (j = \overline{1, 4}), \end{cases} \tag{4.25}$$

$$\frac{du_{rj}(\xi, \rho, s)}{d\xi} + \sum_{t=1}^{8} M_{rt}(\rho, s)\, u_{tj}(\xi, \rho, s) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{sE^{(j)}(\rho, s)}{(A^{(j)}(s) + \rho^{-1}E_p^{(j)}(\rho, s))\,\rho^4 s^{p+1}} \exp(\theta_p^{(j)}\xi) & \text{при } r = j, \\ 0 & \text{при } r \neq j \ (j = \overline{5, 8}), \end{cases} \tag{4.26}$$

при этом, как видно из формул (3.11) — (3.13), $A^{(j)}$ $(j = \overline{1, 4})$, $A^{(j)}_{(s)}$ $(j=\overline{5, 8}$ отличны от нуля при всех целочисленных $s \geqslant 1$.

Согласно формулам (2.21), (2.31), имеет место асимптотическое равенство

$$\exp(\theta_p^{(j)}x) = \begin{cases} \exp(g_{00}^{(j)}\rho x)\, \exp\left(\dfrac{x}{\rho} E^{(j)}(\rho, s)\right) & \text{при } j = \overline{1, 4}, \\ \exp(g_{10}^{(j)} x) \exp\left(\dfrac{x}{\rho} E^{(j)}(\rho, s)\right) & \text{при } j = \overline{5, 8}, \end{cases} \tag{4.27}$$

из которого видно, что второй множитель непрерывно дифференцируем по $x \in [0, s]$ и равномерно ограничен по $s \geqslant 1$ при больших ρ (при $|\lambda| \geqslant 1$ см. (1.5)) и $x \in [0, s]$. Следовательно, формулы (4.25), (4.26) можно объединить и получить следующие асимптотические представления:

$$\frac{du_{rj}(\xi, \rho, s)}{d\xi} + \sum_{t=1}^{8} M_{rt}(\rho, s)\, u_{tj}(\xi, \rho, s) =$$

$$= \frac{E_{rj}(\xi, \rho, s)}{\rho^{p-3}s^p} \exp(\varphi_j \xi), \tag{4.28}$$

где

$$E_{rj}(\xi, \rho, s) = \frac{E^{(j)}(\rho, s)}{(A^{(j)} + \rho^{-1}E^{(j)}(\rho, s))\,\rho^3 s^{p+1}} \exp\left(\frac{x}{\rho} E^{(j)}(\rho, s)\right)$$

$$\text{при } j = \overline{1, 4}, \tag{4.29}$$

$$E_{rj}(\xi, \rho, s) = \frac{E^{(j)}(\rho, s)}{A^{(j)}(s) + \rho^{-1}E^{(j)}(\rho, s)} \exp\left(\frac{x}{\rho} E^{(j)}(\rho, s)\right) \text{ при } j = \overline{5, 8},$$

$$\varphi_j = \begin{cases} g_{00}^{(j)}\rho s & \text{при } j = \overline{1, 4}, \\ g_{10}^{(j)} & \text{при } j = \overline{5, 8}. \end{cases} \tag{4.30}$$

Из (4.29) видно, что $E_{rj}(\xi, \rho, s)$ непрерывно дифференцируема по $\xi \in [0, s]$ и ограничена при больших ρ $(|\lambda| \geqslant 1)$ равномерно по всем целочисленным $s \geqslant 1$.

Из (4.22) ясно, что для получения асимптотических представлений левой части (4.22) необходимо получить их для $z_{kr}(\xi, \rho, s)$. Заметим, что $z_{kr}(\xi, \rho, s)$ — элементы U^{-1} и, следовательно, они представляют собой отношение алгебраического дополнения элемента (r, k) в определителе матрицы U к самому определителю. Далее, как видно из структуры определителя матрицы U и асимптотических формул (3.19), (3.21), (3.23), (3.25), (3.33), (3.41), (3.47), (3.49), а также из (3.53) для $z_{kr}(\xi, \rho, s)$, имеют место асимптотические представления

$$z_{kr}(\xi, \rho, s) = \rho^4 \exp(-\varphi_k \xi) E_{kr}^{(1)}(\xi, \rho, s) \quad (k, r = \overline{1, 8}), \tag{4.31}$$

где $E_{kr}^{(1)}(\xi, \rho, s)$ непрерывно дифференцируема по $\xi \in [0, s]$ и ограничена при больших ρ равномерно по целочисленным $s \geqslant 1$.

Согласно (4.28) и (4.31), из (4.22) следует справедливость асимптотических представлений

$$\frac{dz_{kq}(\xi, \rho, s)}{d\xi} - \sum_{j=1}^{8} z_{kj}(\xi, \rho, s) M_{jq}(\rho, s) = \frac{E_{kq}(\xi, \rho, s)}{\rho^{p-11} s^{p-8}}. \tag{4.32}$$

Наконец, на основании формул (3.19), (3.21), (3.23), (3.25), (3.33), (3.41), (3.47), (3.49) и (4.31), из (4.18) получаем асимптотические представления

$$Q_{kq}(x, \xi, \rho, s) = \frac{\mathscr{E}_{kq}^{(i)}(x, \xi, \rho, s)}{\rho^{p-13} s^{p-9}} \exp[\varphi_k (x - \xi)], \tag{4.33}$$

где $\mathscr{E}_{kq}^{(i)}(x, \xi, \rho, s)$ непрерывно дифференцируема по x, $\xi \in [0, s]$ и ограничена при больших ρ, x, $\xi \in [0, s]$ равномерно по целочисленным s.

Из (4.33) следует справедливость асимптотических оценок

$$|Q_{kq}(x, \xi, \rho, s)| \leqslant \frac{C}{\rho^3 s^7} \exp[\operatorname{Re}\varphi_k (x - \xi)], \quad \left|\frac{\partial Q_{kq}(x, \xi, \rho, s)}{\partial x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\rho^2 s^7} \exp[\operatorname{Re}\varphi_k (x - \xi)] \quad (k, q = \overline{1, 8}) \tag{4.34}$$

при $p \geqslant 16$, выполнение которого предполагается в дальнейших выкладках, где C — постоянное число.

§ 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭТИХ РЕШЕНИЙ

Теперь докажем существование непрерывно дифференцируемых на $[0, s]$ решений системы интегральных уравнений

$$y_{il}(x, \rho, s) = u_{il}(x, \rho, s) + \sum_{k=1}^{8} \sum_{q=1}^{8} \int_{x_k}^{x} Q_{kq}^{(i)}(x, \xi, \rho, s) y_{ql}(\xi, \rho, s)\, d\xi \tag{5.1}$$

методом последовательных приближений, где $Q_{kq}^{(i)}(x, \xi, \rho, s)$ определены формулой (4.18). Принимая за нулевые приближения функции

$$y_{il}^{(0)}(x, \rho, s) = u_{il}(x, \rho, s), \tag{5.2}$$

определим последовательность функций

$$y_{il}^{(\nu)}(x, \rho, s) = \sum_{k=1}^{8} \sum_{q=1}^{8} \int_{x_k}^{x} Q_{kq}^{(i)}(x, \xi, \rho, s) y_{il}^{(\nu-1)}(\xi, \rho, s)\, d\xi. \tag{5.3}$$

В этом параграфе докажем, что система (5.1) имеет непрерывно дифференцируемые решения $y_{il}(x, \rho, s)$ $(i, l = \overline{1, 8})$ при больших ρ, представимые суммами рядов

$$y_{il}(x, \rho, s) = u_{il}(x, \rho, s) + y_{il}^{(1)}(x, \rho, s) + \ldots + y_{il}^{(\nu)}(x, \rho, s) + \ldots \tag{5.4}$$

Для этого прежде всего покажем, что комплексную ρ-плоскость можно разбить на конечное число взаимно непересекающихся областей Ω_j, в каждой из которой при подходящей нумерации чисел (4.30) выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}\varphi_1 \leqslant \operatorname{Re}\varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\varphi_8. \tag{5.5}$$

В самом деле, геометрическое место точек $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, для которых

$$\operatorname{Re}\varphi_k - \operatorname{Re}\varphi_j = 0 \quad (k \neq j) \tag{5.6}$$

при $j,\ k = \overline{1,\ 4}$, дает $0 = \rho_1 (g_{00}^{(k)} - g_{00}^{(j)})$. Принимая во внимание то, что числа $g_{00}^{(k)}$ действительны и различны, из последнего равенства получаем $\rho_1 = 0$.

Итак, геометрическим местом точек ρ, для которых выполняется равенство (5.6) при $j,\ k = \overline{1,\ 4}$, является мнимая ось ρ-плоскости.

Геометрическим местом точек ρ, для которых выполняется равенство (5.6) при $k = \overline{1,\ 4}$, $j = \overline{5,\ 8}$, являются прямые, определяемые уравнениями

$$\rho_1 = g_{10}^{(j)}/g_{00}^{(k)} \quad (k = \overline{1,\ 4},\ j = \overline{5,\ 8}). \tag{5.7}$$

Согласно (2.13), (2.24), $g_{00}^{(1)} = \sqrt{-b_1}$, $g_{00}^{(2)} = -\sqrt{-b_1}$, $g_{00}^{(3)} = \sqrt{-b_2}$, $g_{00}^{(4)} = -\sqrt{-b_2}$, $g_{10}^{(5)} = g_{10}^{(6)} = 1$, $g_{10}^{(7)} = g_{10}^{(8)} = -1$. Следовательно, уравнения (5.7) определяют четыре прямые, параллельные мнимой оси. Этими прямыми и мнимой осью ρ-плоскость разбивается на пять областей Ω_j, из которых две являются полуплоскостями, а три — полосами, параллельными мнимой оси.

Очевидно, что в каждой из этих областей Ω_j числа $\rho_1 g_{00}^{(1)}$, $\rho_1 g_{00}^{(2)}$, $\rho_1 g_{00}^{(3)}$, $\rho_1 g_{00}^{(4)}$, $g_{10}^{(5)}$, $g_{10}^{(6)}$, $g_{10}^{(7)}$, $g_{10}^{(8)}$ можно расположить в возрастающем порядке, и тогда в каждой из этих областей Ω_j будут выполняться неравенства (5.5).

Рассмотрим одну из областей Ω_j, в которой при подходящей нумерации φ_j выполняются неравенства (5.5), и докажем равномерную сходимость ряда (5.4) при достаточно больших ρ из этой области.

Асимптотические представления (3.19), (3.21), (3.23), (3.25), (3.39), (3.41), (3.47), (3.49) позволяют получить оценки

$$|u_{il}(x,\ \rho,\ s)| \leqslant C_1 s\,|\rho|^2 \exp(\operatorname{Re}\varphi_l x) \quad (i,\ l = \overline{1,\ 8}), \tag{5.8}$$

справедливые при достаточно больших ρ и всех целочисленных $s \geqslant 1$, где C_1 — положительное постоянное. Теперь для того чтобы оценить слагаемые ряда (5.4), прежде всего правую часть (5.3) представим в виде $y_{il}^{(\nu)}(x, \rho, s) = \sum\limits_{k=1}^{l} \sum\limits_{q=1}^{8} \int\limits_{x_k}^{x} Q_{kq}^{(i)}(x,\ \xi,\ \rho,\ s)\, y_{ql}^{(\nu-1)}(\xi,\ \rho,\ s)\, d\xi + \sum\limits_{k=l+1}^{8} \sum\limits_{q=1}^{8} \int\limits_{x_k}^{x} Q_{kq}^{(i)}(x, \xi, \rho, s) \times$ $\times\, y_{ql}^{(\nu-1)}(\xi,\ \rho,\ s)\, d\xi$. В первой из сумм правой части последнего равенства постоянные пределы x_k интеграла выберем так: $x_1 = x_2 = \ldots = x_l = 0$, а во второй сумме положим $x_{l+1} = x_{l+2} = \ldots = x_8 = s$. После такого выбора для $y_{il}^{(\nu)}$ будем иметь

$$\begin{aligned} y_{il}^{(\nu)}(x,\ \rho,\ s) = &\sum_{k=1}^{l} \sum_{q=1}^{8} \int_{0}^{x} Q_{kq}^{(i)}(x,\ \xi,\ \rho,\ s)\, y_{ql}^{(\nu-1)}(\xi,\ \rho,\ s)\, d\xi + \\ &+ \sum_{k=l+1}^{8} \sum_{q=1}^{8} \int_{x}^{s} Q_{kq}^{(i)}(x,\ \xi,\ \rho,\ s)\, y_{ql}^{(\nu-1)}(\xi,\ \rho,\ s)\, d\xi. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Принимая во внимание (4.34), (5.8), из (5.9) при достаточно больших ρ получим

$$|y_{il}^{(1)}(x,\ \rho,\ s)| \leqslant \frac{CC_1}{\rho^{3-2}\, s^{7-1}} \left\{ \sum_{k=1}^{l} \sum_{q=1}^{8} \int_0^x \exp[\operatorname{Re}\varphi_k (x-\xi)] \exp(\operatorname{Re}\varphi_l \xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=l+1}^{8} \sum_{q=1}^{8} \int_x^s \exp[\operatorname{Re}\varphi_k (x-\xi)] \exp(\operatorname{Re}\varphi_l \xi)\, d\xi \right\}.$$

В силу неравенств (5.5), выполняющихся в области Ω_m, из последнего неравенства имеем

$$|y_{il}^{(1)}(x,\ \rho,\ s)| \leqslant \frac{CC_1}{\rho s^6} \left\{ \sum_{k=1}^{l} \sum_{q=1}^{8} \int_0^x \exp[\operatorname{Re}\varphi_l (x-\xi) + \operatorname{Re}\varphi_l \xi]\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=l+1}^{8} \sum_{q=1}^{8} \int_x^s \exp[\operatorname{Re}\varphi_l (x-\xi) + \operatorname{Re}\varphi_l \xi]\, d\xi \right\} = \frac{CC_1 \exp(\operatorname{Re}\varphi_l x)}{\rho s^6} \times$$

$$\times \{8lx + 8(8-l)(s-x)\} \leqslant \frac{CC_1 \cdot 8^2}{\rho s^5} \exp(\operatorname{Re}\varphi_l x). \tag{5.10}$$

Методом математической индукции нетрудно доказать справедливость неравенства

$$|y_{il}^{(\nu)}(x,\ \rho,\ s)| \leqslant C_1 \frac{(C\cdot 8^2)^\nu}{\rho^{3\nu-2}\, s^{6\nu-1}} \exp(\operatorname{Re}\varphi_l x) \tag{5.11}$$

при больших ρ в области Ω_m для любого натурального ν. Из оценки (5.11) непосредственно следует равномерная сходимость ряда (5.4) по $x \in [0,\ s]$ при достаточно больших ρ в области Ω_m и всех целочисленных $s \geqslant 1$. Следовательно, суммы $y_{il}(x,\ \rho,\ s)$ рядов (5.4) непрерывных функций по $x \in [0,\ s]$ есть непрерывные функции по x на интервале $[0,\ s]$. Легко показать, что $y_{il}(x,\ \rho,\ s)$ $(i = \overline{1,8})$ являются решениями систем интегральных уравнений при $l = \overline{1,8}$. На основании оценки (5.11) из (5.4) получаем также асимптотические представления $y_{il}(x,\ \rho,\ s) = u_{il}(x,\ \rho,\ s) + \exp(\operatorname{Re}\varphi_l x) \dfrac{E(x,\ \rho,\ s)}{\rho s^5}$. В силу непрерывной дифференцируемости по x функций $u_{il}(x,\ \rho,\ s)$ и ядер $Q_{kq}^{(i)}(x,\ \xi,\ \rho,\ s)$ решения $y_{il}(x,\ \rho,\ s)$ $(i=\overline{1,8})$ являются непрерывно дифференцируемыми по $x \in [0,\ s]$. Поэтому они являются решениями задачи (4.2), (4.13), причем решение этих задач единственно. Единственность решений систем интегральных уравнений, обладающих такими асимптотическими представлениями, которыми обладают функции $u_{il}(x,\ \rho,\ s)$ при больших ρ, можно доказать, используя системы (5.1). В самом деле, пусть система (5.1) имеет два решения: $y_{il}^{(1)}(x,\ \rho,\ s)$, $y_{il}^{(2)}(x,\ \rho,\ s)$, обладающих асимптотической оценкой

$$|y_{il}^{(r)}(x,\ \rho,\ s)| \leqslant C_1 s \rho^2 \exp(\operatorname{Re}\varphi_l x) \quad (r = 1,\ 2). \tag{5.12}$$

Их разность обозначим через

$$w_{il}(x,\ \rho,\ s) = y_{il}^{(1)}(x,\ \rho,\ s) - y_{il}^{(2)}(x,\ \rho,\ s). \tag{5.13}$$

Тогда, очевидно, $w_{il}(x,\ \rho,\ s)$ окажутся решениями однородных систем

$$w_{il}(x,\ \rho,\ s) = \sum_{k=1}^{8} \sum_{q=1}^{8} \int_{x_k}^{x} Q_{kq}^{(i)}(x,\ \xi,\ \rho,\ s)\, w_{ql}(\xi,\ \rho,\ s)\, d\xi. \tag{5.14}$$

По аналогичной схеме оценок из (5.14) для достаточно больших ρ из области Ω_m нетрудно получить неравенство $|w_{il}(x,\ \rho,\ s)| \leqslant \dfrac{C_1 (C\cdot 8^2)^\nu}{\rho^{3\nu-2}\, s^{6\nu-1}} \times \exp(\operatorname{Re}\varphi_l x)$, где ν — сколь угодно большое натуральное число, или

$|w_{il}(x, \rho, s)\exp(-\operatorname{Re}\varphi_l x)| \leqslant \dfrac{C_1(C\cdot 8^2)^{\nu}}{\rho^{3\nu-2}\, s^{6\nu-1}}$. Из последнего неравенства при $\nu\to\infty$ получим $w_{il}(x, \rho, s)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, нами доказана

Теорема. *Если коэффициенты P_k, Q_k $(k=\overline{1, 3})$, $-a_1, -a_2, a_3, -b_1, -b_2, b_3, d$ системы (1.1) — положительные числа и $b_1\neq b_2$, то существует фундаментальная матрица решений $y_{il}(x, \rho, s)$ $(i, l=\overline{1, 8})$ системы (4.2) или (1.7) (или (1.11)), допускающих в каждой из областей Ω_m плоскости комплексного параметра ρ (в которой при подходящей нумерации величин (4.30) выполняются неравенства (5.5)) асимптотические представления*

$$y_{il}(x, \rho, s) = u_{il}(x, \rho, s) + \exp(\varphi_l x)\,\frac{\mathscr{E}(x, \rho, s)}{\rho s^5}, \tag{5.15}$$

где $\mathscr{E}(x, \rho, s)$ непрерывно дифференцируема по $x\in[0, s]$ и ограничена при больших ρ равномерно по целочисленным $s\geqslant 1$. Функции $u_{il}(x, \rho, s)$ на всей плоскости комплексного параметра допускают асимптотические представления (3.19), (3.21), (3.23), (3.25), (3.39), (3.41), (3.47), (3.49).

Асимптотические представления $y_{il}(x, \rho, s) = y_{il}(x, \lambda s, s)$ как функции от λ, s при больших λ легко получаются из (5.4) путем оценки слагаемых на плоскости комплексного параметра λ. В этом случае границы областей Ω_m, в которых при подходящей нумерации величин φ_k выполняются неравенства (5.5), зависят от s, и эти границы с ростом s стягиваются к мнимой оси плоскости комплексного параметра λ. Асимптотические представления $y_{il}(x, \lambda, s)$ в этих областях получаются из (5.15) непосредственно заменой ρ на λs.

Литература

1. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек.— М.: Изд-во МГУ, 1963.
2. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла.— М.: Наука, 1964.
3. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложение произвольных функций в ряды.— Петроград, 1917.
4. Tamarkin J. D. — Math. Z., 1928, 27.
5. Birkhoff G. D.— Trans. Ann. Math. Soc., 1908, 9.

Азербайджанский государственный университет им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию 30 декабря 1981 г.

УДК 517.924.4

М. И. РАХИМБЕРДИЕВ

О ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В статье предлагаются формулы для центральных показателей систем $x'=A(t)x$, не использующие их решений, и проводятся исследования, связанные с их неустойчивостью.

1. Пусть M^n — метрическое пространство систем $x'=A(t)x$ с кусочно-непрерывными и ограниченными при $t\in R^+$ оператор-функциями $A(t): R^n\to R^n$, $\rho(A_1, A_2)=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|A_1(t)-A_2(t)\|$ — метрика в M^n.

Если $\lambda_1(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы $x'=A(t)x$, то число $\Omega(A)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\sup\limits_{\rho(A, B)\leqslant\varepsilon}\lambda_1(B)$ называется ее верхним центральным показателем, а число $\omega(A)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\inf\limits_{\rho(A, B)\leqslant\varepsilon}\lambda_n(B)$ — нижним центральным показателем (см. [1]). Из этих формул вытекает полунепрерывность показателей Ω, ω как функций системы (соответственно