Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. С. Буслаев, М. З. Соломяк, Д. Р. Яфаев, Михаил Шлемович Бирман (к 75-летию со дня рождения), *Алгебра и анализ*, 2004, том 16, выпуск 1, 5–14

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
19 марта 2025 г., 09:49:50

Алгебра и анализ
Том 16 (2004), вып. 1

МИХАИЛ ШЛЕМОВИЧ БИРМАН
(к 75-летию со дня рождения)

© БУСЛАЕВ В. С., СОЛОМЯК М. З., ЯФАЕВ Д. Р.

17 января 2003 года исполнилось 75 лет выдающемуся математику Михаилу Шлемовичу Бирману. Ему принадлежат многие основополагающие результаты в общей спектральной теории операторов и в спектральной теории дифференциальных операторов, как обыкновенных так и с частными производными. Он внес крупный вклад и во многие другие разделы анализа: в теорию функциональных пространств, теорию приближений, теорию интегральных операторов, и т.п.

Подробный обзор научных достижений юбиляра, полученных в период до 1998 г., дан в статье [1*], см. также [3*]. Поэтому в настоящей заметке мы ограничиваемся описанием его результатов, полученных после 1998 г., только в случае необходимости упоминая более ранние работы.

М. Ш. и теперь сохраняет завидную творческую активность. Его новые результаты относятся, в основном, к двум областям: 1. Дискретный спектр возмущенного оператора, возникающий в лакунах невозмущенного, и пороговые эффекты вблизи краев лакуны. 2. Абсолютная непрерывность спектра периодических операторов математической физики. Прежде чем перейти к анализу этих результатов, мы хотели бы отметить характерную особенность всего научного творчества М. Ш. — умение смотреть на возникающие конкретные задачи как бы “с высоты птичьего полета”: обобщая индивидуальные особенности задачи, он формулирует общую проблему, включающую ее (и многие другие задачи) как частный случай. Далее, он исследует эту общую проблему в абстрактных терминах. Это либо приводит к автоматическому решению первоначальной задачи, либо — в более сложных случаях — указывает те вопросы аналитического характера, на которые необходимо ответить для ее решения.

Завершающий данный текст список литературы состоит из двух частей. В первой даны ссылки на уже упоминавшиеся статьи [1*, 3*] и на список [2*] публикаций М. Ш. за тот же период. Кроме того, сюда включены пять работ из списка [2*], ссылки на которые по разным причинам не были полны. Эти работы идут под теми же номерами , что и в списке [2*], но теперь на них даны полные ссылки. Вторая часть содержит перечень последующих публикаций М. Ш. Номера ссылок на первый список помечены значком *. В тексте встречаются и ссылки типа [110*], которые отсутствуют в обеих частях списка. Такая ссылка означает, что речь идет о работе, фигурирующей под номером [110] в предшествующем списке [2*].

§1. Спектр в лакунах. Пороговые эффекты

Пусть A — самосопряженный оператор, спектр которого имеет лакуну (λ_-, λ_+). Последнее означает, что промежуток (λ_-, λ_+) свободен от спектра, а его края принадлежат спектру (или лежат на бесконечности). Пусть задан другой оператор V ("возмущение"), для определенности предположим, что $V \geqslant 0$. Обозначим $A_\pm(\alpha) = A \mp \alpha V$. Если оператор V в подходящем смысле подчинен оператору A, то при любом $\alpha > 0$ спектр оператора $A_\pm(\alpha)$ в лакуне пуст, либо состоит из конечного или счетного множества собственных значений (с учетом кратности), с единственной возможной точкой накопления $\lambda_\pm$. Более того, с ростом α собственные значения оператора $A_+(\alpha)$ (оператора $A_-(\alpha)$) сдвигаются влево (вправо).

Предположим, что выбрана точка λ внутри лакуны ("точка наблюдения"). Обозначим через $N_\pm(\lambda, A, V, \alpha)$ количество собственных значений оператора $A_\pm(t)$, прошедших через точку λ при возрастании t от 0 до α. Это определение естественным образом распространяется на случай $\lambda = \lambda_\pm$ (при условии, что $\lambda_\pm \neq \pm\infty$). Задача состоит в изучении поведения функций $N_\pm(\lambda, A, V, \alpha)$ при $\alpha \to \infty$.

Если оператор A полуограничен снизу и λ_+ — его нижняя точка спектра, то для $\lambda \leqslant \lambda_+$ число $N_+(\lambda, A, V, \alpha)$ совпадает с количеством собственных значений оператора $A_+(\alpha)$, лежащих левее точки λ. Так обстоит дело, например, для хорошо исследованного случая, когда $A = -\Delta$ (Лапласиан в $\mathbf{R}^d$), а V представляет собой оператор умножения на функцию — потенциал. В рассматриваемом случае $\lambda_+ = 0$. М. Ш. сам внес крупный вклад в эти исследования на более ранних этапах своего творчества. Прежде всего, это знаменитый абстрактный "принцип Бирмана–Швингера", установленный М. Ш. еще в работе [15*], опубликованной в 1959г. Многочисленные позднейшие работы по данной проблематике, выполненные десятками математиков и физиков, основаны на использовании этого принципа.

Было, в частности, выяснено, что в размерностях $d \geqslant 3$ в поведении функции $N_+(\lambda, -\Delta, V, \alpha)$ возможны две принципиально различные ситуации: если $V \in L^{d/2}$, то при любом выборе точки наблюдения $\lambda \leqslant 0$ для этой функции выполнена асимптотическая формула вейлевского типа. Таким образом, асимптотика устойчива по отношению к выбору λ и сохраняется при выходе на край лакуны, т.е. при $\lambda = 0$. Если $V \notin L^{d/2}$ (но спектр операторов $A_+(\alpha)$ левее нуля еще дискретен при любом $\alpha > 0$), то асимптотика $N_+(\lambda, -\Delta, V, \alpha)$ при различных $\lambda < 0$, вообще говоря, различна. При $\lambda = 0$ возможно, что $N_+ = \infty$ для всех α. Возможно также, что величина $N_+(0, -\Delta, V, \alpha)$ конечна, но растет быстрее, нежели $N_+(\lambda, -\Delta, V, \alpha)$ при $\lambda < 0$, например при $\lambda = -1$: именно, для некоторого $q > d/2$ выполнено

$$\begin{aligned} N_+(0, -\Delta, V, \alpha) &= O(\alpha^q), \\ N_+(-1, -\Delta, V, \alpha) &= o(\alpha^q). \end{aligned} \tag{1}$$

Все это указывает на неустойчивость таких асимптотик.

М. Ш. предложил называть асимптотики первого типа (и соответствующие возмущения) регулярными, а второго типа — нерегулярными. Он развил точку зрения, что эта классификация имеет общее значение и применима и к другим задачам. Плодотворность этой точки зрения убедительно подтверждена им в серии работ, начиная с 1991 г.

В статье [110*] проблема регулярности поставлена и исследована в абстрактных терминах для общего случая, когда в спектре невозмущенного оператора имеются лакуны. Найдены общие условия, обеспечивающие регулярность асимптотического поведения функций $N_{\pm}$. Важно, что эти условия позволяют не только сдвигать точку λ внутри одной лакуны, но и перемещать ее из одной лакуны в другую. Более того, указаны условия, при которых асимптотика функций $N_{\pm}$ не только не меняется при сдвиге точки наблюдения, но и сохраняется при замене невозмущенного оператора A на другой оператор, близкий к нему в смысле квадратичных форм.

Результаты работы [110*] нашли многочисленные применения. Первые такие применения даны уже в самой этой статье (периодические операторы второго порядка, возмущенные убывающим потенциалом; возмущения операторов высшего порядка дифференциальным оператором второго порядка), а также в примыкающих к [110*] работах [111*, 135*] (возмущение магнитного оператора Шрёдингера и его псевдорелятивистского аналога).

Основные результаты статьи [110*] относятся к случаю, когда точка наблюдения λ лежит внутри лакуны. Как правило, выход на край лакуны требует более подробных сведений о невозмущенном операторе. Для применений особенно важен случай, когда невозмущенный оператор A — это периодический оператор Шрёдингера. Необходимая информация о невозмущенном операторе дается в этом случае теорией Флоке.

Детальное изучение поведения функций $N_{\pm}(\lambda, A, V, \alpha)$ для таких операторов A проведено М. Ш. в двух важных работах [135*, 134*]. Работа [135*] (см. также обзор [128*]) посвящена случаю $d \geqslant 3$ и потенциальным возмущениям при условии $V \in L^{d/2}$. Показано, что такие возмущения остаются регулярными и в случае, если λ лежит на краю лакуны, при дополнительном предположении, что зонные функции $E_l(k)$ (где k обозначает квазиимпульс) имеют "правильное поведение" вблизи соответствующего края лакуны.

Нерегулярные асимптотики труднее для изучения, в частности потому, что причины нерегулярности могут быть весьма различны. Одна из возможных причин (при $d \geqslant 3$) — нарушение условия $V \in L^{d/2}$. Другая возможная причина является более тонкой. Именно, регулярность возмущений $V \in L^{d/2}(\mathbf{R}^d)$ при $d \geqslant 3$ оказывается тесно связанной с выполнением классического неравенства Харди, $\int |x|^{-2}|u|^2 dx \leqslant C(d) \int |\nabla u|^2 dx$ для функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. При $d = 2$ это неравенство нарушается на "радиальном подпространстве" функций $u(x) = \phi(|x|)$. Это тоже может вызывать нерегулярность асимптотик. Чтобы различать эти два типа нерегулярности, мы будем говорить здесь соответственно о нерегулярных возмущениях 1-го и 2-го родов.

В статье [134*] М. Ш. анализирует нерегулярные возмущения 1-го рода. Невозмущенный оператор — это снова периодический оператор Шрёдингера при $d \geqslant 3$. Условия на возмущение V накладываются в терминах поведения функции $N_+(\lambda, -\Delta, V, \alpha)$ для "обычного" оператора Шрёдингера. Более точно, предполагается, что выполнены упомянутое выше условие (1). Рассматривается случай, когда точка λ лежит на краю лакуны. При прежнем предположении о правильности поведения зонных функций $E_l(k)$ вблизи точки λ, строится некоторый "модельный" дифференциальный оператор. Грубо говоря, он представляет собой векторный оператор Шрёдингера с матричным потенциалом. Векторная размерность этого оператора, а также потенциал определяются по разложению Флоке в явных терминах. В частности, размерность равна количеству зонных функций, задающих край лакуны.

Для построенного оператора условие типа (1) выполнено, в силу исходного условия на V. Основной результат состоит в том, что асимптотическое поведение функций $N_{\pm}(\lambda_{\pm}, A, V, \alpha)$ — такое же, как поведение аналогичной функции для построенного модельного оператора.

Качественный смысл этого результата — в том, что асимптотика функции $N_{\pm}(\lambda, A, V, \alpha)$ определяется взаимодействием между потенциалом V и данными Флоке в сколь угодно малой окрестности точки λ. Поэтому имеет смысл говорить о "пороговом эффекте" вблизи точки λ, которая в рассматриваемом случае лежит на краю лакуны.

Первый принципиальный результат о нерегулярных асимптотиках 2-го рода получен в работе [130*], посвященной двумерному оператору Шрёдингера ($A = -\Delta$, V — потенциал). Лакуна в спектре невозмущенного оператора — отрицательная полуось. При некотором условии на V (включение $V \in L^1 = L^{d/2}$ при $d = 2$ недостаточно) вейлевская асимптотика для функции $N_+(\lambda, -\Delta, V, \alpha)$ сохраняется при любом $\lambda < 0$. Однако, она может нарушаться при $\lambda = 0$. Для того чтобы описать поведение функции $N_+(0, -\Delta, V, \alpha)$, требуется рассмотреть некоторый вспомогательный оператор Шрёдингера на полуоси. Этот оператор (обозначим его $A'(\alpha)$) порождается сужением квадратичной формы оператора $A_+(\alpha)$ на подпространство радиальных функций. Грубо говоря, асимптотика функции $N_+(\lambda, -\Delta, V, \alpha)$ при $\lambda = 0$ может быть записана как сумма вейлевского члена и асимптотики для $N_+(0, A'(\alpha))$. Этот эффект можно истолковать как возникновение нового "канала", дающего независимый вклад в асимптотику при выходе λ на край лакуны. Таким образом, здесь мы имеем дело с несколько иной реализацией порогового эффекта.

Иногда функция $N_+(0, A'(\alpha))$ растет медленнее вейлевского члена и не сказывается на итоговой асимптотике. В других случаях, напротив, дополнительный член подавляет вейлевскую составляющую. Наконец, возможна ситуация, когда оба слагаемых имеют одинаковый порядок, и тогда функция $N_+(0, -\Delta, V, \alpha)$ имеет вейлевский порядок $O(\alpha)$, но не-вейлевский коэффициент в асимптотике.

В работе [3] аналогичный результат получен для случая, когда невозмущенный оператор A — это двумерный периодический оператор Шрёдингера, а точка наблюдения λ лежит на правом краю любой (не обязательно полубесконечной) лакуны. Полная формулировка выглядит значительно сложнее, чем в предыдущем "модельном" случае, так как построение вспомогательного оператора A', подобно случаю нерегулярных возмущений 1-го рода, требует детальной информации о разложении Флоке для A. В статье [5] рассмотрены операторы волноводного типа (размерность — любая, периодичность вдоль одной из координатных осей). Однако, в [5] обсуждается лишь асимптотика вблизи левого края спектра.

Таким образом, анализ поведения функций $N_{\pm}(0, A, V, \alpha)$ в случае, когда A — периодический оператор Шрёдингера, для нерегулярных возмущений обоих типов требует подробного анализа спектрального разложения невозмущенного оператора в окрестности краев лакуны. Так же обстоит дело и в случае, когда невозмущенный оператор — это периодический оператор Паули, либо какой-либо другой периодический оператор математической физики. Во всех этих случаях проявляются пороговые эффекты вблизи края лакуны. Изучение таких эффектов само по себе представляет значительный интерес для приложений.

Техника исследования пороговых эффектов, разработанная при анализе поведения функций $N_{\pm}(0, A, V, \alpha)$, оказалась полезной в совсем иной области прикладного анализа, а именно в теории усреднений (по другой терминологии, в теории гомогенизации). Типичная задача этой теории состоит в изучении предельного поведения по параметру $\varepsilon \to 0$ семейства операторов $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(x/\varepsilon) \operatorname{grad}$, действующих в пространстве $L^2(\mathbf{R}^d)$. Здесь $g(x)$ — положительно определенная матрица-функция, периодическая относительно стандартной решетки. Периодический оператор A_1 в рассматриваемом случае имеет спектр, лежащий на положительной полуоси и содержащий точку $\lambda = 0$. Известно, что резольвенты $(A_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$ сильно сходятся к резольвенте некоторого не зависящего от ε оператора A_0; в доказательстве существования такого оператора и его построении и заключается процедура усреднения.

В работе [2] показано, что возможность усреднения представляет собой одно из проявлений порогового эффекта около левого края спектра оператора A_1. Это было сделано не только для описанной выше задачи, но для широкого класса периодических задач математической физики. В недавней статье [138*] обсуждается возможность усреднения вблизи краев внутренних лакун. Выяснено, что ситуация в этом случае усложняется: предельное поведение резольвент не всегда может быть описано в терминах "постоянного" предельного оператора. Это вызвано тем, что пороговые эффекты у краев внутренних лакун значительно сложнее, чем около левого края спектра.

В тот момент, когда мы завершали эту статью, появился большой обзор [12], посвященный как раз связям между идеей пороговых эффектов и идеей усреднения. Этот обзор можно рассматривать как важное развитие работы [2]. Мы можем лишь кратко остановиться на указанной публикации, которая вносит в обширную область теории усреднений много новых идей и которая, вероятно, найдет существенный отклик у специалистов по теории усреднений. Значительное и по сути и по объему внимание уделено в этой работе построению абстрактной схемы, поглощающей большую часть построений, связанных с применениями к конкретным операторам математической физики. Но и при конкретном анализе каждой частной модели математической физики, как правило, обнаруживаются специфические факты, которые следуют из общей схемы, но не диктуются ею прямолинейно. Наиболее оригинальными в этом отношении являются результаты, полученные для системы уравнений Максвелла.

Схема в целом ориентирована на общие периодические дифференциальные операторы вида $A = f(x)^* b(D)^* g(x) b(D) f(x)$ (с матричнозначными компонентами), действующие на вектор-функции на $\mathbf{R}^n$. Эти операторы, с одной стороны, допускают естественную факторизацию вида $A = X^* X$, с другой стороны, в силу периодичности коэффициентов, их можно, как обычно, реализовать в виде прямого интеграла по квазиимпульсу k их ограничений (дополненных квазипериодическими граничными условиями) на ячейку периодичности. Такие ограничения допускают факторизацию, подобную указанной выше, но в отличие от исходного оператора имеют дискретный спектр. Для них развивается вполне абстрактная схема теории возмущений относительно параметра $t = |k|$ вблизи точки 0. Для целей дальнейших применений оказывается недостаточным ограничиться лишь ведущим порядком теории возмущений. Благодаря наличию упомянутой факторизации эта теория возмущений обнаруживает множество специфических свойств. Такие свойства позволяют детально исследовать поведение спектральных характеристик оператора A в L^2 вблизи точки 0 , нижней границы спектра. Можно сказать, в частности, что это дает возможность явно описать сингулярности резольвенты оператора A вблизи точки 0. Моделью для описания таких сингулярностей оказывается резольвента оператора, сходного с оператором A, но определяемого в терминах некоторой эффективной постоянной матрицы g^0 (взамен первоначальной g), явный вид которой диктуется описанной выше теорией возмущений. Эта часть работы, нацеленная, в конечном счете, на применения к теории усреднений, является в таком контексте абсолютно оригинальной. Имея подобный результат, авторы уже довольно быстро приходят к обоснованию процедуры усреднения. Заслуживает отдельного упоминания тот факт, что указанная выше модель может быть использована для выделения ведущих сингулярностей резольвенты оператора A в стандартной операторной норме.

§2. Абсолютная непрерывность спектра периодических операторов

Обратимся теперь к описанию новых результатов, полученных М. Ш. в отношении абсолютной непрерывности спектра периодических операторов математической физики. Все результаты в этом направлении были установлены М. Ш. в сотрудничестве с Т. А. Суслиной.

Предистория этой тематики такова. Хорошо известен давний классический факт, согласно которому оператор Хилла (одномерный оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом на оси) имеет в $L^2(\mathbf{R})$ двукратный абсолютно непрерывный спектр , состоящий из, вообще говоря, бесконечной системы интервалов. Первый результат для многомерного случая (для оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом в $L^2(\mathbf{R}^3)$) был получен в 1973 г. Л. Томасом, который при определенных предположениях о потенциале доказал, что спектр этого оператора также является абсолютно непрерывным. Впоследствии подход Томаса и факт абсолютной непрерывности спектра были перенесены на оператор Шрёдингера в произвольных размерностях $d \geqslant 2$. Мы должны остановиться на подходе Томаса подробнее, поскольку в нем имеется некоторая компонента, которая сохранилась почти во всех дальнейших исследованиях свойства абсолютной непрерывности спектра дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами, в том числе и в работах М. Ш.

Эта компонента состоит в следующем: рассматриваемый оператор A разлагается в прямой интеграл по квазиимпульсу k, о котором уже говорилось выше. Как уже говорилось, возникающий в этом разложении и зависящий от k оператор $A(k)$ (исходный дифференциальный оператор, ограниченный на ячейку решетки периодичности и сопровождаемый соответствующими условиями квазипериодичности) имеет дискретный спектр. Из описанных конструкций следует, что спектр оператора A всегда имеет зонный характер. Для проверки абсолютной непрерывности спектра должно быть доказано, что не существует зон, вырождающихся в точку. Это решающий момент схемы. Из него немедленно выводится абсолютная непрерывность спектра исходного оператора. В мотивировке определенную роль играет свойство аналитичности указанных собственных значений в зависимости от k. Благодаря ему достаточно установить факт непостоянства собственных значений при больших комплексных k. В свою очередь, это стало возможным сделать с помощью теории возмущений, которая показала (в случае оператора Шрёдингера), что при таких k влияние потенциала является малым.

При попытках перенести этот подход на "магнитный" периодический оператор Шрёдингера $M = (\frac{1}{i}\nabla - A(x))^2 + V(x)$ выяснилось, однако, что он отказывает в последнем пункте: влияние периодического магнитного потенциала не может быть проконтролировано с помощью теории возмущений. В работе [131*] это затруднение было преодолено для размерности $d = 2$; было показано, что в этом случае роль магнитного потенциала может быть учтена, в определенном смысле, явно, после чего роль электрического потенциала вновь может быть проконтролирована с помощью теории возмущений. Чтобы реализовать эту идею, был рассмотрен вспомогательный оператор $M_P = (\frac{1}{i}\nabla - A(x))^2 + B(x)$, $B(x) = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$. Его можно толковать как один из блоков двумерного оператора Паули. Оператор M_P и соответствующий оператор $M_P(k)$ на ячейке решетки периодичности допускают явную факторизацию в произведение периодических операторов первого порядка, которые могут быть явно изучены и оценены. Благодаря этому оказалось возможным, в частности, установить, что норма оператора $M_P((\mu + iy)e_1 + ke_2)$ с ростом y растет не медленнее, чем $|y|$. Здесь e_1 и e_2 - базис двойственной решетки периодов. Эта оценка является критической. С ее помощью роль исходного потенциала V, который теперь следует заменить на $V - B$, вновь оценивается по теории возмущений.

В статье [138*] результаты работы [131*] были заметно усилены. В [131*] предполагалось, что потенциал A непрерывен, а $V \in L^2$. Теперь тот же результат был распространен на случай $A \in L^r, r > 2$ и $V \in L^p, p > 1$. Конечно, переход к этим свободным условиям потребовал преодоления заметных новых аналитических трудностей. Общая схема подхода, однако, сохранилась.

В статье [141*] рассматривается дальнейшее обобщение, а именно, магнитный оператор Шрёдингера с переменной положительной периодической метрикой: $M = (-i\nabla - A(x))^* g(x)(-i\nabla - A(x)) + V(x)$. Работа содержит также полный обзор накопившихся к этому времени результатов по абсолютной непрерывности спектра оператора Шрёдингера (не только магнитного и не только собственных результатов авторов). Почти во всех случаях авторы усиливают обсуждаемые результаты, уменьшая объем предположений о коэффициентах операторов. Процитируем заключительные результаты. В частности, для самого периодического оператора Шрёдингера абсолютная непрерывность спектра имеет место при $V \in L^r, r > 1 (d = 2)$; $V \in L^0_{d/2,\infty}, d = 3, 4$; $V \in L^0_{d-2,\infty} (d \geqslant 5)$. Здесь используются так называемые слабые L^p-классы, которые можно кратко охарактеризовать как слабые $L_{p,\infty}$ - классы из шкалы Лоренца $L_{p,q}$. В случае магнитного оператора Шрёдингера абсолютная непрерывность спектра сохраняется при тех же предположениях об электрическом потенциале и следующих дополнительных предположениях о магнитном потенциале A: $A \in L^{2r}, r > 1 (d = 2)$; $A \in C^{2d+3} (d \geqslant 3)$. При $d = 2$ - это повторение результатов предыдущей работы, при $d \geqslant 3$ авторы опираются на результат работы А. В. Соболева, в которой оценки резольвенты чисто магнитного оператора Шрёдингера были получены с помощью другой техники, без использования идей факторизации. Что касается переменной метрики, в работе изучается метрика специального вида $g = \omega^2 a$, где ω - измеримая периодическая функция, ограниченная и отграниченная от 0 положительным числом, а a - постоянная положительная матрица. Абсолютная непрерывность спектра установлена при указанных выше условиях на V, A и при следующих дополнительных условиях на ω: $V_\omega \in L^r, r > 1 (d = 2)$; $V_\omega \in L^0_{\delta,\infty}, \delta = \max\{d/2, d-2\}$ $(d \geqslant 3)$.

В последующей работе [4] также рассматривался двумерный периодический магнитный оператор Шрёдингера с переменной метрикой, причем электрический потенциал на этот раз состоял из двух слагаемых: члена, который характеризовался привычными условиями и дельта-функциональной компоненты, сосредоточенной на системе гладких кривых. Не останавливаясь на подробностях, отметим, что для этого оператора также была установлена абсолютная непрерывность спектра. Мотивацией для рассмотрения этой модели служили возможные ассоциации с практическими применениями, а также попытки экспериментов с целью понять, где может лежать граница, за которой утрачивается абсолютная непрерывность спектра.

Помимо магнитного периодического оператора Шрёдингера в работах М. Ш. рассматривались и другие периодические операторы математической физики, в частности, оператор Дирака [140*] и оператор теории упругости [7]. Каждый раз основной проблемой было получение оценки резольвенты при больших значениях квазиимпульса, которая показывала бы, что у оператора на ячейке периодичности не существует спектральных зон, слипающихся в точку. Существенный интерес и здесь представляло расширение условий на коэффициенты операторов с тем, чтобы поймать возможную границу абсолютной непрерывности, поэтому работы в этом направлении являются подчас весьма технически напряженными. В них мобилизовано уникальное богатство аналитического опыта М. Ш. Наши комментарии не были бы полными, если бы мы не упомянули недавний результат одного из учеников М. Ш. Н. Д. Филонова, который рассмотрел оператор Шрёдингера без магнитного поля и без внешнего потенциала, но с негладкой периодической переменной метрикой, и показал, что при определенном выборе метрики спектр оператора может и не быть абсолютно непрерывным, т.е. зоны в спектре соответствующего оператора на ячейке могут вырождаться в точку.

Несколько особняком от работ, которые были отнесены выше к двум основным разделам, стоит обзор по двойным операторным интегралам. Теория двойных операторных интегралов была одной из тем, над которыми М. Ш. активно работал в 1960-х — 70-х годах. Эти исследования продолжают вызывать интерес специалистов по теории операторов. В частности, в последние годы появились новые статьи, в которых различные аспекты теории операторных интегралов переносятся на банаховы пространства. Появились также новые приложения для случая гильбертовых пространств. В связи с этим М. Ш. вместе с М. З. Соломяком была опубликована статья [13], в которой дан общий обзор этой теории (в рамках гильбертова пространства) и ее применений.

В заключение отметим, что в прошедшие годы М. Ш., как и прежде, принимал самое энергичное и плодотворное участие в работе двух диссертационных советов и редколлегий журналов „Алгебра и анализ“ и „Функциональный анализ и его приложения“.

Список литературы

ПРЕДШЕСТВУЮЩИЕ ОБЗОРЫ И ПУБЛИКАЦИИ (номера 135*–141* даны по источнику [2*])

[1*] Buslaev V., Solomyak M., Yafaev D., *On the scientific work Mikhail Shlemovich Birman*, Differential Operators and Spectral Theory (V. Buslaev, M. Solomyak, D. Yafaev, eds.), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 189, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 1–15.

[2*] Buslaev V., Solomyak M., Yafaev D. (eds.), *List of publications of M. Sh. Birman*, Differential Operators and Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 189, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 17–26.

[3*] Буслаев В. С., Вершик А. М., Гельфанд И. М. и др., *Михаил Шлемович Бирман (к семидесятилетию со дня рождения)*, Успехи мат. наук **55** (2000), №1, 204–207.

[135*] Бирман М. Ш., Пушницкий А. Б., *Дискретный спектр в лакунах возмущенного псевдорелятивистского магнитного гамильтониана*, Зап. науч. семин. ПОМИ **249** (1997), 102–117; Пер. на англ. яз., J. Math. Sci. **101** (2000), no. 5, 3437–3447.

[138*] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом*, Алгебра и анализ **10** (1998), №4, 1–36; Пер. на англ. яз., St. Petersburg Math. J. **10** (1999), no. 4, 579–601.

[139*] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Two-dimensional periodic Pauli operator. The effective masses at the lower edge of the spectrum*, Mathematical Results in Quantum Mechanics (Prague, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 108, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 13–31.

[140*] Birman M. Sh., Suslina T. A., *The periodic Dirac operator is absolutely continuous*, Integral Equations Operator Theory **34** (1999), no. 4, 377–395.

[141*] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности*, Алгебра и анализ **11** (1999), №2, 1–40; Пер. на англ. яз., St. Petersburg Math. J. **11** (2000), no. 2, 203–232.

ПРОДОЛЖЕНИЕ СПИСКА ПУБЛИКАЦИЙ М. Ш. БИРМАНА, СМ. 2*

[1] Birman M. Sh., Suslina T. A., *On the absolute continuity of the periodic Schrödinger and Dirac operators with magnetic potential*, Differential Equations and Mathematical Physics (Birmingham, AL, 1999), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 41–49.

[2] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[3] Бирман М. Ш., Лаптев А. А., Суслина Т. А., *Дискретный спектр двумерного периодического эллиптического оператора второго порядка, возмущенного убывающим потенциалом.* I. *Полубесконечная лакуна*, Алгебра и анализ **12** (2000), №4, 36–78; Пер. на англ. яз., St. Petersburg Math. J. **12** (2001), no. 4, 535–567.

[4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шредингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых*, Алгебра и анализ **12** (2000), №6, 140–177; Пер. на англ. яз., St. Petersburg Math. J. **12** (2001), no. 6, 983–1012.

[5] Birman M. Sh., Solomyak M., *On the negative discrete spectrum of a periodic elliptic operator in a waveguide-type domain, perturbed by a decaying potential*, J. Anal. Math. **83** (2001), 337–391.

[6] Амосов Б. А., Бирман М. Ш., Вишик М. И. и др., *Михаил Семенович Агронович* (*к 70-летию со дня рождения*), Успехи мат. наук **56** (2001), №4, 163–168; Пер. на англ. яз., Russian Math. Surveys **56** (2001), no. 4, 777–784.

[7] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Absolute continuity of the spectrum of the periodic operator of elasticity theory for constant shear modulus*, Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics, II (in honor of prof. O. A. Ladyzhenskaya) (M. Birman, S. Hildebrandt, V. Solonnikov, N. Ural'tseva, eds.), Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 2, Kluwer/Plenum, New York, 2002, pp. 69–74.

[8] Архипова А. А., Бирман М. Ш., Буслаев В. С. и др., *К юбилею Ольги Александровны Ладыженской*, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 32, Зап. науч. семин. ПОМИ **288** (2002), 5–13.

[9] Birman M., Hildebrandt S., Solonnikov V., Ural'tseva N. (eds.), *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics*, I (in honor of prof. O. A. Ladyzhenskaya), Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 1, Kluwer/Plenum, New York, 2002, 386 pp.

[10] Birman M., Hildebrandt S., Solonnikov V., Ural'tseva N. (eds.), *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics*, II (in honor of prof. O. A. Ladyzhenskaya), Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 2, Kluwer/Plenum, New York, 2002, 380 p.

[11] Бирман М. Ш., *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны*, Алгебра и анализ **15** (2003), №4, 61–71.

[12] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[13] Birman M., Solomyak M., *Double operator integrals in a Hilbert space*, Integral Equations Operator Theory **47** (2003), no. 2, 131–168.

Поступило 10 ноября 2003 г.