А. И. Назаров, А. П. Щеглова, Новые классы решений для полулинейных уравнений в $\mathbb{R}^n$ с дробным лапласианом, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2021, том 508, 124–133

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 508, 2021 г.

А. И. Назаров, А. П. Щеглова

НОВЫЕ КЛАССЫ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^n$ С ДРОБНЫМ ЛАПЛАСИАНОМ

Пусть $n \geqslant 2$, $s \in (0,1)$, $q \in (2, 2_s^*)$, где $2_s^* = \dfrac{2n}{n-2s}$ – предельный показатель Соболева для пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим уравнение

$$(-\Delta)^s u + u = |u|^{q-2}u \qquad \text{в } \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $(-\Delta)^s$ – оператор дробного лапласиана в $\mathbb{R}^n$, определяемый с помощью преобразования Фурье:

$$(-\Delta)^s u := \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{2s}\mathcal{F}u(\xi)\big).$$

Полулинейные уравнения с дробным лапласианом исследовались во многих работах. В этом кратком сообщении мы анонсируем построение нескольких новых семейств решений уравнения (1), которые, повидимому, ранее не рассматривались.

В локальном случае ($s = 1$) решения с различными симметриями для модельного уравнения вида (1)

$$-\Delta u + u = u^3 \qquad \text{в } \mathbb{R}^n, \qquad n = 2, 3, \tag{2}$$

изучались многими авторами. В недавней работе [4] был предложен вариационный подход, позволяющий единообразно строить решения с различными симметриями. Также в [4] приведен обзор других применяющихся методов (см. цитируемую там литературу).

Мы модифицируем метод [4] для работы с дробными лапласианами. Отметим, что модификация других методов построения решений уравнений типа (2) на нелокальный случай затруднительна.

Наиболее существенная модификация касается теоремы о концентрации. Подобные утверждения были доказаны для дробного лапласиана в $\mathbb{R}^n$ в [2], для суженного (restricted) дробного лапласиана в [5, 8]. Мы доказываем эту теорему для спектральных лапласианов Неймана и Дирихле.

Ключевые слова: дробные лапласианы, полулинейные уравнения, периодические структуры.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00630.

Отметим, что положительные радиальные решения уравнения (1) хорошо изучены, см., напр., [3]. Другие классы решений, построенные в нашей статье, по-видимому, ранее не рассматривались.

Обозначения. Скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ обозначается $(\cdot\,,\,\cdot)_\Omega$. Так же обозначим двойственность, порождаемую этим скалярным произведением.

Используется стандартное обозначение $H^s(\mathbb{R}^n)$ для пространств Соболева–Слободецкого. Введем также соответствующие пространства в области (см., напр., [10, гл. 4]):

$$H^s(\Omega) = \{u\big|_\Omega\,:\,u \in H^s(\mathbb{R}^n)\};\ \widetilde{H}^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n)\,:\,\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}\}.$$

Дробные лапласианы Неймана и Дирихле в липшицевой области

Напомним, что спектральные дробные лапласианы Неймана и Дирихле (соответственно, $(-\Delta)^s_{\mathcal{N}}$ и $(-\Delta)^s_{\mathcal{D}}$) – это s-ые степени оператора Лапласа с условием Неймана (Дирихле) в смысле спектральной теории (см., напр., [1, гл. 10]), т.е. самосопряженные операторы, восстановленные по квадратичным формам

$$[u]^2_{\mathcal{N},\Omega} \equiv \big((-\Delta)^s_{\mathcal{N}} u, u\big)_\Omega := \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j^s (u, \varphi_j)^2_\Omega, \tag{3}$$

$$[u]^2_{\mathcal{D},\Omega} \equiv \big((-\Delta)^s_{\mathcal{D}} u, u\big)_\Omega := \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^s (u, \psi_j)^2_\Omega, \tag{4}$$

где μ_j и φ_j (соответственно, λ_j и ψ_j) – собственные числа и ортонормированные собственные функции оператора Лапласа с условием Неймана (Дирихле) в области Ω. При этом мы полагаем, что $\mu_0 = 0$, $\varphi_0 = \mathrm{const}$ и не пишем это слагаемое в (3).

Известно, что при $s \in [0,1]$ область определения квадратичных форм (3) и (4) совпадает с пространством $H^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}^s(\Omega)$ соответственно.

Схема построения положительных периодических решений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый многогранник. Для положительной последовательности $R \to +\infty$ определим семейство расширяющихся областей $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x/R \in \Omega\}$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$J^{\mathcal{N}}_{s,q,\Omega_R}(u) := \frac{[u]^2_{\mathcal{N},\Omega_R} + \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega_R)}} \to \min, \qquad u \in H^s(\Omega_R). \tag{5}$$

В силу компактности вложения $H^s(\Omega_R) \hookrightarrow L_q(\Omega_R)$ минимум в этой задаче достигается (обозначим его $\lambda^{\mathcal{N}}_{s,q,\Omega_R}$). При этом минимайзер определен с точностью до мультипликативной постоянной и является обобщенным решением уравнения Эйлера–Лагранжа

$$(-\Delta)^s_{\mathcal{N}} u + u = \lambda |u|^{q-2} u \quad \text{в} \quad \Omega_R, \tag{6}$$

где λ – множитель Лагранжа. Если нормировать минимизирующую функцию условием $\|u\|_{L_q(\Omega_R)} = \big(\lambda^{\mathcal{N}}_{s,q,\Omega_R}\big)^{\frac{1}{q-2}}$, то в (6) $\lambda = 1$, и мы получаем обобщенное решение уравнения

$$(-\Delta)^s_{\mathcal{N}} u + u = |u|^{q-2} u \quad \text{в} \quad \Omega_R. \tag{7}$$

Это решение мы называем **решением уравнения (7) с наименьшей энергией**.

Известно (см. [6, теорема 3][1]), что при $s \in (0,1)$ для любой функции $v \in H^s(\Omega)$ справедливо неравенство $\big[|v|\big]^2_{\mathcal{N},\Omega} < [v]^2_{\mathcal{N},\Omega}$, если только v меняет знак. Поэтому решение уравнения (7) с наименьшей энергией можно считать неотрицательным в Ω_R.

Далее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть u – неотрицательное решение уравнения (7) в Ω_R. Тогда в любой строго внутренней подобласти ω (т.е. такой, что $\overline{\omega} \subset \Omega_R$) функция u не обращается в нуль и является бесконечно гладкой.*

Таким образом, можно считать, что $u > 0$ в Ω_R.

[1]Эта теорема доказана для лапласианов Дирихле (спектрального и суженного), но, как указано в [12, предложение 1], доказательство без изменений проходит для спектрального лапласиана Неймана.

Пусть u – произвольное решение уравнения (7) в Ω_R. Рассмотрим "удвоенную" область $\widetilde{\Omega}_R$, получающуюся объединением Ω_R с одной из граней Γ и с областью, полученной из Ω_R зеркальным отражением относительно Γ. Определим функцию $\widetilde{u}$, продолжив u на $\widetilde{\Omega}_R$ четным отражением относительно Γ. Можно показать, что функция $\widetilde{u}$ является решением уравнения (7) в $\widetilde{\Omega}_R$.

Предположим теперь, что многогранник Ω обладает следующим свойством: пространство может быть заполнено его отражениями, раскрашенными в шахматном порядке (например, в $\mathbb{R}^2$ этому условию удовлетворяют следующие 4 фигуры: прямоугольники, правильные треугольники, равнобедренные прямоугольные треугольники и прямоугольные треугольники с острым углом $\pi/6$). Такую область будем называть фундаментальной.

Несложно видеть, что если Ω – фундаментальная область, то и Ω_R – фундаментальная область, и четными отражениями решение уравнения (7) с наименьшей энергией в Ω_R продолжается до функции в $\mathbb{R}^n$ (обозначим ее $\mathbf{u}$).

Теорема 1. *Функция* $\mathbf{u}$ *является решением уравнения* (1) *в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство этого факта основано на том, что группа симметрий, порождаемая отражениями фундаментальной области, содержит n линейно независимых параллельных переносов. Поэтому функция $\mathbf{u}$ будет периодической, и ячейка периодов $\boldsymbol{\Omega}$ состоит из конечного числа отраженных фундаментальных областей, а функция $v := \mathbf{u}\big|_{\boldsymbol{\Omega}}$ – решение уравнения (7) в $\boldsymbol{\Omega}$. Применяя лемму 1 в $\boldsymbol{\Omega}$, получим, что $u_R > 0$ в $\overline{\Omega}_R$, т.е. $\mathbf{u}$ бесконечно гладкая и положительная в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}_j$ – ортонормированные собственные функции оператора Лапласа в области $\boldsymbol{\Omega}$. Так как функция v получена из u отражениями, в ее разложении по системе функций $\boldsymbol{\varphi}_j$, участвуют только те $\boldsymbol{\varphi}_j$, которые получены отражениями из φ_j и потому, как и v, удовлетворяют периодическим граничным условиям. Поэтому они представимы в виде линейных комбинаций мнимых экспонент. Отсюда прямыми вычислениями получаем

$$((-\Delta)^s\mathbf{u})\big|_{\boldsymbol{\Omega}} = (-\Delta)^s_{\mathcal{N}} v,$$

что и доказывает теорему.

Таким образом, начав с решения уравнения (7) в фундаментальной области, мы можем построить периодическое решение уравнения (1) в $\mathbb{R}^n$.

Как устроено полученное решение? В работе [11] показано, что для любой липшицевой области Ω при малых значениях R решение уравнения (7) в Ω_R с наименьшей энергией – константа, но при достаточно больших R это решение не постоянно.

Следующая теорема показывает, что при больших R это решение концентрируется в окрестности некоторой точки области Ω_R.

Теорема 2 (Теорема о концентрации). *Пусть u_R – нормированные в $L_q(\Omega_R)$ минимайзеры функционала $J^{\mathcal{N}}_{s,q,\Omega_R}$. Тогда существует последовательность точек $x_R \in \mathbb{R}^n$, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\rho > 0$ такое, что*

$$\limsup_{R\to+\infty} \int\limits_{\Omega_R\setminus B_\rho(x_R)} |u_R|^q\,dx < \varepsilon.$$

В основе доказательства этой теоремы лежит использование оператора обобщенного гармонического продолжения для дробного лапласиана, известного как продолжение Стинга–Торреа [9]. Также существенно используется следующая лемма, показывающая принципиальное отличие от случая локального оператора.

Лемма 2 (о разделенных носителях). *Пусть v_1, $v_2 \in H^s(\Omega)$. Обозначим ω_j носители v_j $(j = 1, 2)$ и положим $d = \operatorname{dist}(\omega_1, \omega_2)$. Тогда*

$$\begin{aligned}[v_1 + v_2]^2_{\mathcal{N},\Omega} &= [v_1]^2_{\mathcal{N},\Omega} + [v_2]^2_{\mathcal{N},\Omega}\\ &\quad + o_d(1)\big(\|v_1\|^2_{H^s(\Omega)} + \|v_2\|^2_{H^s(\Omega)}\big) \quad \textit{при } d \to +\infty.\end{aligned}$$

Последовательность x_R из теоремы 2 называется последовательностью концентрации по П.-Л. Лионсу для функций u_R. Нетрудно видеть, что это понятие определено с точностью до сдвига на ограниченное расстояние.

Теперь можно описать некоторые периодические решения, которые получаются для различных фундаментальных областей Ω_R.

Прямоугольные и треугольные структуры в $\mathbb{R}^2$. Для произвольного фиксированного $\alpha \geqslant 1$ рассмотрим задачу (7) в прямоугольнике

Ω_R со сторонами R и αR. Согласно теореме 2, при $R \to +\infty$ последовательность решений с наименьшей энергией имеет единственную последовательность концентрации x_R. Мы показываем, что при достаточно больших R можно считать, что точки концентрации расположены в углу прямоугольника.

Четными отражениями относительно сторон прямоугольника распространим функцию u_R на всю плоскость. По теореме 1 полученная функция $\mathbf{u}$ будет положительным периодическим решением уравнения (1) с прямоугольной структурой расположения точек концентрации. Важно отметить, что при фиксированном α построенные решения с различными (достаточно большими) R существенно различны, т.е. не могут быть получены друг из друга растяжением координат и домножением на константу (поскольку уравнение (1) не инвариантно относительно таких преобразований).

Теперь рассмотрим случай, когда Ω_R – правильный треугольник со стороной R. В этом случае при достаточно больших R точки концентрации для решений u_R расположены в вершине треугольника. Распространяя функцию u_R на всю плоскость, получим положительное периодическое решение уравнения (1) с треугольной структурой расположения точек концентрации. Для различных (достаточно больших) R построенные решения также существенно различны.

Заметим, что если в качестве Ω_R взять равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом R, соответствующее решение совпадает с решением, полученным из квадрата.

Гексагональные структуры в $\mathbb{R}^2$. Другие структуры можно получить, если в качестве Ω_R взять треугольник с углами $X = \pi/6$, $Y = \pi/3$, $Z = \pi/2$ и гипотенузой длины R. При этом метод, изложенный выше, требует модификации, поскольку решения уравнения (7) с наименьшей энергией при $R \to +\infty$ концентрируются в вершине треугольника X, соответствующей наименьшему углу. Распространяя это решение в $\mathbb{R}^2$, мы получили бы такую же периодическую структуру, что и для равностороннего треугольника.

Следуя методу, предложенному в [4] для локальной задачи ($s = 1$), рассмотрим экстремальную задачу (5) с дополнительным ограничением

$$\int\limits_{\Omega_R \cap B_{R/4}(X)} |u|^q dx \leqslant \theta_q \int\limits_{\Omega_R} |u|^q dx, \tag{8}$$

где $\theta_q \in (0,1)$ – некоторое фиксированное значение, зависящее только от q.

Те же аргументы, что и ранее, позволяют заключить, что в этом случае минимизирующая функция существует, определена с точностью до мультипликативной постоянной и неотрицательна в Ω_R. Далее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть u_R – минимайзеры функционала $J^{\mathcal{N}}_{s,q,\Omega_R}$, удовлетворяющие дополнительному условию* (8)*. Существует θ_q такое, что при $R \to +\infty$ функции u_R имеют единственную последовательность концентрации $x_R = Y$.*

Из леммы 3 немедленно следует, что $\int\limits_{X_R} |u|^q dx \to 0$ при $R \to +\infty$. Это означает, что при больших R ограничение (8) в экстремальной задаче неактивно, и минимизирующая функция является решением уравнения Эйлера–Лагранжа (6), а после соответствующей перенормировки – решением уравнения (7). Далее можно применить лемму 1, а затем распространить решение в $\mathbb{R}^2$. Мы получим положительное периодическое решение уравнения (1) с гексагональной структурой.

Можно рассмотреть задачу (5) с двумя дополнительными ограничениями

$$\int\limits_{\Omega_R \cap B_{R/4}(X)} |u|^q dx \leqslant \theta_q \int\limits_{\Omega_R} |u|^q dx, \qquad \int\limits_{\Omega_R \cap B_{R/4}(Y)} |u|^q dx \leqslant \theta_q \int\limits_{\Omega_R} |u|^q dx.$$

Аналогично лемме 3, существует такое значение $\theta_q \in (0,1)$, что при достаточно больших R точка концентрации минимизирующих функций u_R находится в углу Z. Это приводит к положительному решению уравнения (1) с другой гексагональной структурой.

Для обеих структур при различных (достаточно больших) R построенные решения существенно различны.

Замечание 1. Периодические решения в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$ строятся аналогично. При этом в качестве Ω_R можно взять декартово произведение фундаментальных областей в пространствах меньших размерностей.

Бризеры (breathers, “дышащие” решения) – решения, локализованные (убывающие на бесконечности) в одном направлении и периодические в другом. Для построения таких решений в $\mathbb{R}^2$ мы рассмотрим экстремальную задачу (5) в полосе $\Omega_R = (-R, R) \times \mathbb{R}$.

Вложение $H^s(\Omega_R)) \hookrightarrow L_q(\Omega_R)$ некомпактно, но стандартными рассуждениями доказывается, что при фиксированном R минимум достигается (см., напр., [4, Prop. 4.1]).

Минимизирующие функции u_R при больших R имеют единственную точку концентрации, лежащую на краю полосы. Нормируя u_R подходящим образом и распространяя решение в $\mathbb{R}^2$, мы получим положительное решение-бризер уравнения (1).

Замечание 2. Аналогично строятся решения типа бризера в $\mathbb{R}^n$. При этом, например, в $\mathbb{R}^3$ можно построить как решения, периодические по одной переменной и локализованные по двум другим, так и решения, образующие одну из рассмотренных выше периодических структур по двум переменным и локализованные по третьей.

Знакопеременные решения. Рассмотрим теперь в фундаментальной области Ω_R экстремальную задачу

$$J^{\mathcal{D}}_{s,q,\Omega_R}(u) := \frac{[u]^2_{\mathcal{D},\Omega_R} + \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega_R)}} \to \min, \qquad u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, минимум в этой задаче достигается, минимайзер положителен в Ω_R и после домножения на подходящую константу является решением (с наименьшей энергией) уравнения

$$(-\Delta)^s_{\mathcal{D}} u + u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \Omega_R. \tag{9}$$

Теперь распространим это решение во все пространство $\mathbb{R}^n$ **нечетными** отражениями. Аналогично теореме 1 показывается, что полученная функция $\mathbf{u}$ будет периодическим знакопеременным решением уравнения (1) в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что в данном случае для различных фундаментальных областей получаются различные структуры независимо от наличия и локализации точек концентрации у решения в фундаментальной области. Однако, поскольку теорема 2 верна и для дробного лапласиана Дирихле, можно показать, что решение с наименьшей энергией имеет единственную точку концентрации в Ω_R при достаточно больших R.

Исходя из уравнения (9) в полосе, можно построить также знакопеременные решения уравнения (1) типа бризера.

Радиальные решения. Как указывалось ранее, существование и свойства радиальных решений уравнения (1) (в основном положительных) исследовались многими авторами. Для полноты картины укажем, что положительное радиальное решение легко получается максимизацией функционала $I_q[u] = \|u\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n)}$ на сфере в пространстве радиальных функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$. Далее, применяя теорему Люстерника–Шнирельмана (см., напр., [7, гл. 8])), мы получаем счетное число знакопеременных радиальных решений уравнения (1).

Список литературы

1. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* СПб. Лань, 2010.
2. J. F. Bonder, N. Saintier, A. Silva, *The concentration-compactness principle for fractional order Sobolev spaces in unbounded domains and applications to the generalized fractional Brezis–Nirenberg problem.* — Nonlin. Diff. Eq. Appl., **25** (2018),paper No. 52.
3. S. Dipierro, G. Palatucci, E. Valdinoci, *Existence and symmetry results for a Schrödinger type problem involving the fractional Laplacian.* — Matematiche, **68** (2013), 201–216.
4. L. M. Lerman, P. E. Naryshkin, A. I. Nazarov, *Abundance of entire solutions to nonlinear elliptic equations by the variational method.* — Nonlin. Analysis, **190** (2020), paper No. 111590.
5. S. Mosconi, K.Perera, M. Squassina , Y. Yang, *The Brezis–Nirenberg problem for the fractional p-Laplacian.* — Calc. Var. Part. Differ. Eqs., **55**, No. 4, (2016), paper No. 105.
6. R. Musina, A. I. Nazarov, *On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian.* — Nonlin. Analysis, **121** (2015), 123–129.
7. В. Г. Осмоловский, *Нелинейная задача Штурма–Лиувилля.* — Изд-во СПб. ун-та, СПб. (2003), 230 с.
8. G. Palatucci, A. Pisante, *Improved Sobolev embeddings, profile decomposition, and concentration-compactness for fractional Sobolev spaces.* — Calc. Var. Part. Diff. Eqs., **50**, No. 3–4, (2014) 799–829.
9. P. R. Stinga, J. L. Torrea, *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators.* — Comm. Part. Diff. Eqs., **35**, No. 11, (2010) 2092—2122.
10. Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* — М. Мир, 1980.
11. Н. С. Устинов, *О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка.* — Функц. анализ и его прилож., **54**, No. 4, (2020) 85–97.
12. Н. С. Устинов, *О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью.* — Алгебра и анализ, **33**, No. 1, (2021) 194–212.

Nazarov A. I. and Shcheglova A. P. New classes of solutions to semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ with fractional Laplacian.

We study bounded solutions to the fractional equation

$$(-\Delta)^s u + u - |u|^{q-2}u = 0$$

in $\mathbb{R}^n$ for $n \geqslant 2$ and subcritical exponent $q > 2$. Applying the variational approach based on concentration arguments and symmetry considerations which was introduced by Lerman, Naryshkin and Nazarov (2020) we construct several types of solutions with various structures (radial, rectangular, triangular, hexagonal, breather type, etc.), both positive and sign-changing.

Поступило 23 сентября 2021 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург.
С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
199304, С.-Петербург, СПбГУ, Россия
E-mail: nazarov@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский электротехнический
университет, ул. проф. Попова 5,
197376, Санкт-Петербург, СПбГЭТУ
С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
199304, С.-Петербург, СПбГУ, Россия
E-mail: apshcheglova@etu.ru