Математические заметки

том 54 выпуск 1 июль 1993

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛАКСА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ, ОПРЕДЕЛЕННЫМ НА НАКРЫТИЯХ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Ю. Н. Федоров

В современном подходе к интегрируемым гамильтоновым системам ключевым моментом является представление их уравнений движения в коммутационной форме Лакса. Оно позволяет не только находить первые интегралы заданных уравнений и их решения в явном виде, но и строить целые иерархии динамических систем, фазовые потоки которых коммутируют друг с другом.

Среди иерархий конечномерных систем наиболее известны многомерные интегрируемые обобщения классических систем Эйлера и Клебша, найденные Манаковым [1] и Переломовым [2].

Для этих и множества других интегрируемых систем их представления Лакса зависят от дополнительного (спектрального) параметра, пробегающего компактифицированную комплексную плоскость или эллиптическую кривую (риманову поверхность рода 1). До последнего времени не было известно физически содержательных примеров, в которых спектральный параметр изменялся бы на алгебраической кривой более высокого рода.

В данной статье для двух названных выше иерархий систем приводятся лаксовы представления с параметром, определенном на некотором неразветвленном накрытии произвольной гиперэллиптической привой. При этом симметрии и общие свойства последних позволяют установить полный изоморфизм инвариантных торов многомерных систем Эйлера-Манакова и Клебша-Переломова, что является обобщением одного из результатов работы [3].

Следует отметить, что иным способом связь между обеими системами одинаковой размерности была установлена в работе [4]. Согласно ее выводам, любая система Манакова, будучи гамильтоновой относительно скобки Ли-Пуассона алгебры $so(n)$, является одновременно таковой и относительно скобки алгебры $e(n-1)$, но уже с другим гамильтонианом. Послед-

© Ю. Н. Федоров 1993

ний, в результате некоторой линейной замены динамических переменных, принимает вид гамильтониана системы Клебша-Переломова. Отсюда вытекает, что, с учетом данной замены, расслоение фазового пространства на инвариантные торы одинаково для обеих систем.

Ниже будет показано, что представление последних в форме Лакса позволяет описать данный изоморфизм торов в явном виде, то есть указать формулы пересчета констант первых интегралов одной из задач в интегральные константы другой задачи.

Отметим также, что с помощью предлагаемой в настоящей статье конструкции автором была найдена иерархия многомерных интегрируемых обобщений классических систем Стеклова и Ляпунова. Механизм их построения будет рассмотрен в отдельной публикации.

1. Представления Лакса с рациональным параметром. В этом пункте рассматриваются необходимые для дальнейшего изложения известные результаты, касающиеся двух упомянутых выше иерархий гамильтоновых систем.

Напомним, что уравнения свободного движения n-мерного твердого тела

$$\dot{X} = [X, \Omega], \tag{1}$$

где $\Omega \in so(n)$ — его угловая скорость, $X \in so^*(n)$ — кинетический момент, являются интегрируемыми по Лиувиллю, если операторы X и Ω связаны соотношениями

$$[X, V] = [\Omega, U], \tag{2}$$

где U, V — постоянные диагональные матрицы,

$$U = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n), \quad V = \operatorname{diag}(a_1', \ldots, a_n').$$

причем, все собственные значения как U, так и V различны.

Данный факт интегрируемости следует из существования найденного С.В.Манаковым представления Лакса [1]

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), A(\lambda)], \quad L(\lambda) = X + \lambda U, \quad \lambda \in \mathbb{C}U\infty, \tag{3}$$

$$A(\lambda) = \Omega + \lambda V. \tag{4}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в (3), (4), получим: при λ^0 — уравнения (1), при λ, λ^2 (с учетом (2)) — нулевые тождества.

Коэффициенты разложения по λ инвариантов $\operatorname{tr} L^k(\lambda)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$ определяют полный набор независимых первых интегралов системы.

В дальнейшем всюду будем рассматривать наиболее наглядный случай $V = U^2$. При этом $\Omega = UX + XU$ (тензор инерции становится диагональным), и уравнения Эйлера (1) в скалярной форме принимают простой вид

$$\dot{X_{ij}} = (a_j - a_i) \sum_{k=1}^{n} X_{ik} X_{kj}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Помимо данной системы существует целая иерархия "высших систем" Манакова, фазовые потоки которых коммутируют с (5). Каждая из этих систем задается своим $A(\lambda)$-оператором в представлении (3).

Множество всех таких операторов порождается оператором $L(\lambda)$ с помощью алгоритма, являющегося реализацией общей схемы Адлера–Констант [5], а именно:

1) матричный полином

$$L^k(\lambda) = X^k + \lambda\{X^{k-1}, U\} + \cdots + \lambda^{k-1}\{X, U^{k-1}\} + \lambda^k U^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

где через $\{X^s, U^r\}$ обозначается однородный симметрический матричный полином по X и U соответственно степени s и r, (например: $\{X, U\} = XU + UX$, $\{X, U^2\} = XU^2 + UXU + U^2X, \ldots$), умножим на λ^{-r},

2) из полученного отбросим члены при отрицательных степенях λ.

Тогда для нечетных значений разностей $l = k - r$ множество полиномов

$$A_{l,r}(\lambda) = \{X^l, U^r\} + \lambda\{X^{l-1}, U^{r+1}\} + \cdots + \lambda^l U^{r+l},$$

свободные члены которых являются кососимметрическими матрицами, и будет представлять собой упомянутый набор A-операторов.

Раскладывая по степеням λ обе части лаксовых уравнений

$$(X + \lambda U)^{\cdot} = [(X + \lambda U), \quad A_{l,r}(\lambda)],$$

при λ^0 получим высшие системы Манакова

$$\dot{X} = [X, \{X^l, U^r\}], \quad l = 1, 3, 5, \ldots, \quad r \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

а при остальных степенях, как нетрудно показать, нулевые тождества.

Можно также показать, что множество систем (6) является полным, то есть любой поток, коммутирующий с (5), определяется некоторой линейной комбинацией правых частей (6).

Все высшие системы Манакова имеет гамильтонову форму, отвечающую скобке Ли-Пуассона алгебры $so(n)$:

$$\dot{X} = [X, \operatorname{grad}_X H_{l,r}(X, U)],$$

где гамильтонианы $H_{l,r}(X,U)$ определяются равенствами

$$\operatorname{grad}_X H_{l,r}(X,U) = \{X^l, U^r\}$$

однозначно с точностью до прибавления инвариантов алгебры $so(n)$

$$\mathcal{L}_k = \operatorname{tr}(X^k), \quad k = 2,4,\ldots .$$

Другая иерархия систем была построена в результате многомерных обобщений интегрируемых случаев Клебша в задаче о движении твердого тела в жидкости [6]. Данные системы оказываются эквивалентными уравнениям движения твердого тела в силовом поле с квадратичным потенциалом (задача Бруна [7]). Последний для случая m измерений запишем в виде

$$Y(\gamma) = (\gamma, \mathcal{J}\gamma)/2, \quad \mathcal{J} = \operatorname{diag}(\mathcal{J}_1,\ldots,\mathcal{J}_m), \quad \mathcal{J}_1,\ldots,\mathcal{J}_m = \text{const}\,.$$

Здесь γ — постоянный вектор в $\mathbb{R}^m$. Его эволюция в осях, жестко связанных с телом, описывается уравнением Пуассона

$$\dot{\gamma} = -\Omega\gamma, \tag{7}$$

где $\Omega \in so(n)$ — угловая скорость тела.

Полагая конетический момент тела M элементом коалгебры $so^*(m)$, связанным с Ω соотношениями

$$\Omega_{ij} = c_{ij} M_{ij}, \quad c_{ij} = \text{const}, \quad i,j = 1,\ldots,m$$

(т.е. считая тензор инерции диагональным), мы можем записать

$$\begin{aligned} \dot{M} &= [M,\Omega] + [\Gamma,\mathcal{J}], \\ \dot{\Gamma} &= [\Gamma,\Omega], \quad \Gamma_{ij} = \gamma_i\gamma_j . \end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, что второе матричное уравнение является следствием (7).

Как показал А.В.Переломов ([2]), система (8) допускает представление Лакса с рациональным спектральным параметром

$$(\Gamma/\lambda + M + \lambda I)^{\cdot} = \left[\Gamma/\lambda + M + \lambda I,\ \Omega + \lambda I^2\right],$$

где $I = \operatorname{diag}(I_1,\ldots,I_m)$, $I = \text{const}$, а M и Ω связаны соотношением

$$[M,\mathcal{J}] + [I,\Omega] = 0,$$

так что $c_{ij} = (I_i - I_j)/(\mathcal{J}_i - \mathcal{J}_j)$, $i < j = 1, \ldots, m$.

Положим теперь для простоты $\mathcal{J} = I^2$ и, следовательно, $\Omega = IM + MI$. Тогда иерархия "высших" систем Клебша-Переломова, отвечающая оператору $L(\lambda) = \Gamma/\lambda + M + \lambda I$, порождается представлениями Лакса

$$L^{\cdot}(\lambda) = [L(\lambda), A_{k,r}(\lambda)], \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad k - r \text{ нечетно}, \tag{9}$$

где, как и в предыдущем примере, $A_{k,r}(\lambda)$ получаются из полиномов $\lambda^{-r}L^k(\lambda)$ отбрасыванием главных частей.

Представление (9) с матрицей $A_{1,0}$ приводит к простейшей системе иерархии

$$\begin{aligned} M^{\cdot} &= [\Gamma, I], \\ \Gamma^{\cdot} &= [\Gamma, M], \quad \Gamma_{ij} = \gamma_i\gamma_j, \end{aligned} \tag{10}$$

которая при условии $M_{ij} = \gamma_i\dot{\gamma}_j - \gamma_j\dot{\gamma}_i$, является m-мерным интегрируемым обобщением задачи Неймана о движении материальной точки по сфере $(\gamma, \gamma) = 1$ в поле с квадратичным потенциалом $(\gamma, I\gamma)/2$ [8]. Матрица M здесь играет роль кинетического момента точки относительно начала координат.

2. "Гиперэллиптические" лаксовы пары. Перейдем теперь к описанию основных конструкций данной статьи. Указанные выше представления Лакса иерархий Манакова и Переломова не являются единственными, и спектральный параметр может вводиться иным образом. Так, для уравнений Эйлера-Арнольда (5) эквивалентная лаксова пара имеет вид

$$L^{\cdot}(s) = [L(s), A(s)], \tag{11}$$

$$L(s)_{ij} = \sqrt{\Phi(s)}/\sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}X_{ij}, \quad A(s)_{ij} = \sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}X_{ij},$$

$$\Phi(s) = (s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

где $s \in \mathbb{C}$ — произвольный параметр.

Здесь функции $w_{ij} = \sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}$, называемые в дальнейшем биradикалами, по условию подчиняются соотношениям

$$w_{ik}w_{kj} = (s - a_k)w_{ij} \tag{12}$$

И, как мы увидим ниже, являются однозначными на некотором неразветвленном накрытии плоской гиперэллиптической кривой $\Gamma_n : \{w^2 = \Phi(s)\}$. Отсюда следует, что на том же накрытии однозначны и фигурирующие в $L_{ij}(s)$ отношения w/w_{ij}. В связи с этим, данное представление Лакса и параметр s мы будем называть гиперэллиптическим.

Выписывая явно в скалярной форме равенства (11), и, учитывая соотношения (12), после сокращения оставшихся радикалов получим в точности систему (5).

Другие системы из той же иерархии на $so(n)$ получаются при замене в (11) оператора $A(s)$ на

$$A_{l,r}(s) = SP_{l,r}(s)S, \tag{13}$$

где $S = \operatorname{diag}(\sqrt{s-a_1}, \ldots, \sqrt{s-a_n})$,

$$P_{l,r}(s) = s^{r-1}X^l + s^{r-2}\{X^l, U\} + \cdots + s\{X^l, U^{r-2}\} + \{X^l, U^{r-1}\}. \tag{14}$$

Так, для операторов $A_{1,r}(s)$, линейных по X, будем иметь

$$A_{1,r}(s)_{ij} = \sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}\sum_{l=1}^{r} s^{r-l}\frac{a_j^l - a_i^l}{a_j - a_i}X_{ij}. \tag{15}$$

При этом выражение в скобках в правой части является полной симметрической функцией трех аргументов s, a_i, a_j степени $r-1$.

Операторы (15) порождают на $so(n)$ квадратичные потоки с гамильтонианами

$$H_{1,r} = -\frac{1}{2r}\operatorname{tr}(X\{X, U^r\}) = \frac{1}{2}\sum_{j<i}^{n}\frac{a_j^k - a_i^k}{a_j - a_i}X_{ij}^2, \quad k = r+1.$$

Что касается общих A-операторов (13), то, подставляя их явные выражения в (11), после сокращений получим в точности высшие системы Манакова (6).

Действительно, в результате такой подстановки после избавления от радикалов и учитывая равенство $S^2 = sE - U$ будем иметь

$$\dot{X} = s[X, P_{l,r}(s)] - (XP_{l,r}(s)U - UP_{l,r}(s)X).$$

Используя затем разложение (14), найдем, что в правой части последнего уравнения коэффициент при s^ν $(\nu > 0)$ имеет вид

$$[X, \{X^l, U^{r-\nu}\}] - (X\{X^l, U^{r-\nu-1}\}U - U\{X^l, U^{r-\nu-1}\}X),$$

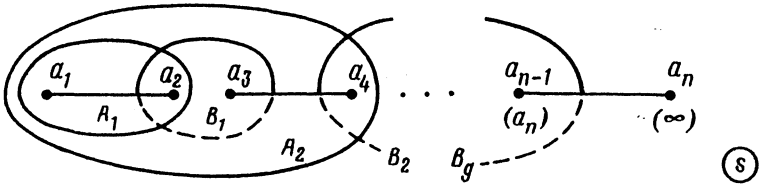
что, в силу определения матричных полиномов $\{X^r, U^s\}$, тождественно обращается в ноль. Оставшийся при этом свободный член совпадает с правой частью (6).

Таким образом, множество операторов (13) порождает полную иерархию систем Манакова.

Займемся теперь описанием кривой, на которой фактически определен спектральный параметр гиперэллиптической пары Лакса.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1) *Бирадикалы* w_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, *подчиняющиеся условиям* (12), *вместе с отношениями* w/w_{ij} *являются однозначными функциями на* $\widehat{\Gamma}_n$ — 4^g*-листном неразветвленном накрытии гиперэллиптической кривой* Γ_n *рода* g. *На основании формулы Римана-Гурвица* (*см.* [9]) *род кривой* $\widehat{\Gamma}_n$ *равен* $4^g(g-1)+1$.

2) *Для описания топологии данного накрытия пронумеруем все его* 4^g *листов с помощью упорядоченного набора* g *индексов* $(i_1, \ldots, i_g)$, *принимающих значения* $0, 1, 2, 3$.

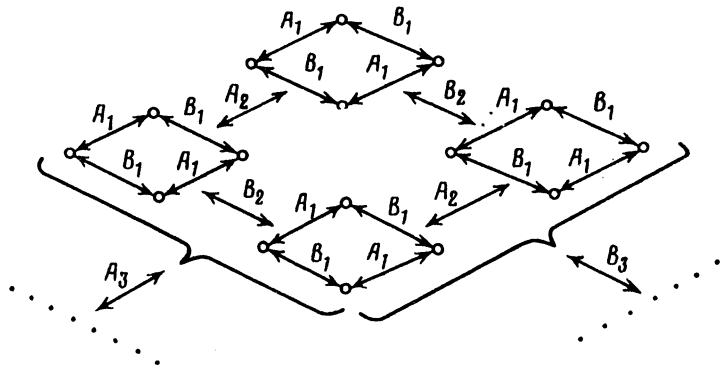


Фиг.

Переход с одного Γ_n*-листа на другой происходит при пересечении циклов* $A'_1, B'_1, \ldots, A'_g, B'_g$, *получаемых из циклов канонического базиса на* Γ_n $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g$ (*см. Фиг.*) *в результате предельного стягивания последних* (*т.е.* $A'_1, \ldots, B'_g$ *при проектировании на* s*-плоскость сливаются с отрезками, соединяющими точки ветвления* $a_1, \ldots, a_n$ (∞)). *Схема переходов такова:*

пересечение цикла	*изменение индекса*
A_r	i_r *нечетно:* $i_r \to i_r - 1$
	i_r *четно:* $i_r \to i_r + 1 \pmod 4$,
B_r	$i_r \to i_r + 2 \pmod 4$.

Более наглядно такая схема представляется с помощью "ромбической диаграммы", где Γ_n*-листы символически изображаются вершинами множества элементарных ромбов. В пределах одного такого ромба переход с листа на лист осуществляется при пересечении циклов* A'_1, B'_1 *в порядке, указанном стрелками. Четверки элементарных ромбов группируются в "вершины" ромбов 2-го порядка, последние, в свою очередь, также являются "вершинами" ромбов следующего порядка, и так далее до степени* g. *Переход между вершинами порядка* r (*с сохранением положений вершин остальных порядков*) *происходит при пересечении на* Γ_n *циклов* A'_r, B'_r *также в соответствии с указаниями стрелок.*



Диагр.

Совершая последовательно обходы различных точек ветвления на Γ_n, *можно попасть таким образом на любой* Γ_n*-лист и вернуться в начальную точку.*

Полный прообраз каждого из циклов A_1, B_1, $\ldots, A_g$, B_g *на* $\widehat{\Gamma}_n$ *состоит из* $4^g/2$ *непересекающихся циклов на* $\widehat{\Gamma}_n$. *Однократному обходу цикла-прообраза при проектировании* $\widehat{\Gamma}_n \to \Gamma_n$ *соответствует цикл, пройденный дважды. Несколько злоупотребляя терминологией, можно сказать, что "риманова поверхность* $\widehat{\Gamma}_n$ *получается из плоской кривой* Γ_n *путем удвоения циклов ее канонического базиса".*

3) *При нечетных* n *на поверхности* $\widehat{\Gamma}_n$ *оказываются также однозначными и монорадикалы* $\sqrt{s-a_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Схема доказательства. В соответствии с числом различных комбинаций знаков набора монорадикалов $w_i = \sqrt{s-a_i}$, $i = 1, \ldots, n$, последние представляются однозначными функциями на 2^n-листном накрытии s-плоскости (каждому листу соответствует одна такая комбинация).

Число всевозможных комбинаций знаков у функций $\sqrt{(s-a_i)(s-a_j)}$ значительно превышает 2^n, однако, бирадикалы w_{ij}, удовлетворяющие соотношениям (11), всегда оказываются произведениями $w_i w_j$ и однозначны уже на G_n — 2^{n-1}-листном накрытии плоскости s (одновременная смена знаков у всех w_i сохраняет знаки всех w_{ij}). Понятно, что все точки ветвления данного накрытия при проектировании на s-плоскость отображаются в ее конечную область и являются простыми (кратности один).

Предположим теперь, что n четно. В этом случае все точки ветвления гиперэллиптической кривой Γ_n над s также лежат в ее конечной области, и G_n является в точности ее 2^{n-2}-листным неразветвленным накрытием. Действительно, учитывая условие $w = w_{12}w_{34}\ldots w_{n-1\,n}$, находим, что каждой точке $P = (s, w) \in \Gamma_n$, включая точки ветвления, соответствуют

2^{n-2} комбинаций знаков у w_{ij}.

При нечетных n поверхность Γ_n, в отличие от G_n, имеет бесконечно-удаленную точку ветвления и представить G_n в виде накрытия $G_n \to \Gamma_n$ уже не удается. Выход состоит в том, чтобы каждый s-лист в накрытии $G_n \to s$ заменить кривой Γ_n, полагая по определению, что на ее обоих s-листах каждый бирадикал w_{ij} (в отличии от w) имеет одинаковый знак. При этом кривая G_n превратится в $\mathcal{L}_n$ — 2^{n-1}-листное неразветвленное накрытие Γ_n.

Учитывая теперь, что в первом случае $2g = n-2$, во втором $2g = n-1$ и полагая соответственно $\widehat{\Gamma}_n = G_n$, либо $\widehat{\Gamma}_n = \mathcal{L}_n$, приходим к первой части утверждения.

Вторая и третья его части вытекают из определенных закономерностей изменения знаков функций w_i, w_{ij}, при обходах по циклам $A_1, \ldots, B_g$, а также из того, что при двухкратном обходе любого цикла канонического базиса на Γ_n знаки всех бирадикалов w_{ij} возвращаются к первоначальным значениям, и при подъеме на $\widehat{\Gamma}_n$ мы получаем простой цикл.

Во множестве систем (11) выделяется случай $n = 4$, когда, вследствие разложимости алгебры $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, операторы L и A могут быть "упакованы" в матрицы 3×3, и представление Лакса приобретает особенно симметричную форму (назовем ее $so(3)$-представление):

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta} &= \sqrt{(s-a_\delta)(s-a_4)}X_{\alpha\beta} + \sqrt{(s-a_\alpha)(s-a_\beta)}X_{\delta_4}, \\ A_{\alpha\beta} &= \sqrt{(s-a_\alpha)(s-a_\beta)}X_{\alpha\beta} + \sqrt{(s-a_\delta)(s-a_4)}X_{\delta 4}, \end{aligned} \tag{16}$$

индексы α, β, δ образуют циклические перестановки (1,2,3).

Составляя характеристическое уравнение $\det(L(s) - rE) = 0$, и выделяя в нем член при r, находим семейство квадратичных интегралов,

$$Q(s) = \sum_{\alpha=1}^{3} \left[\sqrt{(s-a_\alpha)(s-a_4)}X_\alpha + \sqrt{(s-a_\beta)(s-a_\delta)}X_{\alpha+3}\right]^2, \tag{17}$$
$$X_\alpha = X_{\beta\gamma},\ X_{\alpha+3} = X_{\alpha 4},\quad (\alpha,\beta,\delta) = (1,2,3),$$

которое ранее было получено в [10], [11], как множество вырожденных квадратичных форм ранга 3 в пространстве всех квадратичных интегралов систем Манакова на $so(4)$.

Обобщая теперь рассмотренную конструкцию, построим гиперэллиптическую пару Лакса для иерархии систем Клебша-Переломова на алгебре $e(m)$

$$\dot{L}(t) = [L(t), A(t)], \quad t \in \mathbb{C} \cup \infty, \tag{18}$$

где $L(t)$, $A(t)$ — кососимметрические матрицы $(m \times m)$

$$L(t) = \left\| \begin{array}{c|c} W(t) & P(t) \\ \hline -P^t(t) & 0 \end{array} \right\|, \qquad W(t)_{ij} = \frac{\sqrt{\Psi(t)}}{\sqrt{(t-I_i)(t-I_j)}} M_{ij},$$

$$P(t)_i = \sqrt{\Psi(t)}/\sqrt{t-I_i}\gamma_i, \qquad \Psi(t) = (t-I_1)(t-I_2)\dots(t-I_m),$$

$$i,j = 1,2,\dots,m.$$

При этом для обобщенной системы Неймана (10) соответствующий оператор $A(t)$ имеет простейший вид

$$A(t) = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & -\sqrt{t-I_1}\gamma_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{t-I_m}\gamma_m \\ \sqrt{t-I_1}\gamma_1 & \dots & \sqrt{t-I_m}\gamma_m & 0 \end{array} \right\|,$$

а для системы Бруна–Клебша (8) при условии $J = I^2$ следует положить

$$A(t) = \left\| \begin{array}{ccc} & \vdots & -\sqrt{t-I_1}(t+I_1)\gamma_1 \\ W_{ij}(t) & \vdots & \dots \\ & \vdots & -\sqrt{t-I_m}(t+I_m)\gamma_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{t-I_1}(t+I_1)\gamma_1 \dots \sqrt{t-I_m}(t+I_m)\gamma_m & \vdots & 0 \end{array} \right\|,$$

$$W_{ij}(t) = \sqrt{(t-I_i)(t-I_j)}M_{ij}, \quad i,j = 1,2,\dots,m, \quad W_{ii} = 0.$$

Как и в предыдущем примере, можно указать также целую иерархию операторов $A(t)$, порождающих на $e(m)$ те же системы, что и представления Лакса с рациональным параметром (9).

Фигурирующие в (18) радикалы $v = \sqrt{\Psi(t)}$, $v_{ij} = \sqrt{(t-I_i)(t-I_j)}$, $v_i = \sqrt{t-I_i}$, по определению удовлетворяют соотношениям вида (12)

$$v_{ik}v_{kj} = (t-I_k)v_{ij},$$

и, согласно Утверждению 1, при нечетных m являются однозначными функциями на кривой $\widehat{\Gamma}_m$, накрывающей гиперэллиптическую кривую Γ_m : $\{v^2 = \Psi(t)\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *При четных m все данные радикалы есть однозначные функции на $\mathcal{D}_m$ — двулистном накрытии кривой $\widehat{\Gamma}_m$, разветвленном в 2^{m-1} бесконечноудаленных точках на листах $\Gamma_m \subset \widehat{\Gamma}_m$. Более точно, на каждом Γ_m-листе поверхности $\widehat{\Gamma}_m$ проводятся идентичные разрезы, соединяющие пары точек P_∞^+, P_∞^-, $t(P_\infty^+) = t(P_\infty^-) = \infty$ и не пересекающие циклы $A_1, \ldots, B_g$. Такая же процедура проделывается со вторым экземпляром $\widehat{\Gamma}_m$, после чего склеиваются противоположные берега соответствующих разрезов на разных экземплярах $\widehat{\Gamma}_m$. Полученная поверхность и есть $\mathcal{D}_m$.*

Доказательство заключается в проверке того, что $\mathcal{D}_m$ есть 2^m-листное накрытие t-плоскости с однозначно определенными на чем монорадикалами $\sqrt{t-I_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Как и в системах Манакова, для случая, когда (M, γ) принадлежат шестимерной коалгебре $e(3)$, $L-$ и A-операторы в (18) могут быть записаны в $so(3)$-представлении

$$L_{\alpha\beta}(t) = \varepsilon_{\alpha\beta\delta}\left(\sqrt{t-I_\delta}M_\delta + \sqrt{(t-I_\alpha)(t-I_\beta)}\gamma_\delta\right) \tag{19}$$

$$\begin{aligned}(A_0)_{\alpha\beta}(t) &= \varepsilon_{\alpha\beta\delta}\sqrt{t-I_\delta}\gamma_\delta,\\ (A_1)_{\alpha\beta}(t) &= \varepsilon_{\alpha\beta\delta}\left(\sqrt{(t-I_\alpha)(t-I_\beta)}M_\delta + \sqrt{t-I_\delta}(t+I_\delta)\gamma_\delta\right),\\ M_1 &= M_{23}, \quad M_2 = M_{31}, \quad M_3 = M_{12}, \quad (\alpha,\beta,\delta) = (1,2,3).\end{aligned} \tag{20}$$

Составляя для данного случая характеристическое уравнение $\det(L(t) - zE) = 0$, найдем однопараметрическое семейство квадратичных интегралов ранга три

$$Q(t) = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\sqrt{t-I_\alpha}M_\alpha + \sqrt{(t-I_\beta)(t-I_\delta)}\gamma_\delta\right)^2. \tag{21}$$

Другим способом операторы (19), (20) в эквивалентном $su(2)$-представлении были найдены также А.И.Бобенко [3]. Он получил их в результате преобразования $L - A$ пары для известного в физике уравнения в частных производных Ландау–Лифшица [12], используя то обстоятельство, что последнее, как показано в [13], в ряде случаев сводится к системам Неймана и Клебша.

Вместе с тем, о представлении интегралов в виде семейства (21) было известно еще Ф.Кеттеру, который использовал его специальный вид для явного интегрирования системы Клебша [14].

3. Изоморфизм торов. Сходство структур операторов $L(s)$ и $L(t)$ систем (6) и (8) указывает на тесную связь их инвариантных многообразий. Для ее выявления предположим, что параметры в этих операторах связаны соотношениями

$$t = 1/(s - a_n), \quad a_i - a_n = 1/I_i, \tag{22}$$

в силу которых, возникают формальные равенства

$$\begin{aligned} \sqrt{(s-a_i)(s-a_j)} &= \frac{1}{t}\sqrt{(t-I_i)(t-I_j)}/\sqrt{I_i I_j}, \\ \sqrt{\Phi(s)} &= \frac{1}{t^{n/2}}\sqrt{\Psi(t)}/\sqrt{\Psi(0)}, \\ \sqrt{(s-a_i)(s-a_n)} &= \frac{1}{t}\sqrt{t-I_i}/\sqrt{-I_i}, \quad i = 1, \ldots, m = n-1. \end{aligned} \tag{23}$$

Каждое из равенств (23) определено с точностью до знака. Однако, если их левые (правые) части интерпретировать как функции w_{ij}, w (соответственно v_{ij}, v_i, v), однозначные на римановых поверхностях $\widehat{\Gamma}_n$ ($\widehat{\Gamma}_m$ либо $\mathcal{D}_m$) и зафиксировать дополнительно определенные знаки ветвей $v_i(t = 0) = \sqrt{-I_i}$, то окажется справедливым

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. 1) *Для любой точки $P \in \widehat{\Gamma}_n$ найдется единственная точка $Q \in \widehat{\Gamma}_m(\mathcal{D}_m)$, непрерывно зависящая от P, такая, что $s(P)$, $t(Q)$ связаны соотношением* (22), *и равенства* (23), *как соотношения между функциями от P и Q, являются точными;*

2) *при четных n соответствие между Q и P является взаимнооднозначным и, тем самым, определяет изоморфизм кривых $\widehat{\Gamma}_m$ и $\widehat{\Gamma}_n$;*

3) *при нечетных n каждой точке Q соответствует два прообраза P_1, P_2, за исключением тех точек, для которых $t(Q) = 0$, и соответствие однозначно. Кривая $\widehat{\Gamma}_n$ представляется, таким образом, как двулистное накрытие $\mathcal{D}_m$, разветвленное в 2^m точках $t = 0$.*

Доказательство вытекает из определения кривых $\widehat{\Gamma}_m$, $\widehat{\Gamma}_n$, $\mathcal{D}_m$ и свойств их представлений в виде накрытий $s(t)$-плоскости.

Сравнивая теперь операторы $L(t)$ и L(s) иерархий систем Клебша и Манакова на соответствующих алгебрах одинаковой размерности, находим, что последний оператор, в результате замены переменных

$$X_{ij} = \frac{\sqrt{\Psi(Q_0)}}{v_{ij}(Q_0)} M_{ij}, \quad X_{in} = \frac{\sqrt{\Psi(Q_0)}}{v_i(Q_0)}\gamma_i, \quad i, j = 1, \ldots, m = n-1,$$

(Q_0 — любая фиксированная точка ветвления, $t(Q_0) = 0$), в силу равенств (23) и Утверждения 3, переходит в первый с точностью до умножения на t^l, $l = n/2 - 1$.

Поскольку характеристические уравнения для двух L-операторов, отличающихся скалярным множителем, приводят к одному и тому же набору первых интегралов, то справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Для иерархий интегрируемых систем Манакова на $so(n)$ и Клебша на $e(n-1)$, параметры которых связаны соотношениями (22), имеет место изоморфизм их инвариантных торов.*

Приравняем теперь значения интегральных констант d_{ij} систем Клебша — коэффициентов характеристического полинома

$$\det(L(t) - zE) = \sum d_{ij} t^i z^j,$$

к коэффициентам при тех же степенях t, z в выражении, получаемом из полинома

$$\det(L(s) - rE) = \sum h_{ij} s^i r^j,$$

(h_{ij} — константы интегралов систем Манакова) в результате подстановки $s = (1 + a_n t)/t$, $r = z/t^l$, и последующего умножения на t^N, $N = [n/2]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. В итоге получим соотношения между интегральными константами обеих систем, которые описывают названный изоморфизм торов в явном виде.

4. Замечания об однозначности решений. Гироскопическая система Жуковского–Вольтерра. Благодаря так называемому методу обратной задачи рассеяния (ОЗР) [15], представление интегрируемой системы в форме Лакса со спектральным параметром λ позволяет в принципе указать ее явные решения в тэта-функциях. Последние определены на многообразии Якоби $\mathrm{Jac}(C)$ алгебраической спектральной кривой C

$$C: \{P(\lambda), \mu) = \det(L(\lambda) - \mu E) = 0\}$$

или на его некотором абелевом подмногообразии — так называемом многообразии Прима $\mathrm{Prym}(C) \subset \mathrm{Jac}(C)$.

Однако, при таком подходе может возникнуть следующая особенность. Как показал Л.Хайне [11], в результате применения метода ОЗР к представлению Лакса с рациональным параметром (3), матрица X в системах Эйлера-Манакова на алгебрах $so(3)$, $so(4)$ может быть восстановлена лишь с точностью до действия конечной дискретной группы

$$G = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\},$$

меняющей знаки у некоторых из переменных X_{ij}. Группа G переводит в себя дифференциальные уравнения и их первые интегралы. Отсюда, в частности, следует, что в тэта-функциях, ассоциированных со спектральной

кривой C для рационального параметра λ, однозначно выражаются квадраты переменных X_{ij}, но не сами эти переменные.

Аналогичная ситуация имеет место для решений систем Манакова на $so(n)$ (порядок группы G при этом увеличивается) и систем Неймана–Клебша, получаемым из $(L-A)$-пары Переломова (9) с рациональным спектральным параметром.

Вместе с тем, как показано также в [11], переменные X_{ij} ($X \in so(3)$, $so(4)$) могут быть выражены однозначно через тэта-функции на $\mathrm{Prym}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ — некоторая алгебраическая кривая, совпадающая в нашем случае со спектральной кривой гиперэллиптического представления Лакса (11).

Учитывая сказанное, естественно предположить, что и для произвольной размерности n представление (11), в отличие от $(L-A)$-пары с рациональным параметром, позволяет построить однозначные решения для X_{ij}. Было бы интересно проверить истинность данной гипотезы.

То, что гиперэллиптическое представление Лакса может заключать в себе больше информации об алгебраической структуре динамической системы, наглядно проявляется в еще одном интегрируемом обобщении уравнений Эйлера — задаче Жуковского-Вольтерра, описывающей свободное движение тела с ротором (гиростата):

$$M = M \times \omega, \quad \omega_\alpha = a_\alpha M_\alpha - g_\alpha, \quad M, \omega, \quad g \in \mathbb{R}^3. \tag{24}$$

Здесь M — кинетический момент гиростата, ω — угловая скорость теланосителя, а g — произвольный постоянный в теле вектор, связанный с кинетическим моментом ротора.

Данные уравнения замечательны тем, что в их правой части, помимо квадратичных, содержатся также линейные члены по переменным M_1, M_2, M_3.

Такое, внешне элементарное обобщение однородных уравнений Эйлера приводит, однако, к неизмеримо более сложной процедуре его явного интегрирования (В.Вольтерра [16]).

Подчеркнем, что ни сама эта обобщенная система, ни ее первые интегралы уже не инвариантны относительно замен вида $M_\alpha \to -M_\alpha$.

Представление Лакса системы (24) с рациональным параметром, которое обобщало бы $(L-A)$-пары (3), до сих пор не обнаружено, и последнее обстоятельство, видимо, в принципе накладывает запрет на его существование.

Что же касается $(L-A)$-пары с эллиптическим параметром, то, обобщая представление (11), находим его в виде

$$\dot{L}(s) - [L(s), A(s)], \tag{25}$$

$$L(s)=\left\|\begin{array}{ccc} 0 & -\sqrt{s-a_3}M_3-\dfrac{g_3}{\sqrt{s-a_3}} & \sqrt{s-a_2}M_2+\dfrac{g_2}{\sqrt{s-a_2}} \\ \sqrt{s-a_3}M_3+\dfrac{g_3}{\sqrt{s-a_3}} & 0 & -\sqrt{s-a_1}M_1-\dfrac{g_1}{\sqrt{s-a_1}} \\ -\sqrt{s-a_2}M_2-\dfrac{g_2}{\sqrt{s-a_2}} & \sqrt{s-a_1}M_1+\dfrac{g_1}{\sqrt{s-a_1}} & 0 \end{array}\right\|,$$

$$A(s)=\left\|\begin{array}{ccc} 0 & -\sqrt{(s-a_1)(s-a_2)}M_3 & \sqrt{(s-a_1)(s-a_3)}M_2 \\ \sqrt{(s-a_1)(s-a_2)}M_3 & 0 & -\sqrt{(s-a_2)(s-a_3)}M_1 \\ -\sqrt{(s-a_1)(s-a_3)}M_2 & \sqrt{(s-a_2)(s-a_3)}M_1 & 0 \end{array}\right\|,$$

где выражения $\sqrt{s-a_\alpha}$, как и для системы Клебша на $e(3)$, могут быть представлены эллиптическими функциями.

Из представления (25) вытекает, что $dg_\alpha/dt=0$.

Условие неизменности спектра оператора $L(s)$ приводит к семейству неоднородных по переменным M_α интегралов

$$Q(s)=\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\sqrt{s-a_\alpha}M_\alpha+\frac{g_\alpha}{\sqrt{s-a_\alpha}}\right]^2=Q_1s-Q_0+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{g_\alpha^2}{s-a_\alpha},$$

где $Q_1=M_1^2+M_2^2+M_3^2$, $Q_0=a_1M_1^2+a_2M_2^2+a_3M_3^2-2M_1g_1-2M_2g_2-2M_3g_3$ — интегралы модуля кинетического момента и энергии.

Интересно отметить, что попытки построить многомерные интегрируемые обобщения системы Жуковского, используя при этом общую структуру $L-$ и $A-$операторов в представлении (25), не приводят к желаемому результату. В связи с этим возникает предположение, что интегрируемость уравнений (24), в отличие от "однородных" систем Эйлера-Манакова, есть существенно трехмерное явление, обусловленное уникальным свойством разложимости алгебры $so(4)$.

Автор глубоко признателен Б.А.Дубровину за стимулирующие обсуждения.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступило
04.03.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функцион. анализ и его прил. 1976. Т. 10. №4. С. 93–94.

[2] Переломов А.М. Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости // Функцион. анализ и его прил. 1981. Т. 15. №2. С. 83–85.

[3] Бобенко А.И. Уравнения Эйлера на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$. Изоморфизм интегрируемых случаев // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. №1. С. 64–66.

[4] Болсинов А.В. Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1987.

[5] Kostant B. The solution to generalized Toda lattice and representation theory // Advances in Math. 1979. V. 34. №3. P. 195–338.

[6] Clebsch A. Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // Math. Ann. 1870. №3. P. 238–262.

[7] Brun F. Rotation krix fix punkt // Üvers. konigl. sven ıca. vetenk. Akad. Vorhandl. Stockholm. №7. P. 455–468.

[8] Neumann C. De probleme quodam mechanico, quod ad primam integralium ultra-ellipticoram classem revocatum // J. reine und angew. Math. 1859. №56. P. 46–63.

[9] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.

[10] Adler M., van Moerbeke P. Geodesic flows on $so(4)$ and intersections of quadrics // Proc. Natl. Acad. Sci. USA 1984. V. 81. P. 4613–4616.

[11] Heine L. Geodesic flows on $so(4)$ and abelian surfaces // Math. Ann. 1983. V. 263. P. 435–472.

[12] Склянин Е.К., Боровик А.Е. Об интегрируемости уравнения Ландау-Лифшица. Ленинград: Препринт ЛОМИ Е–3–79, 1979.

[13] Веселов А.П. Уравнение Ландау-Лифшица и интегрируемые системы классической механики // ДАН СССР 1983. Т. 270. №5. С. 1094–1097.

[14] Kotter E. Uber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit I, II // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. 1892. V. 109. P. 51–81, 89–111.

[15] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Кричивер И.М. Интегрируемые системы // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1985. Т. 4. С. 179–285.

[16] Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta Math. 1899. V. 22. P. 201–357.