Ха Зуй Банг, О некоторых теоремах вложения пространств периодических функций бесконечного порядка,
Матем. заметки, 1988, том 43, выпуск 4, 509–517

https://www.mathnet.ru/mzm4358

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 43, № 4 (1988)

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ха Зуй Банг

При решении нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка в классе периодических функций возникает необходимость изучения теорем вложения пространств Соболева бесконечного порядка периодических функций. Теоремы вложения пространств бесконечного порядка рассматривались в [1—4]. В данной работе методом, отличным от методов [1—4], получены легко проверяемые условия вложения и компактности для таких пространств.

Пусть $0 \leqslant a_n$ — произвольная последовательность чисел, которая содержит некоторую бесконечную подпоследовательность положительных элементов, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant r < \infty$. Обозначим через $W^\infty \{a_n, p, r\}$ $(0, 2\pi)$ пространство всех 2π-периодических функций $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ таких, что

$$|||f|||_a^r = \sum_{n=0}^\infty a_n \|D^n f\|_p^r < \infty.$$

Аналогично вводится пространство $W^\infty \{b_n, p, r\}$ $(0, 2\pi)$.

Изучим следующее вложение:

$$W^\infty \{a_n, p, r\}(0, 2\pi) \subset W^\infty \{b_n, p, r\}(0, 2\pi). \qquad (1)$$

Докажем сначала вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1. *Пусть* $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ — 2π-*периодическая функция и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда всегда существует предел*

$$d_f = \lim_{n\to\infty} \| D^n f \|_p^{1/n},$$

причем

$$d_f = \sigma_f = \sup \{ |k| : k \in \operatorname{supp} \hat{f}(\xi)\},$$

где $\hat{f}(\xi)$ — *преобразование Фурье функции* $f(x)$.

Доказательство. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx},$$

где $f_k = (2\pi)^{-1}(f, e^{-ikx})$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Тогда

$$D^n f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k (ik)^n e^{ikx} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Отсюда получим для $k = 0, \pm 1, \ldots$; $n = 0, 1, \ldots$

$$| f_k k^n | = (2\pi)^{-1} | (D^n f, e^{-ikx}) | \leqslant (2\pi)^{-1/p} \| D^n f \|_p.$$

Следовательно, для всех индексов k таких, что $f_k \neq 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} | f_k k^n |^{1/n} = | k | \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \| D^n f \|_p^{1/n}.$$

Отсюда, учитывая

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta(\xi + k),$$

получим

$$\sigma_f \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \| D^n f \|_p^{1/n}. \tag{2}$$

Далее, покажем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \| D^n f \|_p^{1/n} \leqslant \sigma_f. \tag{3}$$

Нам надо доказать только случай $\sigma_f < \infty$. Тогда из теоремы Пэли—Винера—Шварца следует, что $f(z)$ является целой экспоненциальной функцией типа σ_f. Следовательно, учитывая неравенство Бернштейна, получим

$$\| D^n f \|_p \leqslant \sigma_f^n \| f \|_p \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Отсюда вытекает неравенство (3).

Объединяя (2), (3), немедленно получим то, что надо доказать. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть* $0 \leqslant a_n$, $0 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$ *Тогда имеет место тождество*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = x_0 \varepsilon_0^a + \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) \varepsilon_{k+1}^a, \tag{4}$$

где $\varepsilon_k^a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i \quad (k = 0, 1, \ldots)$.

Доказательство. При $n = 0, 1, \ldots$ имеем

$$x_0 \varepsilon_0^a + \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) \varepsilon_{k+1}^a =$$
$$= x_0 (\varepsilon_0^a - \varepsilon_1^a) + x_1 (\varepsilon_1^a - \varepsilon_2^a) + \ldots + x_n (\varepsilon_n^a - \varepsilon_{n+1}^a) + x_{n+1} \varepsilon_{n+1}^a =$$
$$= a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + x_{n+1} \varepsilon_{n+1}^a. \tag{5}$$

Рассмотрим сначала случай $\Sigma a_n x_n = \infty$. Тогда (4) легко вытекает из (5).

Далее, пусть $\Sigma a_n x_n < \infty$. Тогда, в силу (5), для получения (4) нам осталось доказать равенство

$$\lim_{n \to \infty} x_n \varepsilon_n^a = 0.$$

А это немедленно вытекает из следующих неравенств:

$$0 \leqslant x_n \varepsilon_n^a = x_n (a_n + a_{n+1} + \ldots) \leqslant a_n x_n + a_{n+1} x_{n+1} + \ldots$$

и сходимости ряда $\Sigma a_n x_n$. Лемма доказана.

Найдем теперь условие вложения (1). Естественно предполагать, что

$$\lim_{n \to \infty} a_n^{1/n} = 0, \tag{6}$$

так как это условие необходимо и достаточно для бесконечномерности пространства $W^\infty \{a_n, p, r\} (0, 2\pi)$ (см. [5]). Ясно, что достаточным условием вложения (1) являются неравенства

$$b_n \leqslant K a_n, \quad n \geqslant 0, \quad K < \infty. \tag{7}$$

Однако эти неравенства слишком ограничительны, ибо требуют обращения в нуль коэффициентов b_n по крайней мере для всех тех номеров, для которых $a_n = 0$.

Предложение 1. *Пусть выполнено следующее условие*:

$$M = \sup_{n \geqslant 0} \frac{\varepsilon_n^b}{\varepsilon_n^a} < \infty. \tag{8}$$

Тогда имеет место вложение (1).

Доказательство. Для кратности будем обозначать W_a^∞ вместо $W^\infty\{a_n, p, r\}(0, 2\pi)$ и считать, что $a_0 \neq 0$. Очевидно, что имеет место вложение (1) тогда, и только тогда, когда существует такое число M_1, что

$$|||u|||_b^r \leqslant M_1 |||u|||_a^r, \quad u(x) \in W_a^\infty, \quad \|u\|_p = 1. \tag{9}$$

Положим

$$W_1 = \left\{u(x) \in W_a^\infty\colon \|u\|_p = 1, \ \|D^k u\|_p^{1/k} < \frac{\pi^2}{4}, \ k = 1, 2, \ldots\right\},$$

$$W_2 = \left\{u(x) \in W_a^\infty\colon \|u\|_p = 1, \quad \exists k \geqslant 1\colon \|D^k u\|_p^{1/k} \geqslant \frac{\pi^2}{4}\right\}.$$

Зафиксируем произвольную функцию $u(x) \in W_2$ (из условия (6) и леммы 1 легко видеть, что W_a^∞ содержит все 2π-периодические функции $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ такие, что $\sigma_f < \infty$. Следовательно, W_2 непусто и обозначаем

$$k_0 = k_0(u) = \min\left\{k\colon \|D^k u\|_p^{1/k} \geqslant \frac{\pi^2}{4}\right\}.$$

Тогда имеем

$$\|D^n u\|_p \leqslant \|D^{n+1} u\|_p, \qquad n \geqslant k_0. \tag{10}$$

Действительно, из неравенства Колмогорова (см. [4]) и $\|u\|_p = 1$ следует

$$\|D^{k_0} u\|_p^n \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \|D^n u\|_p^{k_0}, \quad n > k_0.$$

Отсюда, учитывая определение числа k_0, получим

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\|D^{k_0} u\|_p\right)^{1/k_0} \leqslant \|D^n u\|_p^{1/n}, \quad n \geqslant k_0. \tag{11}$$

С другой стороны, из неравенства Колмогорова имеем

$$\|D^n u\|_p^{n+1} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \|D^{n+1} u\|_p^n, \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\|D^n u\|_p \leqslant \frac{\pi}{2}\|D^{n+1} u\|_p^{-1/n+1} \|D^{n+1} u\|_p, \quad n \geqslant 1.$$

Из последних неравенств и (11) немедленно получим (10).

Далее, из леммы 2, неравенств (8), (10) вытекает $\sum_{n=k_0}^{\infty} b_n \| D^n u \|_p^r =$

$$= \| D^{k_0} u \|_p^r \varepsilon_{k_0}^b + \sum_{k=k_0}^{\infty} (\| D^{k+1} u \|_p^r - \| D^k u \|_p^r) \varepsilon_{k+1}^b \leqslant$$

$$\leqslant M \left[\| D^{k_0} u \|_p^r \varepsilon_{k_0}^a + \sum_{k=k_0}^{\infty} (\| D^{k+1} u \|_p^r - \| D^k u \|_p^r) \varepsilon_{k+1}^a \right] =$$

$$= M \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n \| D^n u \|_p^r < M \||| u \|||_a^r. \qquad (12)$$

Следовательно, $u(x) \in W_b^{\infty}$, и в силу произвольности функции $u(x) \in W_2$ вытекает $W_2 \subset W_b^{\infty}$. Обозначим через R_a (R_b) — радиус сходимости ряда $\Sigma a_n \xi^n$ $(\Sigma b_n \xi^n)$. Тогда из $R_a = \infty$ (это следует из (6)) и $W_2 \subset W_b^{\infty}$ вытекает $R_b = \infty$. Положим

$$M_1 = M + \frac{1}{a_0} b\left(\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}}\right).$$

Тогда $M_1 < \infty$ и M_1 есть искомое число. Действительно, для $u(x) \in W_2$ из (12) имеем

$$\||| u \|||_b^r = \sum_{n=0}^{k_0-1} b_n \| D^n u \|_p^r + \sum_{n=k_0}^{\infty} b_n \| D^n u \|_p^r <$$

$$< \sum_{n=k_0}^{\infty} b_n \| D^n u \|_p^r + b\left(\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}}\right) \leqslant M \||| u \|||_a^r +$$

$$+ b\left(\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}}\right) \leqslant M_1 \||| u \|||_a^r.$$

Наконец, если $u(x) \in W_1$, то

$$\||| u \|||_b^r < \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}}\right)^n \leqslant \||| u \|||_a^r \frac{1}{a_0} b\left(\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}}\right) < M_1 \||| u \|||_a^r.$$

Из доказанных неравенств получим (9). Предложение доказано.

Замечание 1. В [1] было доказано, что неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sup_{\xi > 0} [\xi^n a^{-1}(\xi)] < \infty \qquad (13)$$

является достаточным условием вложения (1).

Замечание 2. Нам не удалось окончательно сравнить условия вложения (8), (13). Однако можно привести пример, при котором (8) выполняется, а в то же время (13) не выполняется.

Пример. Пусть $a_n = (n!)^{-1}$, $n = 0, 1, \ldots$; $b_0 = 1$, $b_n = e^n (2\pi n^{n+1})^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда легко видеть, что

$$\sup_{\xi>0} [\xi^n a^{-1}(\xi)] = \sup_{\xi>0} \xi^n e^{-\xi} = n^n e^{-n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sup_{\xi>0} [\xi^n a^{-1}(\xi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} = \infty,$$

т. е. (13) не выполняется. С другой стороны, имеем

$$b_n a_n^{-1} = e^n n! (2\pi n^{n+1})^{-1} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n^b (\varepsilon_n^a)^{-1} = 0$ и имеет место (8).

Замечание 3. Из (7) вытекает (8). Легко привести пример, при котором $\sup\limits_{n\geqslant 0} b_n a_n^{-1} = \infty$, и в то же время имеет место (8).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть существует число* $\lambda > 0$ *такое, что*

$$\sup_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k \lambda^k\right) \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \lambda^k\right)^{-1} < \infty.$$

Тогда справедливо вложение (1).

Доказательство. Пусть $\gamma > 0$ — произвольное число. Положим

$$T_\gamma(f) = \gamma^{-1/p} f(\gamma^{-1}x), \quad f \in W_a^\infty.$$

Тогда из следующих очевидных равенств:

$$\| D^n T_\gamma(f) \|_{L_p(0,2\gamma\pi)} = \gamma^{-n} \| D^n f \|_{L_p(0,2\pi)}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

вытекает, что T_γ является взаимно однозначным изометричным отображением из $W^\infty\{a_n, p, r\}(0, 2\pi)$ на $W^\infty\{a_n\gamma^{nr}, p, r\}(0, 2\gamma\pi)$, где $W^\infty\{a_n\gamma^{nr}, p, r\}(0, 2\gamma\pi)$ обозначается пространство всех $2\gamma\pi$-периодических функций $u(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ таких, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma^{nr} \| D^n u \|_{L_p(0,2\gamma\pi)}^r < \infty.$$

Следовательно, для любого $\gamma > 0$ справедливо вложение (1) тогда, и только тогда, когда имеет место следующее вложение:

$$W^\infty\{a_n\gamma^{nr}, p, r\}(0, 2\gamma\pi) \subset W^\infty\{b_n\gamma^{nr}, p, r\}(0, 2\gamma\pi). \quad (14)$$

Учитывая, что утверждение леммы 1 переносится на случай $u(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ — $2\gamma\pi$-периодической функции (это делается легко) и $\lim_{n\to\infty} (a_n \gamma^{nr})^{1/n} = 0$, повторяя рассуждения, приводимые в доказательстве предложения 1, получим, что

$$\sup_{n\geqslant 0} \left(\sum\nolimits_{k=n}^{\infty} b_k \gamma^{kr}\right) \left(\sum\nolimits_{k=n}^{\infty} a_k \gamma^{kr}\right)^{-1} < \infty \tag{15}$$

является достаточным условием вложения (14). Следовательно, (15) также является достаточным условием вложения (1). Для завершения доказательства теоремы нам осталось подставить в (15) $\gamma = \lambda^{1/r}$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к нахождению условий компактности вложения (1).

Предложение 2. *Пусть выполнено условие*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^b (\varepsilon_n^a)^{-1} = 0. \tag{16}$$

Тогда вложение (1) *компактно.*

Доказательство. Из критерия компактности вложения, установленного в [1], следует, что вложение (1) компактно тогда, и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\sum\nolimits_{n=N}^{\infty} b_n \| D^n u \|_p^r \leqslant \varepsilon, \quad u(x) \in W_a^\infty, \quad |||u|||_a \leqslant 1. \tag{17}$$

Ясно, что неравенства (17) эквивалентны следующим: Для любого $\varepsilon > 0$ существует число такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\sum\nolimits_{n=N}^{\infty} b_n \| D^n u \|_p^r \leqslant \varepsilon, \quad u(x) \in W_a^\infty, \quad |||u|||_a \leqslant 1, \quad \| u \|_p \leqslant 1. \tag{18}$$

Докажем теперь (18). Пусть выполнено условие (16). Тогда имеем условие (8). Следовательно, как было доказано в начале доказательства предложения 1, $R_b = \infty$. Зафиксируем теперь произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$\sum\nolimits_{n=n_0}^{\infty} b_n \left(\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}}\right)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

Для каждой функции $u(x) \in W_a^\infty, \sigma_u > \frac{\pi^2}{4}$, $|||u|||_a \leqslant 1$, $\| u \|_p \leqslant 1$ положим

$$k_0 = k_0(u) = \min\left\{k \geqslant 1 : \| D^k u \|_p^{1/k} \geqslant \frac{\pi^2}{4}\right\}.$$

Тогда, как было показано в доказательстве предложения 1, имеем

$$\| D^n u \|_p \leqslant \| D^{n+1} u \|_p, \qquad n \geqslant k_0. \tag{20}$$

Далее, пусть n_1 — такой номер, что

$$\varepsilon_n^b (\varepsilon_n^a)^{-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geqslant n_1. \tag{21}$$

Положим $N = \max\{n_0, n_1\}$. Тогда для всех $u(x) \in W_a^\infty$, $\sigma_u > \frac{\pi^2}{4}$, $||| u |||_a \leqslant 1$, $\| u \|_p \leqslant 1$ из неравенств (19), (20), (21) и леммы 2 вытекает

$$\sum\nolimits_{n=N}^{\infty} b_n \| D^n u \|_p^r < \frac{\varepsilon}{2} + \sum\nolimits_{n=\max\{k_0, N\}}^{\infty} b_n \| D^n u \|_p^r \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sum\nolimits_{n=\max\{k_0, N\}}^{\infty} a_n \| D^n u \|_p^r \leqslant \varepsilon. \tag{22}$$

Наконец, для каждой функции

$$u(x) \in W_a^\infty, \quad \sigma_u \leqslant \frac{\pi^2}{4}, \quad ||| u |||_a \leqslant 1, \quad \| u \|_p \leqslant 1$$

из неравенства Бернштейна имеем

$$\| D^n u \|_p \leqslant \sigma_u^n \| u \|_p \leqslant \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}}, \qquad n \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\sum\nolimits_{n=N}^{\infty} b_n \| D^n u \|_p^r \leqslant \sum\nolimits_{n=N}^{\infty} b_n \left(\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}} \right)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для достаточно большего числа $N = N(\varepsilon)$. Предложение 2 доказано.

Замечание 4. В [4] было доказано (см. теорему 1.1), что

$$\lim_{n \to \infty} b_n a_n^{-1} = 0 \tag{23}$$

является достаточным условием компактности вложения (1). Легко видеть, что наше условие компактности (16), действительно, слабее условия (23).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть существует число* $\lambda > 0$ *такое, что*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum\nolimits_{k=n}^{\infty} b_k \lambda^k \right) \left(\sum\nolimits_{k=n}^{\infty} a_k \lambda^k \right)^{-1} = 0.$$

Тогда вложение (1) *компактно.*

Теорема 2 доказывается рассуждениями, приводимыми в доказательстве теоремы 1 и предложения 2.

В заключение автор благодарит Чан Дык Вана за внимание к работе.

Институт математики
Ханой, СРВ

Поступило
15.12.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дубинский Ю. А. Пределы банаховых пространств. Теоремы вложения. Применения к пространствам Соболева бесконечного порядка // Мат. сб. 1979. Т. 110, вып. 3. С. 428—439.

[2] Балашова Г. С. О некоторых теоремах вложения пространств бесконечно дифференцируемых функций // ДАН СССР. 1979. Т. 247, № 6. С. 1301—1304.

[3] Балашова Г. С. О теоремах вложения пространств бесконечно дифференцируемых функций // Математические заметки. 1984. Т. 35, вып. 4. С. 505—516.

[4] Балашова Г. С. Уравнения бесконечного порядка с подчиненными членами и теоремы вложения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 12. С. 2076—2087.

[5] Дубинский Ю. А. Нетривиальность пространств Соболева бесконечного порядка в случае полного евклидова пространства и тора // Мат. сб. 1976. Т. 100, вып. 3. С. 436—446.