ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 3 (2012)

УДК 511.29

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛУГРУПП НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ[1]

Ю. Н. Штейников (г. Москва)

Аннотация

В работе рассматриваются полугруппы натуральных чисел, порядок которых на отрезке $[1, q]$ есть q^{ν}. В этой работе получены нетривиальные верхние оценки числа таких элементов на множестве $[1, t]$, где t мало по сравнению с любой степенью q.

§1. Предварительные сведения

Пусть $A \subset \mathbb{N}$ — полугруппа, то есть если $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 a_2 \in A$.

В частности, можно взять множество $A = \{n \in \mathbb{N} : n \in G \pmod m\}$, где $m \in \mathbb{N}$, а G — мультипликативная подгруппа группы $\mathbb{Z}_m^*$.

Например, если положить $m = p^2$, где p — простое число и

$$G = \{g \in \mathbb{Z}_{p^2}^* : g^{p-1} = 1\},$$

то мы получаем

$$A = A_p = \{n \in \mathbb{N} : n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}\}.$$

Нас будет интересовать случай, когда для некоторых действительных q; $\nu < 1$ выполнено неравенство:

$$|\{n \in A; n \le q\}| < q^{\nu}. \tag{1}$$

Например, пусть $A = A_p$. Так как группа $\mathbb{Z}_{p^2}^*$ — циклическая, то отсюда следует, что $|G| = p - 1$. Значит для этого примера $|\{n \in A : n \le p^2\}| = p - 1$. Здесь, как несложно видеть, можно положить $q = p^2$ и $\nu = \frac{1}{2}$.

Пусть для $x > 0$ определим:

$$f(x) = |A \cap [1, x]|.$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ №11-01-00329, а также грантом ведущей научной школы НШ-6003.2012.1

Мы хотим оценить сверху $f(x)$ как функцию от q и от u.

В работе [3] получены оценки на количество чисел не превосходящих n, которые принадлежат подгруппе порядка t группы $\mathbb{Z}_p^*$. Эти оценки содержательны, когда t мало по сравнению с p. Из нашей работы вытекают оценки в случае, когда t растет как степень p, а n мало.

Покажем, что верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть полугруппа A удовлетворяет условию (1) и $x = (\log q)^u$. Тогда*

1) если $\log\log x = o(\log\log q)$, то

$$\frac{f(x)}{x} \leq exp\{-(C + o(1))u(1-\nu)^2 \log(u(1-\nu)^2)\}$$

где C — некоторая абсолютная константа;

2) если $\gamma = \frac{\log\log x}{\log\log q}$ и $\log x = o(\log q)$, то

$$f(x) \leq x^{1-max\{L_\gamma, C_\gamma\}+o(1)}, q \to \infty,$$

где

$$L_\gamma = \gamma\left(\frac{1-\nu}{1-\gamma+\sqrt{(1-\gamma)^2+\gamma(1-\nu)}}\right)^2 \text{ и } C_\gamma = \begin{cases} \frac{(1-\nu)^2\gamma}{4(1-\gamma)}, & \text{если } \gamma \leq \frac{2}{3-\nu}, \\ 2-\nu-\frac{1}{\gamma}, & \text{если } \gamma > \frac{2}{3-\nu}. \end{cases}$$

§2. Вспомогательные утверждения

Предположим, что задано целое y. Каждое натуральное n представим в виде $n = n_1 n_2$, так что если простое p делит n_1, то $p \leq y$, а если делит n_2, то $p > y$. Пусть также даны x, z. Определим множество:

$$N(x, y, z) = \{n \leq x : n_1 > z\}.$$

Мы хотим оценить сверху количество элементов множества $N(x, y, z)$.

На довольно большой области изменения x, y, z была получена асимптотика $N(x, y, z)$ в работе [4]. Нам нужен будет более грубый результат, но при еще слабых ограничениях на параметры x, y, z. Мы будем следовать технике, разработанной в [4].

Нам потребуются оценки для множеств чисел, у которых все простые делители малы либо наоборот, большие. Для натурального n пусть $P^+(n)$ и $P^-(n)$ соответственно наибольший и наименьший простой делитель числа n, $P^+(1) = 1, P^-(1) = \infty$. Для $x \geqslant y \geqslant 2$ полагаем:

$$\psi(x, y) = |\{n \leqslant x : P^+(n) \leqslant y\}|, \varphi(x, y) = |\{n \leqslant x : P^-(n) > y\}|.$$

Также нужны следующие оценки на $\psi(x,y)$ ([1]) и также оценки на $\varphi(x,y)$ (следствие из теоремы 3, 3 часть, 6 глава [5]).

Теорема A [1]. *Пусть* $x \geq y \geq 2, v = \frac{\log x}{\log y}$ *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *на множестве* $v \leq y^{1-\varepsilon}$ *имеет место неравенство:*

$$\psi(x,y) = xv^{-v(1+o(1))},$$

если $v \to \infty$.

Теорема B [5]. *Пусть* $x \geq y \geq 2$. *Тогда*

$$\varphi(x,y) \ll \frac{xw(v)}{\log y},$$

где $v = \frac{\log x}{\log y}$, $w()$ — *функция Бухштаба.*

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $\alpha_0 < \infty$ *фиксированы. Также пусть имеются положительные* α, β, γ, *причем* $0 < \alpha < 1$, $\alpha < \alpha_0$, $\beta < 1$, $\gamma < \alpha(1-\varepsilon)$ *и также* $x = (\log q)^u$, $x \leq exp\{(\log q)^\gamma\}$, $y = (\log q)^\alpha, z = x^\beta$. *Тогда*

$$|N(x,y,z)| \leq xexp\{-\frac{\beta u}{\alpha}(1+o(1))\log(\frac{\beta u}{\alpha})\}, u \to \infty.$$

Доказательство.

$$|N(x,y,z)| = \sum_{z<n_1\leq x, P^+(n_1)\leq y} \varphi(\frac{x}{n_1}, y) = \sum_{z<n_1\leq \frac{x}{y}, P^+(n_1)\leq y} \varphi(\frac{x}{n_1}, y) + (\psi(x,y) - \psi(\frac{x}{y}, y)).$$

Последнее слагаемое несложно оценить:

$$\psi(x,y) - \psi(\frac{x}{y}, y) \leq \psi(x,y) = xexp\{-\frac{u}{\alpha}(1+o(1))\log\frac{u}{\alpha}\}.$$

Распишем сумму, используя теорему B:

$$\sum_{z<n_1\leq \frac{x}{y}, P^+(n_1)\leq y} \varphi(\frac{x}{n_1}, y) \ll \frac{x}{\log y} \sum_{z<n_1\leq \frac{x}{y}, P^+(n_1)\leq y} \frac{w(\frac{u}{\alpha} - \frac{\log n_1}{\log y})}{n_1}$$

Применим к последней сумме преобразование Абеля, обозначив через $S(t) = \sum\limits_{z<n_1\leq t, P^+(n_1)\leq y} \frac{1}{n_1}$. Получаем:

$$\sum_{z<n_1\leq \frac{x}{y}, P^+(n_1)\leq y} \frac{w(\frac{u}{\alpha} - \frac{\log n_1}{\log y})}{n_1} = S(\frac{x}{y})w(1) + \int_z^{\frac{x}{y}} \frac{w'(\frac{u}{\alpha} - \frac{\log t}{\log y})}{t\log y} S(t)dt \ll$$

$$\ll S(\frac{x}{y}) + \int_{\frac{\beta u}{\alpha}}^{\frac{u}{\alpha}-1} |w'(\frac{u}{\alpha} - s)| S(y^s) ds.$$

Оценим $S(y^s)$, для этого вновь воспользуемся преобразованием Абеля:

$$S(y^s) = \sum_{z<n_1\le y^s, P^+(n_1)\le y} \frac{1}{n_1} = \frac{\psi(y^s,y) - \psi(z,y)}{y^s} + \log y \int_{\frac{\beta u}{\alpha}}^{s} \frac{\psi(y^\tau,y) - \psi(z,y)}{y^\tau} d\tau$$

$$\le \frac{\psi(y^s,y)}{y^s} + \log y \int_{\frac{\beta u}{\alpha}}^{s} \frac{\psi(y^\tau,y)}{y^\tau} d\tau.$$

Теперь воспользуемся теоремой А, условия которой выполнены, получаем,

$$(y^s) \ll \exp\{-s(1+o(1))\log s\} + (\log y) \int_{\frac{\beta u}{\alpha}}^{s} exp\{-\tau(1+o(1))\log \tau\} d\tau \ll$$

$$\ll (\log y) \exp\{-\frac{\beta u}{\alpha}(1+o(1)) \log \frac{\beta u}{\alpha}\}, u \to \infty.$$

Теперь подставляя полученные оценки и используя неравенства на $w(v)$ (см теорема 4, 3 часть, 6 глава [5])

$$|w'(v)| \le \exp\{-v(1+o(1))\log v\},$$

мы получаем требуемый результат.

Теперь докажем еще одну лемму.

Лемма 2. *Количество делителей числа $n < Q$, не превосходящих z, не превосходит $\psi(z,(1+o(1))\log Q), Q \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $p_1^{t_1}...p_s^{t_s}$ разложение на простые множители, причем $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$.

Рассмотрим отображение делителей числа n

$$\sigma : p_1^{l_1}...p_s^{l_s} \to p_{(1)}^{l_1}...p_{(s)}^{l_s},$$

где $p_{(i)}$ — i-ое простое число в натуральном ряду, то есть $p_{(1)} = 2, p_{(2)} = 3, p_{(3)} = 5, ...$

Это отображение инъективно. Также, $\sigma(d) \le d \le z$.

Известно, что если $n := p_1^{t_1}...p_s^{t_s} < Q$ то $p_{(s)} \le (1+o(1))\log Q$. Отсюда количество чисел в образе отображения σ, которые не превосходят z не больше $\psi(z,(1+o(1))\log Q)$. А это и есть исходное утверждение. Лемма доказана.

§3. Доказательство теоремы

Пусть $x = (\log q)^u$. Определим ε из равенства :

$$|A \cap [1, x]| = \varepsilon x.$$

Введем параметры α, β ; $\beta < 1$ и соответственно $y = (\log q)^{\alpha}, z = x^{\beta}$. Для каждого натурального n, как и раньше, $n = n_1 n_2$, так что если простое p делит n_1, то $p \leq y$, а если p делит n_2, то $p > y$.

Напомним, что $N(x, y, z) = \{n \leq x : n_1 > z\}$. Теперь рассмотрим множество $A' = A \cap [1, x] \backslash N(x, y, z)$. Положим также $|A'| = \varepsilon' x$. Использую лемму 1, несложно заметить, что :

$$\varepsilon \leq \varepsilon' + exp\{-\frac{\beta u}{\alpha}(1 + o(1)) \log(\frac{\beta u}{\alpha})\},$$

здесь $o(1)$ по $u \to \infty$.

Рассмотрим $B = \{m_1 \dots m_r\}$, где $r = [\frac{\log q}{\log x}]$ и $m_1, \dots, m_r \in A'$. Оценим сверху размер этого множества, используя, что произведение чисел из A является числом из A : $|B| \leq |\{m_1 \dots m_r\}| \leq |A \cap [1, q]| \leq q^{\nu}$. Теперь оценим снизу $|B|$. Пусть каждое $m_i = n_{1,i} n_{2,i}$, так что если простое p делит $n_{1,i}$, то $p \leq y$, а если p делит $n_{2,i}$, то $p > y$. Определим из равенства N_1, N_2 : $m = m_1 \dots m_r = n_{1,1} \dots n_{1,r} n_{2,1} \dots n_{2,r} = N_1 N_2$, где $N_1 = n_{1,1} \dots n_{1,r}$ и $N_2 = n_{2,1} \dots n_{2,r}$.

Возьмем конкретный представитель, например элемент $m \in A' \dots A' (r$ сомножителей) и оценим сверху число представлений его в виде произведения $A' \dots A'$.

Пусть $m = N_1 N_2$, оценим количество представлений для N_2 в виде произведения r чисел $n_{2,1} \dots n_{2,r}$, $N_2 = n_{2,1} \dots n_{2,r} = p_1 \dots p_s$,где все $p_i > y$ и являются простыми числами. Видим, что $s \leq s_0 = [\frac{\log q}{\log y}]$.

Каждый делитель $p_i, i = 1, \dots, s$ может входить в разложение некоторого $n_{2,j}, j = 1, \dots, r$. Значит количество представлений числа N_2 не превосходит $r^s \leq r^{s_0}$.

Теперь оценим количество представлений для N_1, $N_1 = n_{1,1} \dots n_{1,r}$. Каждое $n_{1,i}$ не превосходит z и является $y-$ гладким числом. Значит для каждого $n_{1,i}$ имеется не более $|\psi(z, y)|$ возможностей. Заметим также, что каждое $n_{1,i} \leq z$ является делителем N_1. Значит, по лемме 2 каждое $n_{1,i}$ может принимать не более $\psi(z, (1 + o(1)) \log q)$ значений. Отсюда получаем, что количество представлений для N_1 не превосходит каждого из 2-ух чисел $|\psi(z, y)|^r, |\psi(z, (1 + o(1)) \log q)|^r$. Число же представлений для числа m не превосходит произведения числа представлений для N_1 и N_2.

Отсюда получается и нижняя оценка для B :

$$|B| \geq \frac{(\frac{\varepsilon' x}{|\psi(z,y)|})^r}{r^{s_0}}, |B| \geq \frac{(\frac{\varepsilon' x}{|\psi(z,(1+o(1)) \log q)|})^r}{r^{s_0}}.$$

Значит должно выполняться 2 соотношения:

$$\frac{(\frac{\varepsilon' x}{|\psi(z,y)|})^r}{r^{s_0}} \leq q^{\nu} \tag{2}$$

$$\frac{\left(\frac{\varepsilon' x}{|\psi(z,(1+o(1))\log q)|}\right)^r}{r^{s_0}} \leq q^{\nu} \tag{3}$$

для любых выбранных параметров (α, β). Из этого неравенства можно получить оценку для ε', а значит и для ε. Теперь найдем соответствующие значения параметров (α, β), которые дают наилучшую (наименьшую) оценку для ε.

Первый случай. Пусть $\log\log x = o(\log\log p)$. В этом случае, в (2) используя, что $\psi(z,y) \leq z$ мы получаем $\frac{(\frac{\varepsilon' x}{z})^r}{r^{s_0}} \leq q^{\nu}$. Распишем левую часть и напишем условие на ε', предварительно сделав преобразования.

$\frac{(\frac{\varepsilon' x}{z})^r}{r^{s_0}} \geq \frac{(\varepsilon' x^{1-\beta})^{\frac{\log q}{\log x}-1}}{(\frac{\log q}{\log x})^{\frac{\log q}{\log y}}} = exp\{(\frac{\log q}{\log x} - 1)(\log \varepsilon' + (1-\beta)\log x) - \frac{\log q}{\alpha \log\log q}(\log\log q - \log\log x)\} \geq exp\{\log q(\frac{\log \varepsilon'}{\log x} + 1 - \beta - \frac{1}{\alpha} + \frac{\log\log x}{\alpha \log\log q} - \frac{(1-\beta)\log x}{\log q})\}$.

Отсюда и из (2) получаем соотношение :

$$\frac{\log \varepsilon'}{\log x} + 1 - \beta - \frac{1}{\alpha} + \frac{\log\log x}{\alpha \log\log q} - \frac{(1-\beta)\log x}{\log q} \leq \nu,$$

Выразим теперь отсюда ε' :

$$\log \varepsilon' \leq \log x\left(\frac{1}{\alpha} - 1 + \beta + \nu - \frac{\log\log x}{\alpha \log\log q} + \frac{(1-\beta)\log x}{\log q}\right).$$

То есть,

$$\varepsilon' \leq x^{\frac{1}{\alpha} - 1 + \beta + \nu - \frac{\log\log x}{\alpha \log\log q} + \frac{(1-\beta)\log x}{\log q}} \tag{4}$$

А тогда получаем оценку на ε:

$$\varepsilon \leq x^{\frac{1}{\alpha} - 1 + \beta + \nu - \frac{\log\log x}{\alpha \log\log q} + \frac{(1-\beta)\log x}{\log q}} + exp\{-\frac{\beta u}{\alpha}(1+o(1))\log(\frac{\beta u}{\alpha})\}.$$

Так как $x \leq exp\{(\log q)^{\gamma_0}\}, \gamma_0 < 1$, то первое слагаемое в неравенстве для ε есть:

$$\frac{(x)^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta+\nu}}{(\log x)^{\frac{\log x}{\alpha \log\log q}(1+o(1))}} = \frac{(x)^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta+\nu}}{(\log x)^{\frac{u}{\alpha}(1+o(1))}},$$

при $q \to \infty$. Значит,

$$\varepsilon \leq \frac{(x)^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta+\nu}}{(\log x)^{\frac{u}{\alpha}(1+o_q(1))}} + exp\{-\frac{\beta u}{\alpha}(1+o_u(1))\log(\frac{\beta u}{\alpha})\}.$$

Здесь в первом слагаемом $o(1)$ это по q, а во втором слагаемом $o(1)$ по u.

Берем следующие значения параметров : $\alpha = \frac{2}{1-\nu}, \beta = \frac{1-\nu}{2} - \delta$, где $\delta > 0$ - произвольное фиксированное. Тогда получаем :

$$\varepsilon \leq C(x^{-\delta}) + exp\{-Cu(1-\nu)^2\log(Cu(1-\nu)^2)\},$$

где C - некоторая абсолютная константа. Первое слагаемое меньше второго для достаточно больших q.

Поэтому, для первого случая мы получили:

$$\frac{f(x)}{x} \leq exp\{-(C+o_q(1))u(1-\nu)^2\log(u(1-\nu)^2)\},$$

для некоторой абсолютной константы C и при $q \to \infty$.

Второй случай. Рассмотрим случай, когда $\gamma = \frac{\log\log x}{\log\log q}$ и $\log x = o(\log q)$.

Пусть $\alpha \geq (1+\varepsilon)\gamma$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Вспоминая, что $z = x^\beta = exp\{\beta(\log q)^\gamma\}$, $y = (\log q)^\alpha$ согласно теореме [A], мы получаем:
$|\psi(z,y)| = z^{1-\frac{\gamma}{\alpha}+o(1)}$, $|\psi(z,(1+o(1))\log q)| = z^{1-\gamma+o(1)}$.

Исходя из этого, заменяя β на $\beta(1-\frac{\gamma}{\alpha}+o(1))$ в (4) первый раз и β на $\beta(1-\gamma+o(1))$, заключаем 2 неравенства :

$$\varepsilon' \leq x^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta(1-\frac{\gamma}{\alpha}+o(1))+\nu-\frac{\log\log x}{\alpha\log\log q}+o(1)}$$

$$\varepsilon' \leq x^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta(1-\gamma+o(1))+\nu-\frac{\log\log x}{\alpha\log\log q}+o(1)}$$

Окончательно получаем,

$$\frac{f(x)}{x} \leq x^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta-\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\nu-\frac{\gamma}{\alpha}+o(1)} + exp\{-\frac{\beta u}{\alpha}(1+o(1))\log(\frac{\beta u}{\alpha})\}.$$

$$\frac{f(x)}{x} \leq x^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta-\beta\gamma+\nu-\frac{\gamma}{\alpha}+o(1)} + exp\{-\frac{\beta u}{\alpha}(1+o(1))\log(\frac{\beta u}{\alpha})\}.$$

Во втором слагаемом $o(1)$ по u. В нашем случае $u = \frac{(\log q)^\gamma}{\log\log q}$, поэтому можно считать, что $o(1)$ зависит от q.

Последнее слагаемое это $exp\{-\frac{\beta}{\alpha}\gamma(\log q)^\gamma(1+o(1))\} = x^{-\frac{\beta}{\alpha}\gamma(1+o(1))}$.

Итак, одновременно выполняются

$$\frac{f(x)}{x} \leq x^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta-\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\nu-\frac{\gamma}{\alpha}+o(1)} + x^{-\frac{\beta}{\alpha}\gamma(1+o(1))}.$$

$$\frac{f(x)}{x} \leq x^{\frac{1}{\alpha}-1+\beta-\beta\gamma+\nu-\frac{\gamma}{\alpha}+o(1)} + x^{-\frac{\beta}{\alpha}\gamma(1+o(1))}.$$

Будем искать параметры (α,β).

Рассмотрим случай, когда $\alpha \geq 1$. Тогда будем минимизировать наибольшее из значений : $-\frac{\beta}{\alpha}\gamma$, $\frac{1-\gamma}{\alpha}+\beta-\beta\gamma-1+\nu$. Если $\alpha \geq 1$. то берем такие параметры :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1-\gamma+\sqrt{(1-\gamma)^2+\gamma(1-\nu)}}{1-\nu}; \\ \beta = \alpha^{-1} = \frac{1-\nu}{\sqrt{(1-\gamma)^2+\gamma(1-\nu)}+1-\gamma} \end{cases}$$

Подставляя эти параметры получаем: $f(x) \le x^{1-C_\gamma+o(1)}$, где

$$C_\gamma = \gamma\left(\frac{1-\nu}{1-\gamma+\sqrt{(1-\gamma)^2+\gamma(1-\nu)}}\right)^2$$

Пусть теперь $\gamma < \alpha \le 1$. Тогда будем минимизировать наибольшее из значений: $-\frac{\beta}{\alpha}\gamma$ и $\frac{1-\gamma}{\alpha}+\beta-\frac{\beta}{\alpha}\gamma-1+\nu$. В случае если $\gamma \le \frac{2}{3-\nu}$, берем такие параметры: $\beta = \frac{1-\nu}{2}, \alpha = (1+\eta)\frac{2(1-\gamma)}{1-\nu}$, где $\eta > 0-$ произвольное фиксированное. В случае если $\gamma > \frac{2}{3-\nu}$, берем такие параметры: $\beta = 2-\nu-\frac{1}{\gamma}, \alpha = \gamma(1+\eta)$, где также $\eta > 0-$ произвольное фиксированное.

Подставляя такие параметры получаем $f(x) \le x^{1-L_\gamma+\delta+o(1)}$, где $\delta > 0$ — произвольное фиксированное и $L_\gamma = \frac{(1-\nu)^2\gamma}{4(1-\gamma)}$, если $\gamma \le \frac{2}{3-\nu}$, $L_\gamma = 2-\nu-\frac{1}{\gamma}$, если $\gamma > \frac{2}{3-\nu}$. В силу произвольного δ отсюда следует исходное неравенство:

$$f(x) \le x^{1-L_\gamma+o(1)}, q \to \infty.$$

Отсюда заключаем неравенство:

$$f(x) \le x^{1-max\{L_\gamma, C_\gamma\}+o(1)}, q \to \infty.$$

Теорема доказана.

§4. Комментарии

1. Покажем на примере полугруппы гладких чисел, какие есть оценки снизу на функцию $f((\log q)^u)$.

Возьмем любое число $0 < \nu < 1$ и положим A_q- полугруппа y - гладких чисел, где

$$y = (\log q)^\lambda,$$

где $\lambda = \frac{1}{1-\nu} + \varepsilon$, где ε — малое число.

Пользуясь теоремой [A] о количестве гладких чисел при при $q \ge q(\nu, \varepsilon)$ получаем,

$$|A_q \bigcap [1, q]| < q^\nu.$$

Тогда выполнено неравенство (1).

Возьмем теперь какое-нибудь u, $|A_q \bigcap [1, (\log q)^u]| = (\log q)^u exp\{-u(1-\nu+\varepsilon')(1+o(1))\log u(1-\nu)\}$, по $u \to \infty$, $\varepsilon' > 0$ - некоторое малое число.

Здесь, как видно, линейный порядок по $(1-\nu)$. Теорема дает правильный характер зависимости по u. Однако в нижней оценке зависимость от $(1-\nu)$ линейная, а в теореме квадратичная.

2. Если x намного больше q, то оценить сверху $f(x)$ не удается. Это становится ясно если рассмотреть $A = \{n : n > q\}$. Если x растет как степень q с показателем, меньшим 1, то иногда также нельзя дать нетривиальную оценку

на $|A\bigcap[1,x]|$. Для этого возьмем достаточно большое q и рассмотрим полугруппу A_q, которая состоит из любых произведений чисел взятых из $(q^{0.1}, 1.5q^{0.1}]$. Заметим, если $n \in A\bigcap[1,q]$, то $n = n_1 \dots n_r, r \leq 9$ и $n_1, \dots, n_r \in (q^{0.1}, 1.5q^{0.1}]$. Значит $|A_q\bigcap[1,q]| \leq \sum\limits_{1\leq r\leq 9}(0.5q^{0.1})^r \leq q^{0.9}$.

Теперь возьмем $x = 1.5q^{0.1}$. Тогда

$$|A_q\bigcap[1,x]| \geq \frac{x}{4}.$$

Таким образом, хороших оценок на функцию $f(x)$ при x порядка степени q для произвольных полугрупп получить не удается.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hildebrand A., Tenenbaum G., Integers without large prime factors, J Theorie des Nombres de Bordeaux, 5 (1993) no. 2 411-484.

[2] Прахар К., Распределение простых чисел, Издательство Мир, 1984.

[3] Bourgain J., Konyagin S., Shparlinski I., Distribution of elements of cosets of small subgroups and applications, International Math Research Notices, 1968-2009, 2012:9 (2012).

[4] Shparlinsky I., Integers with a large smooth divisor, Electronic journal of combinatorial number theory 7, 2007.

[5] Tenenbaum G., Introduction to analytic and probabilistic number theory, Cambridge Universit Press, Cambridge, UK, 1995.

Механико-математический факультет, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Поступило 29.10.2012