Yu. Ch. Kokayev, On GB and GC-properties of generalised ellipsoids, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 104–108

Ю.Ч. Кокаев

О GB и GC -СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Пусть (Ω , $\mathcal{A}$, P) - вероятностное пространство. Последовательность случайных величин $\{X_n\}$ называется ортогауссовской, если величины X_i независимы и $X_i \in N(0,1)$. Пусть H - действительное бесконечномерное гильбертово пространство. Гауссовский процесс L на пространстве H называется изонормальным, если L является линейным отображением пространства H в множество действительных гауссовских случайных величин, причем $EL(x)=0$ и $EL(x)L(y)=(x,y)$ для всех $x,y\in H$. В частности, если $\{e_n\}$ - некоторый ортонормированный базис в H, то для любого $x\in H, x=\sum_k x_k e_k$ можно положить $L(x)=\sum_n x_n Y_n$, где $\{Y_n\}$ - ортогауссовская последовательность. Будем говорить, что множество $C\subset H$ является GC - множеством ($C\in GC$), если процесс L на C имеет непрерывные траектории, и является GB - множеством ($C\in GB$), если процесс L на C имеет ограниченные траектории.

Пусть $\{e_n\}$ - ортонормированная последовательность в гильбертовом пространстве H , $p_n\in[1,\infty]$ $n=1,2,..$и $\{a_n\}$ - убывающая последовательность положительных действительных чисел. Положим

$$B\{a_n;p_n\}=\Big\{\sum_n x_n e_n:\sum_{n:p_n\neq\infty}\Big|\frac{x_n}{a_n}\Big|^{p_n}\leqslant 1;\ \Big|\frac{x_n}{a_n}\Big|\leqslant 1 \text{при } p_n=\infty\Big\}.$$

Ниже выясняются условия при которых $B\{a_n;p_n\}\in GB$ и $B\{a_n;p_n\}\in GC$.

Случай, когда $p_n=p$ при любом n , где $p\in[1,\infty]$, рассматривался в работах Дадли [3] , Сониса [7] , Шеве [I, 2] . Именно, если $1<p<\infty$, то множество $B\{a_n;p\}\in GB\Longleftrightarrow \sum_n|a_nY_n|^q<\infty$ где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и Y_n - ортогауссовская последовательность. Приведенное утверждение справедливо тогда и только тогда, когда $\sum_n|a_n|^q<\infty$ (Сонис). Для случая $p=q=2$ - это классический результат. В $B\{a_n;1\}\in$ $\in GB\Longleftrightarrow a_n=O(\log n)^{-1/2}$; $B\{a_n;1\}\in GC\Longleftrightarrow a_n=o(\log n)^{-1/2}$ (Дадли, Сонис). Если $1<p\leqslant\infty$, то $B\{a_n;p\}\in GB\Longleftrightarrow$ $B\{a_n;p\}\Longleftrightarrow GC$(Шеве).

Рассмотрим в пространстве H следующее семейство $\mathfrak{N}$ абсолютно выпуклых замкнутых подмножеств: $K\in\mathfrak{N}$, если $\exists\varepsilon=\varepsilon(K)>0\ \forall x\in\partial K\ \exists H(x)(H(x)$ - подпространство конечной размерности) $\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)K\cap H(x)\subset K$, где $\partial K=\{x\in K:\lambda x\notin K$ при любом $\lambda>1\}$.

ЛЕММА. $K\in GB \Leftrightarrow K\in GC$ для любого $K\in\mathfrak{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $K\in\mathfrak{T}$ есть GB – множество, $\alpha(x)$ – значение локальной осцилляции в смысле Ито и Нисио в точке $x\in K$ (см. [4], [5]). В работе автора (см. [6] стр. 129) доказывается, что $\inf\{\alpha(x):x\in\frac{1}{2}K\}=\frac{1}{2}\alpha(0)$. Следовательно $\alpha(x)=0$ при любом $x\in K$, т.е. $K\in GC$, поскольку в противном случае должно было бы выполняться соотношение $\inf\{\alpha(x):x\in\frac{1}{2}K\}\geqslant\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\alpha(0)$, что, как указывалось, невозможно. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

I. Пусть $\lim_n\inf p_n>1$, $\lim_n\sup p_n<\infty$.

а) $B\{a_n;p_n\}\in GB \Leftrightarrow \sum_n|a_nY_n|^{q_n}<\infty$ п.н. где

$\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}=1$ и Y_n – ортогауссовская последовательность

б) $B\{a_n;p_n\}\in GB \Leftrightarrow \sum_n|a_n|^{q_n}<\infty$;

в) $B\{a_n;p_n\}\in GB \Leftrightarrow B\{a_n;p_n\}\in GC$.

II. Пусть $p_n=1+\beta_n$, где $\beta_n>0$, $\beta_n\downarrow 0$.

а) $B\{a_n;1+\beta_n\}\in GB \Leftrightarrow \exists\lambda>0:\sum_n|\lambda a_nY_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty$ п.н.

$B\{a_n;1+\beta_n\}\in GC \Leftrightarrow \forall\lambda>0\ \sum_n|\lambda a_nY_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty$ п.н.

б) $\exists\lambda>0:\sum_n|\lambda\sqrt{\ln(n+1)}\,a_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty \Rightarrow B\{a_n;p_n\}\in GB$;

$\forall\lambda>0\ \sum_n|\lambda\sqrt{\ln(n+1)}\,a_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty \Rightarrow B\{a_n;p_n\}\in GC$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Без ограничения общности можно считать, что $m=\inf_n p_n>1$ и $M=\sup_n p_n<\infty$, поскольку абсолютно выпуклое замкнутое множество $K\in GB \Leftrightarrow K\cap H_1\in GB$ для любого подпространства H_1 в H конечной коразмерности ([8]).

I-а). Пусть $\sum_n|a_nY_n|^{q_n}<\infty$ п.н. Следовательно, существует такое $C>0$, что $P\{\sum_n|a_nY|^{q_n}\leqslant C\}>0$. Событие $\{\sum_n|a_nY_n|^{q_n}\leqslant C\}$ влечет событие $\{\sup_{x\in B\{a_n;p_n\}}L(x)\leqslant C+1\}$, поскольку $|\sum_n x_nY_n|\leqslant\sum_n\frac{1}{p_n}\left|\frac{x_n}{a_n}\right|^{p_n}+\sum_n\frac{1}{q_n}|a_nY_n|^{q_n}$. Значит

$$P\{\sup_{x\in B\{a_n;p_n\}}L(x)\leqslant C+1\}>0,\ \text{т.е } B\{a_n;p_n\}\in GB.$$

Обратно, пусть $B\{a_n;p_n\}\in GB$. Предположим, что $\sum_n|a_nY_n|^{q_n}=\infty$ п.н., т.е. существует такое изменимое $\Omega_0\subset\Omega$, что $P\{\Omega_0\}=1$ и $\sum_n|a_nY_n(\omega)|^{q_n}=\infty$ для любого $\omega\in\Omega_0$. Выберем произвольное достаточно большое число $R>0$.

Для любого $\omega \in \Omega_0$ существуют такие $R_1 > R$ и натуральное N, что $\sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{R_1} \cdot a_k Y_k(\omega)\right|^{q_k} = 1$. Положим

$$\frac{x_k}{a_k} = \left|\frac{1}{R_1} a_k Y_k(\omega)\right|^{q_k - 1}, \ k = 1, 2, \ldots, N; \ x_k = 0, \ k \geqslant N+1.$$

Тогда $\quad \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{x_k}{a_k}\right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{R_1} a_k Y_k(\omega)\right|^{q_k} = 1$, но

$$\sum_{k=1}^{N} x_k Y_k(\omega) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{a_k} \cdot a_k Y_k(\omega) = R_1 \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{R_1} a_k Y_k(\omega)\right|^{q_k} = R_1 > R.$$

Следовательно $\sup\limits_{x \in B\{a_n; p_n\}} L(x)(\omega) \geqslant R$ для любых $R > 0$ и $\omega \in \Omega_0$, т.е. $B\{a_n; p_n\} \notin GB$, что противоречит условию

I-б). Пусть ряд $\sum_n |a_n|^{q_n}$ – сходится. По теореме о трех рядах п.н. сходится ряд $\sum_n |a_n Y_n|^{q_n}$. Отсюда и из I-а) следует что $B\{a_n; p_n\} \in GB$.

Обратно, пусть $B\{a_n; p_n\} \in GB$. По предыдущему пункту п.н. сходится ряд $\sum_n Z_n$, где $Z_n = |a_n Y_n|^{q_n}$. По теореме о трех рядах отсюда следует, что сходится ряд $\sum_n E Z_n^c$ для любого $C > 0$. Пусть $C > 1$. Для всех достаточно больших верны неравенства $\frac{2M}{2M-1} \leqslant q_n < \frac{2m}{m-1}$. Следовательно, для таких n выполняются соотношения

$$E Z_n^c \geqslant |a_n|^{q_n} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int^{c^{1/q_k}/a_k} x^{q_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geqslant |a_n|^{q_n} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int^{1/a_n} x^{\frac{2M}{2M-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Отсюда следует что ряд $\sum_n |a_n|^{q_n}$ – сходится.

I-в) Достаточно убедиться в том, что $B\{a_n; p_n\} \in \mathfrak{I}$. Поскольку $m > 1$, $M < \infty$, мы можем выбрать такое $\varepsilon > 0$, что будет верно неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot (1+\varepsilon) + \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)^M \leqslant 1$. Пусть $x \in \partial B\{a_n; p_n\}$, т.е. $\sum_n \left|\frac{x_n}{a_n}\right|^{p_n} = 1$. Выберем положительное $\delta < \frac{\varepsilon}{2^{m-1}}$. Существует такое натуральное N, что $\sum_{n=1}^{N} \left|\frac{x_n}{a_n}\right|^{p_n} \geqslant 1 - \delta$. Положим $H(x) = \overline{\mathcal{L}}\{e_k, k \geqslant N+1\}$. Тогда

$$\frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) B\{a_n; p_n\} \cap H(x) \subset B\{a_n; p_n\}.$$

Действительно, пусть $y = \sum_{k \geqslant N+1} y_k e_k \in B\{a_n; p_n\} \cap H(x)$, т.е. $\sum_{k \geqslant N+1} \left|\frac{y_k}{a_k}\right|^{p_k} \leqslant 1$. Используя неравенство

$|x+y|^p \leqslant 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$, получаем отсюда

$$\sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{x_k}{a_k}\right|^{p_k} + \sum_{k \geqslant N+1} \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{x_k}{a_k} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{y_k}{a_k}\right|^{p_k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m + \sum_{k \geqslant N+1} \frac{1}{2} \left|\frac{x_k}{a_k}\right|^{p_k} + \sum_{k \geqslant N+1} \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)^{p_k} \left|\frac{y_k}{a_k}\right|^{p_k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)^M \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot (1+\varepsilon) + \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)^M \leqslant 1,$$

т.е. $\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2}+\varepsilon)y\in B\{a_n;p_n\}$. Следовательно $B\{a_n;p_n\}\in\mathfrak{N}$.

II-а). Пусть $\exists\,\lambda>0\cdot\sum_n|\lambda a_n Y_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty$ п.н. Тогда $\exists\, C>0\cdot P\{\sum_n|\lambda a_n Y_n|^{\frac{1}{\beta_n}+1}\leqslant c\}>0$. Событие $\{\sum_n|\lambda a_n Y_n|^{\frac{1}{\beta_n}+1}<C\}$ влечет событие $\{\sup\limits_{x\in B\{a_n;1+\beta_n\}}L(x)\leqslant(\frac{1}{\lambda})^{1+\beta}+C\}$, поскольку

$$\sum_K x_K Y_K\leqslant\sum_K\frac{1}{1+\beta_K}\left|\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x_K}{a_K}\right|^{1+\beta_K}+\sum_K\frac{\beta_K}{1+\beta_K}|\lambda a_K Y_K|^{\frac{1+\beta_K}{\beta_K}}$$

Следовательно $B\{a_n;1+\beta_n\}\in GB$.

Обратно пусть $B\{a_n;1+\beta_n\}\in GB$. Предположим, что $\sum_K|\lambda a_K Y_K|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=\infty$ п.н. для любого $\lambda>0$. Выберем произвольное достаточно большое $R>0$. Существует такое $\Omega_0\subset\Omega$, что $P\{\Omega_0\}=1$ и $\sum_K|\frac{1}{R}a_K Y_K(\omega)|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=\infty$ для любого $\omega\in\Omega_0$. Для любого $\omega\in\Omega_0$ существуют такие $R_1>R$ и натуральное N, что $\sum\limits_{K=1}^{N}|\frac{1}{R_1}a_K Y_K(\omega)|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=1$. Положим

$$\frac{x_K}{a_K}=\left|\frac{1}{R_1}a_K Y_K(\omega)\right|^{\frac{1}{\beta_K}},\quad K=1,2,\dots,N;\quad x_K=0,\ k\geqslant N+1.$$

Тогда $\sum\limits_{K=1}^{\infty}\left|\frac{x_K}{a_K}\right|^{1+\beta_K}=\sum\limits_{K=1}^{N}\left|\frac{1}{R_1}a_K Y_K(\omega)\right|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=1$, но

$$\sum_{K=1}^{\infty}x_K Y_K(\omega)=\sum_{K=1}^{N}\frac{x_K}{a_K}\cdot a_K Y(\omega)=R_1\sum_{K=1}^{N}\left|\frac{1}{R_1}a_K Y_K(\omega)\right|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=R_1>R.$$

Следовательно $\sup\limits_{x\in B\{a_n;1+\beta_n\}}L(x)(\omega)\geqslant R$ для любых $R>0$ и $\omega\in\Omega_0$, т.е. $B\{a_n;1+\beta_n\}\notin GB$, что противоречит условию.

Доказательство второй части пункта проводится при помощи подобных рассуждений.

II - б). Пусть существует такое $\lambda>0$, что $S(\lambda)=\sum_K|\lambda\sqrt{\ln(K+1)}a_K|^{\frac{1}{\beta_K}+1}<\infty$. Существует такое $C>0$, что $P\{\sup\limits_K\frac{1}{\sqrt{\log(K+1)}}Y_K\leqslant C\}>0$. Событие $\{\sup\limits_K\frac{1}{\sqrt{\ln(K+1)}}Y_K\leqslant C\}$ влечет событие $\{\sup\limits_{x\in B\{a_n;1+\beta_n\}}\leqslant C(\frac{1}{\lambda^{1+\beta_1}}+S(\lambda))\}$ поскольку

$$|\sum_K x_K Y_K|=|\sum_K\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x_K}{a_K}\cdot\lambda\sqrt{\ln(K+1)}\cdot a_K\frac{1}{\sqrt{\ln(K+1)}}Y_K\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot\Big(\sum_K\frac{1}{1+\beta_K}\left|\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x_K}{a_K}\right|^{1+\beta}+\sum_K\frac{\beta_K}{1+\beta_K}|\lambda\sqrt{\ln(K+1)}a_K|^{\frac{1}{\beta_K}+1}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\frac{1}{\lambda^{1+\beta_K}}+S(\lambda)\Big).$$

Следовательно, $B\{a_n;1+\beta_n\}\in GB$.

Пусть $\sum_K|\lambda\sqrt{\ln(K+1)}a_K|^{\frac{1}{\beta_K}}=S(\lambda)<\infty$ для любого $\lambda>0$. Покажем, что $\sum_K|\lambda a_K Y_K|^{\frac{1}{\beta_K}}<\infty$ п.н. для любого $\lambda>0$. Существует такое $C>0$, что событие $A=\{\sup\limits_K\frac{1}{\sqrt{\ln(K+1)}}Y_K\leqslant C\}$ имеет ненулевую вероятность. Тогда для любых $\lambda>0$ и $\omega\in A$ верны соотношения

$$\sum_K|\lambda a_K Y_K(\omega)|^{\frac{1}{\beta_K}}=\sum_K\left|C\lambda a_K\sqrt{\ln(K+1)}\cdot\frac{1}{C\sqrt{\ln(K+1)}}\cdot Y_K(\omega)\right|^{\frac{1}{\beta_K}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_K|C\lambda a_K\sqrt{\ln(K+1)}|^{\frac{1}{\beta_K}}=S(C\lambda)<\infty.$$

Следовательно ряд $\sum_K|\lambda a_K Y_K|^{\frac{1}{\beta_K}}<\infty$ п.н. для любого $\lambda>0$ и, значит, $B\{a_n; 1+\beta_n\} \in GC$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $B\{a_n; 1+\beta_n\} \in GB$, но $B\{a_n; 1+\beta_n\} \notin GC$. (например, при $a_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}}$, $\beta_n = \frac{1}{\ln(k+1)}$). Тогда для любого $x = \sum_k x_k c_k \in \partial B\{a_n; 1+\beta_n\}$, т.е. $\sum_k \left|\frac{x_n}{a_n}\right|^{1+\beta_n} = 1$, существуют такие положительные числа d и ε , что $P\{\sup_{y\in B\{a_n;1+\beta_n\}} L(y) \le d\} > 0$, но $P[\{\sup_{y\in B\{a_n;1+\beta_n\}} L(y) \le d\} \cap \{L(x) \ge d-\varepsilon\}] = 0$.

Действительно, рассуждая как при доказательстве пункта I – в) предложения, можно показать, что для любого $x \in \partial B\{a_k; 1+\beta_k\}$ существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпространство $H(x)$ конечной коразмерности, что $\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}+\varepsilon)B\{a_n; 1+\beta_n\} \cap H(x) \subset B\{a_n; 1+\beta_n\}$. Следовательно, $\alpha(\frac{1}{2}x) \ge (\frac{1}{2}+\varepsilon)\alpha(0)$. Используя теперь теорему I работы [6] получим требуемое.

Автор благодарит В.Н.Судакова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. C h e v e t S. p-ellipsoides de ℓ^q , exposant d'entropie, mesures cylindrigues gaussiennes. – C.R.Acad.Sci.Paris, 1969, Sec.A-B, 269, p.A658-A660.
2. C h e v e t S. p -ellipsoides de ℓ^q , mesures cylindrigues gaussiennes.-Les Probabilités sur les Structures Algébriques (Collogue, Clermont-Ferrand, 1969) (Paris, Centre National de la Recherche Scientifique), 1970, p.55-73.
3. D u d l e y R.M. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. – J.Functional Analysis, 1967, v.1, p.290-330.
4. I t o K., N i s i o M. On the oscillation function of Gaussian processes. – Math.Scand., 1968, v.22, N 1, p.209-223.
5 J a i n N.C., K a l l i a n p u r G. Oscillation function of multiparameter Gaussian processes. – Nagoya Math.J., 1972, v.47, p.15-28.
6. К о к а е в Ю.Ч. Поведение осцилляции и условные гауссовские распределения линейных функционалов. – Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1982, т.II9, с.128-143.
7. С о н и с М.Г. О некоторых измеримых подпространствах пространства всех последовательностей с гауссовской мерой. – Успехи матем.наук, 1966, т.21, № 5, с.277-279.
8. С у д а к о в В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.141.