



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. V. Kuz'mina, The problems of extremal decomposition, and the coefficient inequalities in the class $\Sigma(r)$, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1991, Volume 196, 101–116

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

March 16, 2025, 09:20:39



ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ И ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ
В КЛАССЕ $\Sigma(\tau)$

Введение

Пусть Σ -класс функций $f(z)$, мероморфных и однолистных в области $U^* = \{z : |z| > 1\}$ и имеющих в окрестности точки $z = \infty$ разложение вида

$$f(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots \quad (I)$$

Через $\Sigma(\tau)$ обозначаем класс функций из Σ , обладающих следующим свойством: область $f(U^*)$ не содержит некоторой односвязной области, содержащей начало координат и имеющей конформный радиус τ , $0 < \tau < 1$, относительно этой точки. Класс $\Sigma(\tau)$ был введен в рассмотрение в монографии Дж.Дженкинса [1]. При этом в [1] была получена точная оценка модуля коэффициента α_0 в классе $\Sigma(\tau)$ в качестве одного из первых приложений "общей теоремы о коэффициентах", являющейся центральной темой монографии [1]. Позднее класс $\Sigma(\tau)$ исследовался в ряде работ других авторов. В работе А.Ю.Солынина [2], публикуемой в настоящем сборнике, даны оценки диаметров линий уровня в классе $\Sigma(\tau)$ и в виде следствия получена точная оценка для $|\alpha_1|$ в этом классе.

Данная работа посвящена исследованию связи задач об экстремальном разбиении с вопросами оценок коэффициентов в классах $\Sigma(\tau)$ и Σ . В теореме I на основании результатов в задачах об экстремальном разбиении получены точные неравенства для функционала $|f'(\rho)f'(-\rho)/[f(\rho)-f(-\rho)]^2|$, $\rho > 1$, в классе $\Sigma(\tau)$. В качестве предельного результата из теоремы I вытекает точная оценка для $|\alpha_1|$ в классе $\Sigma(\tau)$ (теорема 2). При помощи соображений того же характера находится максимум $|\alpha_2|$ в этом же классе функций (теорема 3). Данная в [1] оценка для $|\alpha_0|$ в классе $\Sigma(\tau)$ может быть получена при помощи того же подхода.

Используемая в настоящей работе связь классических задач об экстремальном разбиении с вопросами оценок коэффициентов в классе $\Sigma(\tau)$ основывается на том факте что ассоциированные квадратичные дифференциалы в указанных задачах в классе $\Sigma(\tau)$ (в структуре траекторий этих дифференциалов присутствуют конечные области) можно рассматривать как предельные для квадратичных

дифференциалов в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов односвязных областей и конформных модулей двусвязных областей в соответствующих семействах систем неналегающих областей.

В заключительной части данной работы демонстрируется возможность использования понятия приведенного модуля односвязной области, подобной в малом концевой области квадратичного дифференциала, для получения точных оценок коэффициентов в классах $\sum(\tau)$ и \sum .

В дальнейшем $U^* = \{z : |z| > 1\}$, $\rho > 1$. Через $\mathcal{D}(a_1, \dots, a_n)$ обозначаем семейство систем неналегающих односвязных областей D_1, \dots, D_n на \bar{C} , $a_k \in D_k$. Соответствующее семейство систем областей в области U^* обозначаем через $\mathcal{D}_{U^*}(a_1, \dots, a_n)$. Через $R(D, a)$ обозначаем конформный радиус односвязной области D относительно точки $a \in D$, через $M(\Delta)$ - конформный модуль двусвязной области Δ .

§ I. Задачи об экстремальном разбиении и оценки для $|f'(\rho)f'(-\rho)/[f(\rho)-f(-\rho)]^2|$ в классе $\sum(\tau)$

I^0 . Пусть $B_1^{(z)} = \{z : z \in U^*, \operatorname{Re} z > 0\}$, $B_2^{(z)} = \{z : z \in U^*, \operatorname{Re} z < 0\}$. Эта пара областей реализует максимум произведения $R(D_1, \rho) \cdot R(D_2, -\rho)$ в семействе $\mathcal{D}_{U^*}(\rho, -\rho)$. Пусть

$$G(z) = \frac{1}{2}(z - z^{-1}), \quad H = G(\rho) = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}).$$

При отображении $Z = G(z)$ области $B_1^{(z)}$ соответствует правая полуплоскость $\mathbb{H} = \{Z : \operatorname{Re} Z > 0\}$ и из равенства

$$R(\mathbb{H}, H) = 2H = G'(\rho) R(B_1^{(z)}, \rho)$$

получаем

$$R(B_1^{(z)}, \rho) R(B_2^{(z)}, -\rho) = \left[\frac{2\rho(1-\rho^{-2})}{1+\rho^{-2}} \right]^2. \quad (2)$$

Пусть $f(z) \in \sum(\tau)$ и пусть D_0^f - область, не принадлежащая $f(U^*)$, $0 \in D_0^f$, $R(D_0^f, 0) = \tau$. Обозначим через D_1^f, D_2^f f -образы областей $B_1^{(z)}, B_2^{(z)}$ и пусть $a_1 = f(\rho)$, $a_2 = f(-\rho)$. Система областей D_0^f, D_1^f, D_2^f принадлежит семейству $\mathcal{D}(0, a_1, a_2)$. Пусть μ - параметр, $0 < \mu < 2$, и пусть $D_0^{(w)}, D_1^{(w)}, D_2^{(w)}$ - система областей, реализующая максимум произведения

$$R(D_0, 0)^{\mu^2} R(D_1, a_1) R(D_2, a_2)$$

в семействе $\mathcal{D}(0, a_1, a_2)$. Тогда

$$R(D_0^f, 0)^{\mu^2} R(D_1^f, a_1) R(D_2^f, a_2) \leq R(D_0^{(w)}, 0)^{\mu^2} R(D_1^{(w)}, a_1) R(D_2^{(w)}, a_2). \quad (3)$$

При отображении

$$w \rightarrow W(w) = \frac{(a_1 - a_2)w}{(a_1 + a_2)w - 2a_1a_2} \quad (4)$$

$0, a_1, a_2 \rightarrow 0, 1, -1$ и областям $D_k^{(w)}$, $k=0, 1, 2$, соответствуют области $D_k^{(w)}$, реализующие максимум произведения

$$R(D_0, 0)^{\mu^2} R(D_1, 1) R(D_2, -1) \quad (5)$$

в семействе $\mathcal{D}(0, 1, -1)$. Имеем равенство

$$\frac{R(D_0^{(w)}, 0)^{\mu^2} R(D_1^{(w)}, a_1) R(D_2^{(w)}, a_2)}{|a_1 - a_2|^{2-\mu^2} |a_1 a_2|^{\mu^2}} = \frac{R(D_0^{(w)}, 0)^{\mu^2} R(D_1^{(w)}, 1) R(D_2^{(w)}, -1)}{2^{2-\mu^2}}$$

и потому неравенство (3) можем записать в виде

$$\frac{R(D_0^f, 0)^{\mu^2} R(D_1^f, 1) R(D_2^f, -1)}{|f(\rho) - f(-\rho)|^{2-\mu^2} |f(\rho)f(-\rho)|^{\mu^2}} \leq \frac{R(D_0^{(w)}, 0)^{\mu^2} R(D_1^{(w)}, 1) R(D_2^{(w)}, -1)}{2^{2-\mu^2}} \quad (6)$$

Неравенство (6) справедливо для любой функции $f(z) \in \Sigma(\tau)$. Равенство в (6) реализуется только в том случае, когда области D_k^f , $k=0, 1, 2$, являются прообразами областей $D_k^{(w)}$ при преобразовании (4). Из единственности системы областей, реализующей максимум произведения (5) в семействе $\mathcal{D}(0, 1, -1)$ и соображений симметрии следует, что каждая из областей $D_k^{(w)}$ симметрична относительно вещественной оси W -плоскости, область $D_0^{(w)}$ симметрична относительно мнимой оси, области $D_1^{(w)}$ и $D_2^{(w)}$ симметричны друг с другом относительно, мнимой оси и их общая граница $\gamma^{(w)}$ принадлежит замыканию $\Pi^{(w)}$ этой прямой. Поэтому равенство в (6) может достигаться только в том случае, когда общая граница γ^f областей D_1^f и D_2^f принадлежит окружности $\Gamma^{(w)}$, являющемуся образом $\Pi^{(w)}$ при отображении $w = w(W)$, обратном к (4), и области D_1^f, D_2^f симметричны друг с другом относительно $\Gamma^{(w)}$. Так как $D_k^f = f(B_k^{(z)})$, $k=1, 2$, то $\infty \in D_1^f \cup D_2^f$ следовательно, $\infty \in \Gamma^{(w)}$, т.е. $\Gamma^{(w)}$ является замыканием некоторой прямой. Наконец, поскольку $f(z) = z + O(1)$ при $z \rightarrow \infty$, то из вида общей границы $\gamma^{(z)}$ областей $B_1^{(z)}$ и $B_2^{(z)}$ следует, что $\Gamma^{(w)}$ — замыкание мнимой оси w -плоскости. Таким образом, равенство в (6) может достигаться для функции $f(z) \in \Sigma(\tau)$ только в том случае, когда $f(z)$ — нечетная функция,

при этом $f(z)$ — функция с вещественными коэффициентами. Поэтому при доказательстве существования экстремального отображения будем считать, что $f(z)$ — нечетная функция. В этом случае отображение (4) сводится к линейному преобразованию:

$$W = \frac{w}{f(\rho)}, \quad f(\rho) > 0. \quad (7)$$

Так как равенство в (3) может достигаться для $f(z) \in \Sigma(\tau)$ только в случае $R(D_0^{(w)}, 0) = \tau$, то равенство в (6) возможно только при условии $R(D_0^{(w)}, 0) = |W'(0)|\tau$, т.е.

$$R(D_0^{(w)}, 0) = \frac{\tau}{f(\rho)}. \quad (8)$$

Области $D_k^{(w)}$, $k = 0, 1, 2$, являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = - \frac{H^2}{\pi^2(1+h^2)} \frac{W^2+h^2}{W^2(W^2-1)^2} dW^2, \quad h = \frac{\mu}{2(1-\mu^2/4)^{1/2}} \quad (9)$$

(имея в виде последующий предельный переход при $\rho \rightarrow \infty$, мы рассматриваем квадратичные дифференциалы, траектории которых в их круговых областях имеют в определяемых этими дифференциалами метриках длины, равные соответственно μH и H). Имеем равенства

$$R(D_0^{(w)}, 0) = F_0(\mu), \quad R(D_1^{(w)}, 1) = R(D_2^{(w)}, -1) = F_1(\mu), \quad (10)$$

где

$$F_0(\mu) = \frac{\mu}{(1-\mu^2/4)^{1/2}} \left(\frac{1-\mu/2}{1+\mu/2} \right)^{1/\mu}, \quad F_1(\mu) = \frac{2}{1-\mu^2/4} \left(\frac{1-\mu/2}{1+\mu/2} \right)^{\mu/2}.$$

Так как $F_0(\mu)$ — монотонная функция от μ , то уравнение

$$f(\rho) = \frac{\tau}{F_0(\mu)} \quad (11)$$

определяет μ при фиксированных $f(\rho)$ и τ .

2°. Найдем условие, при котором существует экстремальная функция $f(z) \in \Sigma(\tau)$. Пусть $\zeta = q_1(W)$ — отображение области $D_1^{(w)}$ на круг $|\zeta| < F_1(\mu)$, $q_1(1) = 0$, $q_1'(1) = 1$. Функция $q_1(W)$ удовлетворяет в $D_1^{(w)}$ уравнению

$$H^2 \left(\frac{dq_1(W)}{q_1(W)} \right)^2 = -4\pi^2 Q(W) dW^2, \quad (12)$$

где $Q(W)dW^2$ — дифференциал (9). Так как длина в Q -метрике

общей границы $\Gamma_0^{(W)}$ областей $D_0^{(W)}$ и $D_1^{(W)}$ равна $1/2 H \mu$, то при отображении $\zeta = q_1(W)$ образом дуги $\Gamma_0^{(W)}$ является круговая дуга $\{\zeta = e^{i\psi} F_1(\mu) : |\psi - \pi| \leq \pi\mu/2\}$. Поэтому функция

$$\eta(W) = \frac{1 + q_1(W)/F_1(\mu)}{1 - q_1(W)/F_1(\mu)},$$

аналитически продолженная на $\bar{C}^{(W)} \setminus \bar{D}_0^{(W)}$, отображает указанную область на внешность отрезка $[-itg \pi\mu/4, itg \pi\mu/4]$. Из уравнения (12) находим

$$q_1(W) = F_1(\mu)(1 + AW^{-1} + o(W^{-1})) \text{ при } W \rightarrow \infty, \quad A^2 = -4,$$

откуда

$$\eta(W) = W(1 + O(W^{-1})) \text{ при } W \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\text{cap } D_0^{(W)} = f(\rho) \text{cap } D_0^{(W)} = \frac{1}{2} f(\rho) \text{tg } \pi\mu/4.$$

Итак, при $0 < \mu \leq \mu^*$, где

$$\mu^* = \frac{4}{\pi} \text{arctg } \frac{2}{f(\rho)}, \quad (13)$$

существует функция $f(z) \in \Sigma(\tau)$, для которой в (6) реализуется равенство. При $\mu = \mu^*$ функция $f(z)$ отображает U^* на внешность $\bar{D}_0^{(W)}$, при $\mu < \mu^*$ указанная функция отображает U^* на область, получающуюся из $\bar{C}^{(W)} \setminus \bar{D}_0^{(W)}$ проведением разрезов по отрезкам мнимой оси, имеющих своими концами граничные точки области $D_0^{(W)}$.

Пусть теперь $\mu^* < \mu < 2$. В этом случае рассмотрим задачу о максимуме произведения

$$R(B_1, \rho) R(B_2, -\rho) M(\Delta)^{\mu^2}$$

в семействе \mathcal{D}_{U^*} всех систем неналегающих областей $\{B_1, B_2, \Delta\}$ на U^* , где B_1 и B_2 - односвязные области, содержащие соответственно точки ρ и $-\rho$, Δ - двусвязная область, отделяющая точки $\pm \rho$ от окружности $|z|=1$. Пусть $\{B_1^{(z)}, B_2^{(z)}, \Delta^{(z)}\}$ - экстремальная система областей этой задачи. При отображении $Z = F(z)$ этой системе областей соответствует система $\{B_1^{(Z)}, B_2^{(Z)}, \Delta^{(Z)}\}$, где $B_k^{(Z)}$ - круговые области, $\Delta^{(Z)}$ - кольцевая область для квадратичного дифференциала

$$q(Z)dZ^2 = - \frac{H^2(H^2+1)}{\pi^2(\kappa^2 H^2+1)} \frac{(1+\kappa^2 Z^2) dZ^2}{(Z^2-H^2)^2 (Z^2+1)}, \quad (I4)$$

где $\kappa, 0 < \kappa < 1$, - функция от μ и ρ , определяемая условием $\mu H = 2q_{\mu, q}[-i, i]$, т.е. уравнением

$$\mu H = \frac{4H}{\pi} \left(\frac{H^2+1}{\kappa^2 H^2+1} \right)^{1/2} \int_0^1 \left(\frac{1-\kappa^2 t^2}{1-t^2} \right)^{1/2} \frac{dt}{H^2+t^2}. \quad (I5)$$

Для конформного модуля $M(\Delta^{(Z)})$ области $\Delta^{(Z)}$ имеем равенство $\mu H \log M(\Delta^{(Z)}) = 2\pi q_{\mu, q}[i, i/\kappa]$, следовательно,

$$\log M(\Delta^{(Z)}) = \frac{\pi}{2} \left\{ \int_1^{1/\kappa} \left(\frac{1-\kappa^2 t^2}{t^2-1} \right)^{1/2} \frac{dt}{H^2+t^2} / \int_0^{\kappa} \left(\frac{1-\kappa^2 t^2}{1-t^2} \right)^{1/2} \frac{dt}{H^2+t^2} \right\}. \quad (I6)$$

Далее, для отображения $\zeta_1 = q_1(Z)$ области $B_1^{(Z)}$ на круг $|\zeta_1| < R(B_1^{(Z)}, H)$, $q_1(H) = 0$, $q_1'(H) = 1$, имеем уравнение $H d \log \zeta_1 = 2\pi [-q(Z)]^{1/2} dZ$, откуда после замены переменной и выделения особенности в соответствующем интеграле приходим к равенству

$$\begin{aligned} \log R(B_1^{(Z)}, H) &= \\ &= 2 \left(\frac{H^2+1}{\kappa^2 H^2+1} \right)^{1/2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\kappa^2 H^2+t^2}{H^2+t^2} \right)^{1/2} - \left(\frac{\kappa^2 H^2+1}{H^2+1} \right)^{1/2} \right] \frac{dt}{1-t^2} + \log 2H. \end{aligned} \quad (I7)$$

Пусть теперь D_0^f имеет тот же смысл, как и выше, D_1^f, D_2^f, Δ^f - f -образы областей $B_1^{(z)}, B_2^{(z)}, \Delta^{(z)}$. Тогда

$$\begin{aligned} R(D_1^f, f(\rho)) R(D_2^f, f(-\rho)) &= |f'(\rho) f'(-\rho)| \cdot 4(1+\rho^{-2})^{-2} R^2(B_1^{(z)}, H), \quad (I8) \\ M(\Delta^f) &= M(\Delta^{(z)}). \end{aligned}$$

Рассматривая экстремальную конфигурацию $D_0^{(w)}, \Delta^{(w)}, D_1^{(w)}, D_2^{(w)}$ задачи о максимуме произведения

$$\{R(D_0, 0) M(\Delta)\}^{\mu^2} R(D_1, a_1) R(D_2, a_2)$$

в соответствующем семействе систем областей на $\overline{\mathbb{C}}^{(w)}$ и систему областей $D_0^{(w)}, \Delta^{(w)}, D_1^{(w)}, D_2^{(w)}$, соответствующую указанной конфигурации при отображении (4), приходим к однопараметрическому семейству неравенств, аналогичному (6):

$$\frac{[R(D_0^f, 0) M(\Delta^f)]^{\mu^2} R(D_1^f, f(\rho)) R(D_2^f, f(-\rho))}{|f(\rho) - f(-\rho)|^{2-\mu^2} |f(\rho) f(-\rho)|^{\mu^2}} \leq \frac{[R(D_0^{(w)}, 0) M(\Delta^{(w)})]^{\mu^2} R(D_1^{(w)}, 1) R(D_2^{(w)}, -1)}{2^{2-\mu^2}} \quad (I9)$$

Из известных фактов в задачах об экстремальном разбиении следует, что $\bar{D}_0^{(w)} = \bar{D}_0^{(w)} \cup \Delta^{(w)}$ - круговая область квадратичного дифференциала, определяющего экстремальную систему областей на $\mathbb{C}^{(w)}$, при этом $R(\bar{D}_0^{(w)}, 0) = R(D_0^{(w)}, 0)M(\Delta^{(w)})$. Поэтому необходимым для равенства в (I9) является условие $|W'(0)|R(D_0^f, 0)M(\Delta^{(w)}) = F_0(\mu)$, т.е.

$$|W'(0)|^{-1} = \frac{\tau M(\Delta^{(w)})}{F_0(\mu)}. \quad (20)$$

Далее, рассуждение п. I⁰ показывает, что равенство в (I9) реализуется для функции $f(z) \in \Sigma(\tau)$ только в том случае, когда $f(z)$ - нечетная функция с вещественными коэффициентами, $f(\rho) > 0$. В этом случае из (20) получаем условие, аналогичное (II):

$$f(\rho) = \frac{\tau M(\Delta^{(2)})}{F_0(\mu)}. \quad (21)$$

3⁰. Возвращаясь к случаю произвольной функции $f(z) \in \Sigma(\tau)$, на основании неравенств (6), (I9) и установленных выше необходимых условий достижения равенства в этих неравенствах приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА I. Пусть $f(z) \in \Sigma(\tau)$, $0 < \tau < 1$; $\rho > 1$. Пусть $0 < \mu < 2$, μ^* удовлетворяет равенству

$$\left| \frac{f(\rho)f(-\rho)}{f(\rho) - f(-\rho)} \right| \operatorname{tg} \pi \mu^*/4 = 1, \quad 0 < \mu^* < 2.$$

I) Пусть $\mu \leq \mu^*$ и пусть

$$\left| \frac{2f(\rho)f(-\rho)}{f(\rho) - f(-\rho)} \right| = \frac{\tau}{F_0(\mu)}. \quad (22)$$

Тогда в классе $\Sigma(\tau)$ справедливо неравенство

$$\frac{|f'(\rho)f'(-\rho)|}{|f(\rho) - f(-\rho)|^2} \leq \frac{F_1^2(\mu)(1 + \rho^{-2})^2}{16\rho^2(1 - \rho^{-2})^2}. \quad (23)$$

Пусть $D_\mu(\tau)$, $0 \in D_\mu(\tau)$, - круговая область квадратичного дифференциала

$$Q_\mu(w, \tau) dw^2 = -C \frac{w^2 + \tau^2 \mu^2 / [(4 - \mu^2) F_0^2(\mu)]}{w^2 (w^2 - \tau^2 F_0^{-2}(\mu))^2} dw^2, \quad C > 0. \quad (24)$$

Равенство в (23) реализуется в классе $\Sigma(\tau)$ только для нечетных функций вида $f(z) = \varepsilon f_0(\varepsilon^{-1}z)$, $|\varepsilon| = 1$, где функция $f_0(z)$, $f_0(\rho) > 0$, отображает U^* в случае $\mu = \mu^*$ на область $\mathbb{C}^{(w)} \setminus \bar{D}_\mu(\tau)$, в случае $\mu < \mu^*$ - на область, получающуюся из

$\overline{C}^{(w)} \setminus \overline{D}_\mu(\tau)$ проведением разрезов по отрезкам мнимой оси W -плоскости, оканчивающимся в граничных точках области $D_\mu(\tau)$.

2) Пусть теперь $\mu > \mu^*$ и пусть $B_1^{(z)}, B_2^{(z)}$ - круговые области, а $\Delta^{(z)}$ кольцевая область для квадратичного дифференциала (I4), где $\kappa, 0 < \kappa < 1$, удовлетворяет равенству (I5). Для величин $M(\Delta^{(z)})$ и $R(B_1^{(z)}, H)$ имеем равенства (I6) и (I7). Пусть

$$\left| \frac{2f(\rho)f(-\rho)}{f(\rho)-f(-\rho)} \right| = \frac{\tau M(\Delta^{(z)})}{F_0(\mu)}. \quad (25)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left| \frac{f'(\rho)f'(-\rho)}{f(\rho)-f(-\rho)} \right| \leq \frac{F_1^2(\mu)(1+\rho^{-2})^2}{16R^2(B_1^{(z)}, H)}. \quad (26)$$

Равенство в (26) реализуется только для нечетной функции вида $f(z) = \varepsilon f_0(\varepsilon^{-1}z)$, $|\varepsilon|=1$, где функция $f_0(z)$, $f_0(\rho) > 0$, отображает U^* на внешность подобласти $D_\mu(\tau)$ круговой области $D_\mu(\tau)$ дифференциала (24), ограниченной траекторией этого дифференциала в области $D_\mu(\tau)$. $R(\overline{D}_\mu(\tau), 0) = \tau$.

§ 2. Оценки начальных коэффициентов в классе $\Sigma(\tau)$

I^0 . При $\rho \rightarrow \infty$ из теоремы I вытекает точная оценка для модуля коэффициента α_1 в классе $\Sigma(\tau)$. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. В классе $\Sigma(\tau)$, $0 < \tau < 1$, имеет место точное неравенство

$$|\alpha_1| \leq P_1(\tau), \quad (27)$$

где функция $P_1(\tau)$ определяется следующими условиями. При $\tau \leq 8/(\pi e)$

$$P_1(\tau) = 1 - \frac{1}{8} e^2 \tau^2,$$

при $\tau > 8/(\pi e)$

$$P_1(\tau) = 1 - \frac{2}{\kappa^2} \left[\frac{4}{\pi^2} E^2(\kappa) - \kappa'^2 \right],$$

где $\kappa, 0 < \kappa < 1$, - решение уравнения

$$\tau = \frac{8}{\pi e} \frac{E(\kappa)}{\kappa} \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{K'(\kappa) - E'(\kappa)}{E(\kappa)} \right\}. \quad (28)$$

Равенство в (27) реализуется в классе $\Sigma(\tau)$ только нечетными функциями вида $f(z) = \varepsilon f_1(\varepsilon^{-1}z)$, $|\varepsilon|=1$, где $f_1(z)$ - функция с

вещественными коэффициентами, определяемая следующими условиями. В случае $\tau = 8/(\pi e)$ функция $f_1(z)$ отображает U^* на внешность круговой области $D(\tau)$, $0 \in D(\tau)$, квадратичного дифференциала

$$Q(w, \tau) dw^2 = -C_1 \frac{w^2 + e^2 \tau^2 / 4}{w^2} dw^2, \quad C_1 > 0, \quad (29)$$

в случае $\tau < 8/(\pi e)$ - на область, получаемую из $\mathbb{C}^{(w)} \setminus D(\tau)$ проведением разрезов по отрезкам мнимой оси w -плоскости с концами в граничных точках области $D(\tau)$. При $\tau > 8/(\pi e)$ функция $f_1(z)$ отображает U^* на внешности подобласти области $D(\tau)$, ограниченной траекторией дифференциала (29) в $D(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим предельный переход в неравенствах теоремы I при $\rho \rightarrow \infty$. Пусть α_k - коэффициенты разложения (I) функции $f(z)$, $\tilde{\alpha}_k = \operatorname{Re} \alpha_k$.

Пусть сначала $\mu \leq \mu^*$. В этом случае

$$\mu \leq \frac{8}{\pi \rho} + O(\rho^{-2}). \quad (30)$$

Так как для $F_0(\mu)$ справедливо разложение

$$F_0(\mu) = e^{-1} \mu \left(1 - \frac{1}{24} \mu^2 + \dots \right),$$

а условие (22) имеет вид

$$F_0(\mu) = \frac{\tau}{\rho} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0^2}{\rho^2} + \dots \right),$$

то $\mu = e\tau/\rho$ и, в силу (30),

$$\tau \leq \frac{8}{\pi e}.$$

Далее, для $F_1(\mu)$ имеем разложение

$$F_1(\mu) = 2 \left(1 - \frac{1}{4} \mu^2 + \dots \right) = 2 \left(1 - \frac{e^2 \tau^2}{4 \rho^2} + \dots \right).$$

Из равенства (23) теперь получаем

$$\frac{1 - 2\tilde{\alpha}_1 \rho^{-2} + O(\rho^{-4})}{4\rho^2 [1 + 2\alpha_1 \rho^{-2} + O(\rho^{-4})]} \leq \frac{4 \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \tau^2 \rho^{-2} + \dots \right)}{16 \rho^2 (1 - 4\rho^{-2} + \dots)},$$

откуда

$$-\tilde{\alpha}_1 \leq 1 - \frac{1}{8} e^2 \tau^2.$$

Следовательно, для произвольной функции из $\Sigma(\tau)$ имеем неравенство

$$|\alpha_1| \leq 1 - \frac{1}{8} e^2 \tau^2.$$

Пусть $\mu > \mu^*$. Тогда

$$\mu > \frac{8}{\pi \rho} + \dots$$

Из (15) и (16) находим

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{8}{\pi \rho} \frac{E(\kappa)}{\kappa} + O(\rho^{-2}), \\ \log M(\Delta^{(z)}) &= \frac{\pi}{2} \frac{K'(\kappa) - E'(\kappa)}{E(\kappa)} + O(\rho^{-2}). \end{aligned}$$

Равенство (25) теперь можем записать в виде

$$\frac{1}{\rho} + O(\rho^{-2}) = \frac{F_0(\mu)}{\tau M(\Delta^{(z)})} = \frac{\frac{8}{\pi e} \frac{1}{\rho} \frac{E(\kappa)}{\kappa} + \dots}{\tau M(\Delta^{(z)})}.$$

Отсюда вытекает условие

$$\tau > \frac{8}{\pi e}$$

и уравнение (28), определяющее κ как функцию от τ . Наконец, из (17) получаем

$$\log R(B_1^{(z)}, H) = \log 2H - \frac{\kappa'^2}{\kappa^2} H^{-2} + \dots,$$

следовательно,

$$R(B_1^{(z)}, H) = \rho \left[1 - \left(1 + \frac{4\kappa'^2}{\kappa^2} \right) \rho^{-2} + \dots \right].$$

Неравенство (21) теперь приводит к оценке

$$\frac{1 - 2\tilde{\alpha}_1 \rho^{-2} + O(\rho^{-4})}{4\rho^2 [1 + 2\tilde{\alpha}_1 \rho^{-2} + O(\rho^{-4})]} \leq \frac{4 \left(1 - \frac{32}{\pi^2} \frac{E^2(\kappa)}{\kappa^2} \rho^{-2} + \dots \right)}{16\rho^2 \left[1 - 2 \left(1 + \frac{4\kappa'^2}{\kappa^2} \right) \rho^{-2} + \dots \right]},$$

откуда получаем неравенство для $|\alpha_1|$, указанное в формулировке теоремы 2.

Из теоремы I следует, что функции $f(z) \in \Sigma(\tau)$, отображающие U^* на области, характеризующиеся указанными в теореме 2 геометрическими свойствами в терминах квадратичного дифференциала (29), соответствующего дифференциалу (24) теоремы I при $\mu \rightarrow 0$, являются экстремальными функциями теоремы 2. Из известных рассуждений метода экстремальных метрик вытекает утверждение теоремы 2

об единственности экстремальных функций этой теоремы.

2°. Некоторое видоизменение приведенного выше доказательства теоремы 2 позволяет получить точную оценку коэффициента α_2 в классе $\sum(\tau)$. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(z) \in \sum(\tau)$, $0 < \tau < 1$. Тогда справедливо точное неравенство

$$|\alpha_2| \leq P_2(\tau), \quad (31)$$

где $P_2(\tau) = \frac{2}{3} P_1(\tau^{3/2})$, $P_1(\tau)$ - функция теоремы 2.

Равенство в (31) реализуется только функциями вида $f(z) = \varepsilon f_2(\varepsilon^{-1}z)$, $|\varepsilon| = 1$, где $f_2(z)$ связана с функцией $f_1(z)$ теоремы 1 равенством: $f_2(z) = \{f_1(z^{3/2})\}^{2/3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку доказательство теоремы 2 во многих отношениях аналогично доказательству теоремы 1, то мы остановимся лишь на некоторых моментах этого доказательства, приводящих к установлению симметрии экстремального отображения. Пусть

$$\rho > 1, \quad \omega = \exp\{2\pi i/3\},$$

$$B_k^{(z)} = \{z : z \in U^*, |\arg(z/\omega^{k-1})| < \pi/3\}, \quad k=1,2,3.$$

Очевидно, $\rho\omega^{k-1} \in B_k^{(z)}$. Пусть $f(z) \in \sum(\tau)$ и $f(U^*)$ не содержит области D_0^f , $0 \in D_0^f$, $R(D_0^f, 0) = \tau$. Пусть $D_k^f = f(B_k^{(z)})$, $a_k = f(\rho\omega^{k-1})$, $k=1,2,3$. Пусть μ - параметр, $0 < \mu < 3$, $D_k^{(w)}$, $k=0,1,2,3$, - система областей реализующих максимум произведения

$$R(D_0, 0) \mu^2 \prod_{k=1}^3 R(D_k, a_k) \quad (32)$$

в семействе $\mathcal{D}(0, a_1, a_2, a_3)$. Тогда справедливо неравенство

$$R(D_0^f, 0) \mu^2 \prod_{k=1}^3 R(D_k^f, a_k) \leq R(D_0^{(w)}, 0) \mu^2 \prod_{k=1}^3 R(D_k^{(w)}, a_k). \quad (33)$$

Рассмотрим теперь отображение $w \rightarrow w_1$, при котором a_k , $k=1,2,3$, переходят в равноотстоящие точки ω^{k-1} на окружности $|w_1| = 1$, и отображение $w_1 \rightarrow w_2$ круга $|w_1| < 1$ на себя, при котором $w_1(0)$ переходит в $w_2 = 0$, $w_2(1) = 1$. Обозначая через $D_k^{(w)}$, $k=0,1,2,3$, образы областей $D_k^{(w)}$ и через $1 = \omega_1$, ω_2, ω_3 - образы точек a_k при отображении $W(w) = w_2 \circ w_1(w)$, имеем

$$\frac{R(D_0^{(w)}, 0) \mu^2 \prod_{k=1}^3 R(D_k^{(w)}, a_k)}{|(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)|^{1 - \frac{2}{3}\mu^2} |a_1 a_2 a_3|^{\mu^2}} = \frac{R(D_0^{(w)}, 0) \mu^2 \prod_{k=1}^3 R(D_k^{(w)}, a_k)}{|(1 - \omega_2)(1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3)|^{1 - \frac{2}{3}\mu^2}}. \quad (34)$$

С другой стороны, для конформного инварианта в правой части (34) по крайней мере при всех достаточно малых $\mu > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{R(D_0^{(w)}, 0)^{\mu^2} \prod_{\kappa=1}^3 R(D_{\kappa}^{(w)}, a_{\kappa})}{|(1-\omega_2)(1-\omega_3)(\omega_2-\omega_3)|^{1-\frac{2}{3}\mu^2}} \ll \frac{R(\dot{D}_0^{(w)}, 0)^{\mu^2} \prod_{\kappa=1}^3 R(\dot{D}_{\kappa}^{(w)}, a_{\kappa})}{3^{\frac{3}{2}-\mu^2}}, \quad (35)$$

где $1, \omega, \omega^2$ - равностоящие точки на $|W|=1$, $\dot{D}_{\kappa}^{(w)}$, $\kappa=0, 1, 2, 3$, - система областей, реализующая максимум произведения (32) в семействе $\mathcal{D}(0, 1, \omega, \omega^2)$, и равенство в (35) реализуется только в том случае, когда $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - равностоящие точки на $|W|=1$, а системы областей $D_{\kappa}^{(w)}$ и $\dot{D}_{\kappa}^{(w)}$, $\kappa=0, 1, 2, 3$, соответствуют друг другу при преобразовании поворота вокруг начала координат. Доказательство этого факта нетрудно получить, рассматривая разбиение W -плоскости на систему углов

$$S_{\kappa} = \{W: \operatorname{ar}g \omega_{\kappa} < \operatorname{ar}g W < \operatorname{ar}g \omega_{\kappa+1}\}, \quad \kappa=1, 2, 3$$

($\omega_4 = \omega_1$), построения в углах S_{κ} -систем двуугольников с вершинами в точках $0, \omega_{\kappa}, \omega_{\kappa+1}$ и использования теоремы о связи двух задач об экстремальном разбиении, доказанной Е.Г.Емельяновым [3] и автором [4]; примеры использования указанной теоремы для установления симметризационных результатов сходного характера приводятся, например, в [4]. Из (34) и (35) получаем неравенство

$$\frac{R(D_0^f, 0)^{\mu^2} \prod_{\kappa=1}^3 R(D_{\kappa}^f, f(\rho\omega^{\kappa-1}))}{\prod_{1 \leq \kappa < l \leq 3} |f(\rho\omega^{\kappa-1}) - f(\rho\omega^{l-1})|^{1-\frac{2}{3}\mu^2} \prod_{\kappa=1}^3 |f(\rho\omega^{\kappa-1})|^{\mu^2/3}} \ll \frac{R(\dot{D}_0^{(w)}, 0)^{\mu^2} \prod_{\kappa=1}^3 R(\dot{D}_{\kappa}^{(w)}, \omega^{\kappa-1})}{3^{\frac{3}{2}-\mu^2}}.$$

Это неравенство аналогично неравенству (6). Таким же путем получаем неравенство, аналогичное (19), и доказательство теоремы 3 завершается также как доказательство теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точная оценка модуля коэффициента α_0 в классе $\sum(\tau)$ с описанием всех экстремальных отображений была получена в монографии Дж.Дженкинаса [I] (см. теорему 7.3 в [I]) при помощи "общей теоремы о коэффициентах" (теорема 4.1 в [I]). Теоремы 2 и 3 распространяют указанный результат Дж.Дженкинаса, при этом оценку для $|\alpha_0|$ в [I] и полученные выше оценки для $|\alpha_1|$ и $|\alpha_2|$ можно единообразно записать в виде

где

$$P_k(\tau) = \frac{1}{k+1} P_0(\tau^{k+1}),$$

функция $P_1(\tau)$ определена в теореме 2. Экстремальные отображения оценок для $|\alpha_k|$, $k=0,1,2$, также находятся в простом соответствии. Отметим, что точную оценку для $|\alpha_0|$ в классе $\Sigma(\tau)$ и экстремальные функции этой оценки нетрудно получить при помощи рассуждения, по существу аналогичного доказательству теоремы 2, но более простого в техническом отношении.

3°. При доказательствах теорем 2 и 3 мы по существу имеем дело с приведенными модулями концевых областей ассоциированных квадратичных дифференциалов и областей, подобных в малом указанным областям (возможные определения этих понятий предложены в [5]). Проиллюстрируем это утверждение на примере доказательства теоремы 2 в случае $\tau \leq 8/(\pi e)$, в котором оно наиболее наглядно.

Области $B_1^{(z)}$, $B_2^{(z)}$, определенные в начале § I, являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$q(z, \rho) dz^2 = - \frac{H^2(\rho^2-1)^2}{\pi^2 \rho^2} \frac{(z^2+1)^2}{(z^2-\rho^2)^2(z^2-\rho^{-2})^2} dz^2. \quad (36)$$

Пусть $U^*(\epsilon)$ получается из U^* удалением ϵ -окрестностей точек $\pm \rho$. $B_k^{(z)}(\epsilon) = B_k^{(z)} \cap U^*(\epsilon)$. Рассмотрим отображение

$$\zeta(z) = \frac{H}{2\pi} \log q(z),$$

где $\zeta_1 = q(z)$ - функция, отображающая $B_1^{(z)}$ на круг $|\zeta_1| < R(B_1^{(z)}, \rho)$, $q(\rho) = 0$, $q'(\rho) = 1$. Функция $\zeta(z)$ удовлетворяет в области $B_1^{(z)}$ уравнению

$$d\zeta(z) = [-q(z, \rho)]^{1/2} dz,$$

где ветвь корня выбрана надлежащим образом, $\zeta(\infty) = \infty$. При отображении $z \rightarrow \zeta(z)$ области $B_1^{(z)}(\epsilon)$, разрезанной по отрезку $[\rho, \infty]$, соответствует четырехугольник $\tilde{P}(\rho, \epsilon)$ площадь которого отличается от площади прямоугольника $P(\rho, \epsilon)$ с основанием $[\frac{H}{2\pi} \log \epsilon, \frac{H}{2\pi} \log R(B_1^{(z)}, \rho)]$ и высотой H , на величину порядка $O(1)$:

$$\text{пл. } \tilde{P}(\rho, \epsilon) = \frac{H^2}{2\pi} \log \frac{R(B_1^{(\epsilon)}, \rho)}{\epsilon(1+O(\rho^{-2}))} = \text{пл. } P(\rho, \epsilon) + O(1). \quad (37)$$

Используя равенство (2) для $R(B_1^{(\epsilon)}, \rho)$, из (37) получаем:

$$\begin{aligned} \text{пл. } q U^*(\epsilon) + 2 \cdot \frac{H^2}{2\pi} \log \epsilon + O(1) = \\ = \frac{1}{4\pi} [(\rho^2 - 2) \log 2\rho - 2] + O(\rho^{-2} \log \rho). \end{aligned} \quad (38)$$

Пусть теперь $D_\kappa^{(w)}$, $\kappa=1,2$, - образы областей $B_\kappa^{(z)}$ при экстремальном отображении $w=f(z)$ теоремы I, нормированном условием $f(\rho) > 0$. Области $D_\kappa^{(w)}$ - круговые области для квадратичного дифференциала

$$Q(w, \rho) dw^2 = - \frac{H^2 f^2(\rho)}{\pi^2(1+\mu^2/(4-\mu^2))} \frac{w^2 + f^2(\rho) \mu^2 / (4-\mu^2)}{w^2(w^2 - f^2(\rho))^2} dw^2, \quad \mu = \frac{\epsilon r}{\rho}. \quad (39)$$

Пусть $D_\kappa^{(w)}(\epsilon)$ - образы областей $B_\kappa^{(z)}(\epsilon)$ при указанном отображении. Функция $Z(w)$, удовлетворяющая в области $D_1^{(w)}$ уравнению

$$dZ(w) = [-Q(w, \rho)]^{1/2} dw, \quad Z(\infty) = \infty,$$

отображает область $D_1^{(w)}(\epsilon)$ с разрезом по отрезку $[f(\rho), \infty]$ на четырехугольник $\tilde{\Pi}(\rho, \epsilon)$, площадь которого связана с площадью прямоугольника $\Pi(\rho, \epsilon)$ со сторонами длины $\frac{H}{2\pi} \log [R(D_1^{(w)}, f(\rho)) / (f(\rho)\epsilon)]$ и H , равенством

$$\text{пл. } \tilde{\Pi}(\rho, \epsilon) = \frac{H^2}{2\pi} \log \frac{R(D_1^{(w)}, f(\rho))}{f'(\rho) \epsilon (1+O(\rho^{-2}))} = \text{пл. } \Pi(\rho, \epsilon) + O(1). \quad (40)$$

Имеем (пользуемся равенствами доказательства теоремы 2)

$$\begin{aligned} \log \frac{R(D_1^{(w)}, f(\rho))}{f'(\rho)} &= \log \frac{f(\rho)}{f'(\rho)} + \log R(D_1^{(w)}, 1) = \\ &= \log 2\rho + (2\alpha_1 - \frac{1}{4} e^2 \tau^2) \rho^{-2} + O(\rho^{-2} \log \rho). \end{aligned}$$

Следовательно, из (40) получаем

$$\begin{aligned} \text{пл. } Q(D_1^{(w)}(\epsilon) + D_2^{(w)}(\epsilon)) + 2 \cdot \frac{H^2}{2\pi} \log \epsilon + O(1) = \\ = \frac{1}{4\pi} [(\rho^2 - 2) \log 2\rho + (2\alpha_1 - \frac{1}{4} e^2 \tau^2)] + O(\rho^{-2} \log \rho). \end{aligned} \quad (41)$$

Учитывая совпадение левых частей равенств (38) и (41) и используя экстремальное свойство областей, определяемых структурой траекторий ассоциированных квадратичных дифференциалов, в задачах об экстремальном разбиении, приходим к неравенству для $|\alpha_1|$ в классе $\Sigma(\tau)$, указанному в теореме 2.

Пусть теперь

$$q(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{(z^2+1)^2}{z^2} dz^2, \quad Q(w)dw^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{w^2+e^2\tau^2/4}{w^2} dw^2$$

-квадратичные дифференциалы, соответствующие дифференциалам (36) и (39) при $\rho \rightarrow \infty$. Области $B_1^{(z)}$, $B_2^{(z)}$ и $D_1^{(w)}$, $D_2^{(w)}$ - концевые области этих дифференциалов. Пусть функции $\zeta(z)$ и $Z(w)$ удовлетворяют уравнениям

$$d\zeta(z) = [-q(z)]^{1/2} dz, \quad dZ(w) = [-Q(w)]^{1/2} dw.$$

Для сопоставления с предыдущими выражениями рассмотрим на z -плоскости четырехугольник $B_1^{(z)}(\rho)$, образом которого при отображении $\zeta(z)$ является прямоугольник $P(\rho)$ с основанием $[-\frac{H}{2\pi} \log(4H/(1+\rho^2)), \frac{H}{2\pi} \log(4H/(1+\rho^2))]$ и высотой H , что соответствует замене фигурирующего выше параметра ϵ на $[4H/(1+\rho^2)]^{-1}$,

$$\text{плоч. } P(\rho) = \frac{1}{4\pi} [(\rho^2-2) \log 2\rho - 2] + O(\rho^{-2} \log \rho).$$

Нетрудно убедиться, что при отображении $Z(w)$ области $B_1^{(z)}(\rho)$ соответствует четырехугольник $\tilde{P}(\rho)$, площадь которого связана с площадью соответствующего прямоугольника $P(\rho)$ равенством

$$\begin{aligned} \text{плоч. } \tilde{P}(\rho) &= \frac{1}{4\pi} [(\rho^2-2) \log 2\rho + 2\alpha_1 - \frac{1}{4} e^2\tau^2] + O(1) = \\ &= \text{плоч. } P(\rho) + O(1). \end{aligned}$$

Величины

$$\mathcal{M}(B_1^{(z)}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} [\text{плоч. } P(\rho) - \frac{1}{4\pi} (\rho^2 \log 2\rho - 2 \log \rho)]$$

и

$$\mathcal{M}(D_1^{(z)}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} [\text{плоч. } \tilde{P}(\rho) - \frac{1}{4\pi} (\rho^2 \log 2\rho - 2 \log \rho)]$$

являются приведенными модулями концевых областей $B_1^{(z)}$ и $D_1^{(w)}$, соответствующими выбранному способу выделения окрестностей полюсов 4-го порядка дифференциалов $q(z)dz^2$ и $Q(w)dw^2$; приве-

денные модули областей $B_2^{(z)}$ и $D_2^{(w)}$ определяются точно также на основании соображений симметрии. Рассматривая приведенные модули областей D_k , $k=1, 2$, являющихся образами областей $B_k^{(z)}$ при произвольном отображении $f(z) \in \Sigma(\tau)$, и пользуясь экстремальным свойством ассоциированного квадратичного дифференциала в задаче о максимуме функционала, содержащего приведенные модули областей, подобных в малом концевым областям этого дифференциала (по этому вопросу см. [5]), приходим к оценке для $|\alpha_4|$ в классе $\Sigma(\tau)$ в данном случае. Доказательство теоремы 2 в случае $\tau > 8/(\pi e)$ и теоремы 3 может быть получено при помощи аналогичных соображений.

Отметим, что результаты в задачах об экстремальном разбиении в приведенных выше доказательствах теорем 2 и 3 позволили установить симметрию в расположении полюсов ассоциированного квадратичного дифференциала. Возможно, что благодаря полученным в последние годы новым результатам в задачах об экстремальном разбиении удастся получить продвижение в вопросе получения точных оценок начальных коэффициентов в классе Σ . Как известно, в настоящее время точные оценки для $|\alpha_4|$ и $|\alpha_5|$ во всем классе Σ неизвестны: эти оценки получены в работах Ю.Куботы [6, 7] при некоторых дополнительных ограничениях.

Литература

1. Д ж е н к и н с Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М., 1962, 265 с. (Перевод с англ.)
2. С о л ы н и н А.Ю. Некоторые экстремальные задачи в классе $\Sigma(\tau)$. - В настоящем сборнике, с. 138-153.
3. Е м е л ь я н о в Е.Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1987, т.160, с.91-98.
4. К у з ь м и н а Г.В. К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 10. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1990, т.185, с.72-95.
5. К у з ь м и н а Г.В. К вопросу об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с концевыми областями в структуре траекторий. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1988. т.168, с.98-113.
6. К у б о т а Y. On the fourth coefficient of meromorphic univalent functions. - Kōdai Math.Semin.Rep., 1974/1975, vol.26, N 3-4, p.267-288.
7. К у б о т а Y. A coefficient inequality for certain meromorphic univalent functions. - Kōdai Math.Semin.Rep., 1974/1975, vol.26, N 1, p.85-94.