Имеет место следующий критерий полноты для систем функций из F^1.

Теорема 3. *Пусть $D \subseteq F^1$. Система D является полной в F^1 тогда и только тогда, когда $K \subseteq D$.*

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 5. *Каждая функция из множества K неразложима.*

Доказательство леммы опирается на лемму 2 и вышеупомянутое равенство $g^Q = f_1^Q \circ f_2^Q$.

Лемма 6. *Пусть Φ — формула над $D_1 \cup D_2$, реализующая функцию f из множества $S_{\{1'\}}$. Тогда существует формула Φ' над K, реализующая функцию $f|_{Q^1}$.*

Лемма доказывается индукцией по сложности формулы Φ. Для доказательства базы индукции используется замена тривиальных формул вида $g(x)$ на выражения вида $g'(x)$, где $g' = g|_{Q^1}$. Индукционный переход следует из утверждения 1.

Доказательство теоремы 3. *Необходимость* следует из лемм 1 и 5.

Достаточность. Пусть f — произвольная функция из F^1. Рассмотрим функцию f^Q, принадлежащую множеству F. По теореме 2 множество $D_1 \cup D_2$ является полной системой в F. Поэтому существует формула Φ над $D_1 \cup D_2$, реализующая функцию f^Q. Из определения функции f^Q следует, что $f^Q(1') = 1'$. По лемме 6 существует формула Φ' над K, реализующая функцию $(f^Q)|_{Q^1}$. Очевидно, что $(f^Q)|_{Q^1} = f$. Таким образом, формула Φ' реализует функцию f. Поэтому $f \in [K]$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 11–01–00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН "Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения" (проект "Задачи оптимального синтеза управляющих систем").

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. 1986. **3**. 211–218.
2. *Lau D.* Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory (Springer monogrpahs in mathematics). Secaucus, N.J.: Springer-Verlag, 2006.
3. *Дудакова О.С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. М.: Физматлит, 2008. 13–104.
4. *Дудакова О.С.* О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. N 1. 31–37.
5. *Панин Д.Ю.* О порождении одноместных монотонных функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2010. N 6. 52–55.
6. *Панин Д.Ю.* О некоторых свойствах одноместных монотонных функций многозначной логики // Проблемы теоретической кибернетики: Мат-лы XVI Междунар. конф. (Н. Новгород, 20–25 июня 2011 г.). Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2011. 349–352.
7. *Панин Д.Ю.* О полноте систем монотонных одноместных функций в P_k // Дискретная математика и ее приложения: Мат-лы XI Междунар. семинара (Москва, 18–23 июня 2012 г.). М., 2012. 210–212.

Поступила в редакцию
24.10.2012

УДК 519.876.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ОТТОКА ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ОБЛАСТИ И ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

А. П. Олийнык[1], Л. Е. Штаер[2]

Рассмотрена задача моделирования течения вязкой жидкости по поверхности пластины при условии изменения давления по линейному закону вдоль продольной координаты. Осуществлена постановка граничных условий задачи. Найдено точное решение системы

[1] *Олийнык Андрей Петрович* — доктор техн. наук, проф. каф. компьютерных технологий в системах управления и автоматики ф-та автоматизации и компьютерных наук Ивано-Франков. нац. техн. ун-та нефти и газа, e-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru.

[2] *Штаер Лидия Емельяновна* — канд. техн. наук, доцент каф. компьютерных технологий в системах управления и автоматики ф-та автоматизации и компьютерных наук Ивано-Франков. нац. техн. ун-та нефти и газа, e-mail: lida.shtayer@gmail.com.

уравнений Навье–Стокса в задаче обтекания пластины с отбором жидкости при наличии продольного перепада давления. Получены расчетные формулы для определения профиля скорости, проанализированы предельные случаи с целью выявления согласованности разных моделей. Обнаружены налагаемые на давление условия, при которых система Навье–Стокса имеет точное решение.

Ключевые слова: система уравнений Навье–Стокса, точное решение, обтекание пластины, утечка жидкости.

The problem of modeling a viscous fluid flow over the surface of a plate under the condition of pressure changes according to a linear law along the longitudinal coordinate is considered. The boundary conditions for the problem are formulated. The Navier–Stokes equations are solved exactly for the problem of flow past the plate in the case of fluid outflow and a longitudinal pressure drop. Several formulas to determine the velocity profile are derived. The limiting cases are analyzed to study the consistency between various models. The corresponding pressure conditions are proposed for the case when the Navier–Stokes system has an exact solution.

Key words: Navier–Stokes system, exact solution, flow past a plate, fluid outflow.

При решении задачи определения месторасположения утечек из трубопроводов используются разные теоретические подходы, основанные на одномерных моделях [1]. В то же время существует класс задач динамики вязкой жидкости, которые допускают точные аналитические решения и могут выступать в качестве модельных задач для подтверждения достоверности широкого класса экспериментальных и теоретических методов. При этом можно рассмотреть задачи большей размерности с целью детализации поведения системы при наличии утечек.

В работе [2] исследовано точное решение задачи обтекания пластины с отбором жидкости через поверхность при условии постоянства давления ($p = \mathrm{const}$). Это условие сужает применимость модели в том случае, когда отбор жидкости осуществляется при наличии перепада давления вдоль пластины. Тогда возникает следующая задача: решить систему уравнений Навье–Стокса в двумерной постановке с целью определения компонент (u, v) вектора скорости $\mathbf{V}$ для жидкости с кинематической вязкостью ν, плотностью ρ и давлением p:

$$\begin{cases} u\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ u\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\,\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} u = 0, \quad v = -V_0 & \text{при } y = 0; \\ u \to U_\infty & \text{при } y = \infty \end{cases} \tag{2}$$

и известным решением

$$u = U_\infty\left(1 - \exp\left(-\frac{V_0 y}{\nu}\right)\right), \tag{3}$$

где V_0 — скорость оттока жидкости, U_∞ — скорость потока на достаточном расстоянии от поверхности пластины.

Считается, что, в отличие от существующей модели [2, 3], давление является функцией продольной координаты: $p = p\,(x)$, в частности [1]

$$p = kx + p_0. \tag{4}$$

Предполагается, что имеет место линейный перепад давления (для действующих трубопроводов $k < 0$).

Как и в случае $p = \mathrm{const}$, для системы (1) в такой постановке решение можно искать в форме

$$u = u\,(y)\,, \qquad v = -V_0, \qquad p = kx + p_0, \tag{5}$$

где p_0 и k — известные величины. Тогда систему (1) можно записать в виде единственного уравнения

$$-V_0 u' = -\frac{k}{\rho} + \nu u'', \tag{6}$$

поскольку при условиях (5) в системе (1) второе и третье уравнения удовлетворяются тождественно, а первое уравнение приобретает вид (6).

Интегрируя однократно (6), представляем его следующим образом:

$$u' + \frac{V_0}{\nu}\, u = \frac{k}{\nu\rho}\, y + C_1. \tag{7}$$

Это уравнение является неоднородным, для его решения используется метод вариации постоянных. Однородное уравнение $u' + V_0 u/\nu = 0$ имеет решение $u = C_2 e^{-V_0 y/\nu}$, которое представляется в виде

$$u = C_2\,(y)\, e^{-V_0 y/\nu}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$C_2'\,(y) = \frac{k}{\nu\rho}\, y e^{V_0 y/\nu} + C_1 e^{V_0 y/\nu}.$$

Интегрируя последнее уравнение, будем иметь

$$C_2\,(y) = \frac{ky}{\rho V_0}\, e^{V_0 y/\nu} - \frac{k\nu}{\rho V_0^2}\, e^{V_0 y/\nu} + C_1\, \frac{\nu}{V_0}\, e^{V_0 y/\nu} + C_2. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получим

$$u\,(y) = \frac{ky}{\rho V_0} - \frac{k\nu}{\rho V_0^2} + C_1\, \frac{\nu}{V_0} + C_2\, e^{-V_0 y/\nu}. \tag{10}$$

Заметим, что представление граничных условий в виде (2), характерное для задачи об обтекании пластины вязкой жидкостью с отбором через поверхность, вступает в противоречие с линейным слагаемым в формуле (10). Следует рассмотреть другой тип граничных условий, изменив (2). Необходимо найти коэффициенты C_1 и C_2 исходя из граничных условий типа (2). Возникает вопрос: каким образом удовлетворить второе условие (2), если в (10) есть слагаемое, линейно зависящее от y (т.е. предел при $y \to \infty$ не существует)?

Граничные условия (2) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} u = 0, \quad v = -V_0 & \text{при } y = 0; \\ u = U_\infty & \text{при } y = L, \end{cases} \tag{11}$$

где U_∞ — скорость невозмущенного потока, величина L определяется путем решения (3) задачи (1), (2) при $p = \mathrm{const}$ для разных типов жидкостей и газов [4]. Выбирается такое значение $y = L$, при котором скорость u мало отличается от U_∞ (таблица).

Для определения коэффициентов C_1 и C_2 необходимо решить систему

$$\begin{cases} C_1\, \dfrac{\nu}{V_0} + C_2 = \dfrac{k\nu}{\rho V_0^2}, \\ C_1\, \dfrac{\nu}{V_0} + C_2 e^{-V_0 L/\nu} = \dfrac{k\nu}{\rho V_0^2} - \dfrac{kL}{\rho V_0} + U_\infty, \end{cases}$$

где

$$C_1 = \frac{k}{\rho V_0} - \frac{kL - U_\infty \rho V_0}{\rho\nu\left(1 - e^{-V_0 L/\nu}\right)}, \qquad C_2 = \frac{kL - U_\infty \rho V_0}{\rho V_0\left(1 - e^{-V_0 L/\nu}\right)}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), найдем

$$u(y) = \frac{ky}{\rho V_0} - \frac{k\nu}{\rho V_0^2} + \left(\frac{k}{\rho V_0} - \frac{kL - U_\infty \rho V_0}{\rho\nu\left(1 - e^{-V_0 L/\nu}\right)}\right)\frac{\nu}{V_0} + \frac{kL - U_\infty \rho V_0}{\rho V_0\left(1 - e^{-V_0 L/\nu}\right)}\, e^{-V_0 y/\nu}. \tag{13}$$

Данный результат представляется важным с теоретической точки зрения, поскольку фактически получено точное решение системы уравнений Навье–Стокса. Определенным ограничением указанного решения является то, что вместо общих и достаточно очевидных граничных условий (2) используется форма представления граничных условий (11). Необходимо проверить следующие факты: будет ли совпадать профиль (13) с известным результатом при условии постоянства давления жидкости. Для этого следует в формуле (13) рассмотреть случай $k = 0$. Кроме того, решение задачи при условиях (5), в отличие от решения при условии $p = \text{const}$, содержит дополнительно два параметра — плотность продукта ρ, обтекающего пластину, и величину k, характеризующую линейный перепад давления вдоль продольной координаты. Эта величина определяется экспериментально.

Распределение скорости потока для разных транспортируемых продуктов при $V_0 = 0,02$ см/с и $U_\infty = 500$ см/с

y, см	Скорость потока v, см/с					
	Вода	Воздух	Бензин	Метан	Аммиак	Дизельное топливо
2,00	490,8422	132,4293	497,2274	112,4554	135,0912	294,4438
4,00	499,8323	229,7835	499,9846	199,6183	233,6831	415,4933
6,00	499,9969	301,3526	499,9999	267,1774	305,6372	465,2583
8,00	499,9999	353,9661	500,0000	319,5417	358,1506	485,7172
10,00	500,0000	392,6444	500,0000	360,1287	396,4758	494,1282
12,00	500,0000	421,0785	500,0000	391,5872	424,4462	497,5860
14,00	500,0000	441,9815	500,0000	415,9704	444,8595	499,0076
16,00	500,0000	457,3482	500,0000	434,8696	459,7575	499,5920
18,00	500,0000	468,6449	500,0000	449,5181	470,6303	499,8323
20,00	500,0000	476,9496	500,0000	460,8720	478,5655	499,9310
22,00	500,0000	483,0547	500,0000	469,6723	484,3567	499,9717

При $k = 0$ зависимость (13) приобретает вид

$$u(y) = \frac{U_\infty\left(1 - e^{-V_0 y/\nu}\right)}{1 - e^{-V_0 L/\nu}}, \tag{14}$$

что совпадает с результатами [2] при $p = \text{const}$ с точностью до множителя A: $A = 1 - e^{-V_0 L/\nu}$.

Как показано в работе [2], формула (14), в которой $A = 1$, является решением задачи о течении вязкой жидкости по пластине с постоянным отбором жидкости (3). В то же время проведенные расчеты свидетельствуют о том, что величина $1 - e^{-V_0 L/\nu}$ становится близкой к единице для реальных газов, которые транспортируются трубопроводом на расстоянии $L = 20$ см от поверхности, а для жидкостей на расстоянии $L = 1$–2 см. Поэтому предположение (11) соответствует реальной физической картине процесса.

Очевидно, задавая V_0 и ν, можно найти величину L, при которой значение A мало отличается от единицы:

$$L = \frac{\nu}{V_0} \ln\left(\frac{1}{1 - A}\right).$$

Итак, можно сделать следующие выводы. Используя зависимость (13), можно описать распределение продольной компоненты скорости при обтекании пластины с отбором жидкости или газа в случае наличия перепада давления вдоль пластины, что позволяет изучить поведение разных веществ при обтекании пластины в таких условиях. Построено новое точное решение двумерной стационарной системы уравнений Навье–Стокса. Установлено, что случай (4) является единственным, когда при условии $p \neq \text{const}$ можно найти точное решение системы (1). Если $p = p(x)$, то второе и третье уравнения (1) удовлетворяются тождественно, а первое записывается в виде

$$-V_0 \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{15}$$

Представляя (15) в форме

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + V_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{16}$$

можно вывести следующее заключение: равенство (16) имеет место только в том случае, когда

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + V_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}, \tag{17}$$

поскольку величина $\nu\,\partial^2 u/\partial y^2 + V_0\,\partial u/\partial y$ является функцией неизвестной переменной y, тогда как $(1/\rho)\partial p/\partial x$ — функция x. Очевидно, условие (17) выполняется в том случае, когда давление удовлетворяет условию (4) или $p = \mathrm{const}$. Во всех остальных случаях указанный подход к решению задачи не позволяет получить решение системы (1) с разными типами граничных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Щербаков С.Г.* Проблемы трубопроводного транспорта нефти и газа. М.: Наука, 1982.
2. *Шкадов В.Я., Запрянов З.Д.* Течение вязкой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. *Meredith F.W., Griffith A.A.* Modern Developments in Fluid Dynamics. Vol. 2. Oxford: Oxford Univ. Press, 1938.
4. *Штаер Л.Е.* Оценка влияния характеристик жидкости и параметров потока на результаты моделирования течения вязкой жидкости с оттоком через границу области // Разведка, разработка нефтяных и газовых месторождений. 2011. **40**, N 3. 58–61.

Поступила в редакцию
15.02.2012

УДК 531.396

О ЗАДАЧЕ ТЕСТИРОВАНИЯ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

А. В. Лебедев,[1], С. С. Лемак[2]

В статье рассматривается гарантированный подход к тестированию качества алгоритмов управления динамическими системами. Формирование наихудших возмущений происходит в процессе решения специальной игровой задачи. Вычисляется объективный показатель качества алгоритма управления даже в тех случаях, когда он представляет собой “черный ящик”.

Ключевые слова: робастная стабилизация, максиминное тестирование, дифференциальная игра, седловая точка.

A guaranteed approach to testing the quality of control algorithms by dynamic systems is considered. The worst perturbations are formed in the process of solving a special differential game problem. An objective quality index is calculated for the control algorithm even in the case when this algorithm is a “blackbox”.

Key words: robust stabilization, maximin testing, differential game, saddle point.

Выработка навыков управления сложными системами в экстремальных ситуациях, например различного рода механизмами, содержащими упругие элементы на орбитальной станции, управления ориентацией спутников, самолетом либо автомобилем при больших перегрузках, действующих на пилота, существенно зависит от качества тренировок оператора (пилота) на стендах, как динамических, так и компьютерных. Системы управления современными стендами-тренажерами имеют сложную многоуровневую структуру. Любая система полуавтоматической стабилизации при наличии оператора в цепи управления может рассматриваться как система с двумя уровнями управления. Для тестирования такой системы необходим динамический имитатор, система управления которым должна содержать уже три уровня [1].

Современный уровень разработок динамических тренажеров предполагает включение элементов искусственного интеллекта в систему управления тренажером, в частности предусматривается наличие системы тестирования качества ручного управления. Большое значение тестирование качества управления приобретает в ситуациях, когда непомерно велика цена ошибки, например в случаях управления космическими объектами [2].

[1] *Лебедев Антон Викторович* — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. лаб. математического обеспечения имитационных динамических систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: antohal@gmail.com.

[2] *Лемак Степан Степанович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: lemaks2004@mail.ru.