

© 2006 г.

В. С. Владимиров*

О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ p -АДИЧЕСКИХ ОТКРЫТЫХ, ЗАМКНУТЫХ И ОТКРЫТО-ЗАМКНУТЫХ СТРУН

Исследуется структура решений краевых задач для одномерной нелинейной системы псевдодифференциальных уравнений, описывающей динамику (роллинг) p -адической открытой, замкнутой и открыто-замкнутой струн для скалярного поля тахионов. Применяется метод последовательных приближений. Для открыто-замкнутой струны доказана его сходимости при нечетных p вида $p = 4n + 1$ при условии, что известно решение для замкнутой струны. При $p = 2$ обсуждаются вопросы существования и несуществования решения краевых задач и указывается на возможность появления разрывных решений.

Ключевые слова: струны, тахионы.

К 80-летию Анатолия Алексеевича Логунова

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания динамики тахионов открытой и замкнутой p -адических струн был предложен лагранжиан [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{h^2} \left[-\frac{p^4}{2(p^2 - 1)} \Psi p^{-\square/4} \Psi + \frac{p^4}{p^4 - 1} \Psi^{p^2+1} \right] + \\ & + \frac{1}{g^2} \left[-\frac{p^2}{2(p-1)} \Phi p^{-\square/2} \Phi + \frac{p^2}{p^2 - 1} \Psi^{p(p-1)/2} (\Phi^{p+1} - 1) \right], \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\Psi(t, x)$ и $\Phi(t, x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$, – тахионные поля для открытых и замкнутых струн, h и g – константы взаимодействия между открытыми и замкнутыми струнными секторами, $\square = -\partial_t^2 + \nabla_x^2$ – d -мерный даламбертиан, p – простое число, $p = 2, 3, 5, \dots$ (впредь p будем считать целым числом, большим 1).

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: vladim@mi.ras.ru

Соответствующие уравнения движения, вытекающие из (1.1) при $\lambda^2 = h^2/g^2 \neq 0$, имеют вид [2]

$$\Psi^{p^2} - p^{-\square/4}\Psi + \lambda^2 \frac{p-1}{2p} \Psi^{p(p-1)/2-1} (\Phi^{p+1} - 1) = 0, \tag{1.2a}$$

$$\Phi^p \Psi^{p(p-1)/2} - p^{-\square/2}\Phi = 0. \tag{1.2б}$$

Совершив в системе уравнений (1.2) предельный переход $\lambda^2 \rightarrow 0$, получим следующую упрощенную систему уравнений для открыто-замкнутой струны [2]:

$$\Psi^{p^2} = p^{-\square/4}\Psi, \tag{1.3a}$$

$$\Phi^p \Psi^{p(p-1)/2} = p^{-\square/2}\Phi. \tag{1.3б}$$

Система уравнений (1.3) включает уравнение (1.3a), описывающее динамику поля Ψ замкнутой струны, и уравнение (1.3б), описывающее динамику поля Φ открытой струны при известном поле Ψ .

При $\Psi = 1$ система (1.3) превращается в уравнение для открытой струны

$$\Phi^p = p^{-\square/2}\Phi. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) имеют следующие вакуумные решения:

$$\begin{aligned} (\Psi = 0, \Phi = 0) \quad \forall p; & \quad (\Psi = 1, \Phi = 1), \quad p \text{ четное}; \\ (\Psi = 1, \Phi = \pm 1), \quad p = 4n + 3; & \quad (\Psi = \pm 1, \Phi = \pm 1), \quad p = 4n + 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

При $d = 1$ система (1.3) и отдельно уравнения (1.3a) и (1.4) описывают движение (роллинг) тахионов по времени для открыто-замкнутой, замкнутой и открытой струн, соответственно. В этом случае уравнения (1.3) принимают вид

$$\Psi^{p^2} = p^{\partial_t^2/4}\Psi, \tag{1.6a}$$

$$\Phi^p \Psi^{p(p-1)/2} = p^{\partial_t^2/2}\Phi. \tag{1.6б}$$

Сделаем замену аргументов у полей:

$$\psi(t) = \Psi(t\sqrt{2 \ln p}), \quad \varphi(t) = \Phi(t\sqrt{2 \ln p}). \tag{1.7}$$

В классе измеримых функций (ψ, φ) , удовлетворяющих условию роста (5.2) (см. ниже) при $\gamma = 1$ или $\gamma = 2$ уравнения (1.6) превращаются в классическую систему нелинейных интегральных уравнений

$$\psi^{p^2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.8a}$$

$$\varphi^p(t) \psi^{p(p-1)/2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.8б}$$

Аналогичный вид принимает и уравнение (1.4) (уравнение (1.8б) при $\psi = 1$) для открытой струны:

$$\varphi^p(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

В соответствии с вакуумными решениями (1.5) ставятся следующие краевые условия: для уравнения (1.8a)

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 1; \quad (1.10)$$

для уравнений (1.8b) и (1.9)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \begin{cases} -1, & p \text{ нечетное,} \\ 0, & p \text{ четное.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Система уравнений (1.3) является нелинейной с псевдодифференциальными членами с символами $p^{-\xi^2/4}$, $p^{-\xi^2/2}$, $\xi^2 = t^2 - x_1^2 - \dots - x_{d-1}^2$. Поэтому их естественно рассматривать в некоторых алгебрах обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, преобразования Фурье которых являются аналитическими функционалами из пространства Z' [3], [4]. Физический интерес представляют только вещественные решения этих уравнений, впредь будут рассматриваться только такие решения.

Если $(\Psi(t, x), \Phi(t, x))$ есть решение системы (1.3), то все его сдвиги и все его отражения также являются ее решениями. В случае нечетного p вида $p = 4n + 1$ $(-\Psi(t, x), -\Phi(t, x))$ тоже является решением этой системы. Поэтому решение системы (1.3) не единственно (если оно существует).

Исследованию этого нового класса уравнений с бесконечным числом производных посвящены многие работы физиков и математиков с широким использованием компьютерной техники (см. [1], [2], [4]–[14] и приведенную там литературу). В струнной теории поля взаимодействие нелокально [5], что существенно отличает ее от классической локальной теории поля. Эти уравнения представляют значительный интерес не только для p -адической математической физики, но и для космологии [7], [9], [13]. По существу, эти задачи относятся к классическому математическому анализу: от p -адических чисел здесь осталось только целое число p , к тому же оно не обязано быть простым.

В этой работе в рамках предложенной модели изучается структура решений для открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн. В разделе 2 перечислены известные математические результаты для открытой струны (краевая задача (1.9), (1.11)). В разделе 3 многие результаты для открытой струны почти без изменений переносятся и на замкнутую струну (краевая задача (1.8a), (1.10)). При нечетном p применен метод последовательных приближений для четных решений с двумя нулями. При четном p доказано, что не существует непрерывных четных неубывающих при $t > 0$ нетривиальных решений (теорема 1) (см. также [8]). Поэтому в этом случае непрерывные решения должны иметь либо не меньше четырех нулей, либо быть разрывными со скачками первого рода. В разделе 4 для открыто-замкнутой струны (краевая задача (1.8), (1.10), (1.11)) при p вида $p = 4n + 1$ доказывается сходимость метода последовательных приближений для краевой задачи (1.8b), (1.11) для нечетного решения с одним нулем при условии, что известно четное решение краевой задачи (1.8a), (1.10) (теорема 2). Дано описание структуры решений. В разделе 5 приведены необходимые свойства интегрального оператора $K_\gamma = e^{1/(4\gamma)\partial_t^2}$.

2. ОТКРЫТАЯ СТРУНА

Динамика открытой струны определяется интегральным уравнением (1.9) и граничными условиями (1.11).

О решениях φ уравнения (1.9) справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если решение $\varphi(t)$ ограничено, то функции $\varphi(t) = 0, \pm 1$ при нечетном p и $\varphi(t) = 0, 1$ при четном p являются решениями; если решение $\varphi(t)$ не сводится к постоянной, то оно кусочно-аналитическое (при нечетном p непрерывное) с оценкой

$$|\varphi(t)| < 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если решение $\varphi(t) \rightarrow a$ при $t \rightarrow \infty$, $|a| < \infty$, то $a = 0$ или $a = \pm 1$ при нечетном p ; $a = 0$ или $a = 1$ при четном p . При этом $(\varphi^p)'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а если $a \neq 0$, то $\varphi'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Интегральное уравнение (1.9) эквивалентно следующей краевой задаче для уравнения теплопроводности [11]:

$$u_x = \frac{1}{4}u_{tt}, \quad 0 < x \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \varphi^p(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Обратим внимание, что переменные x и t в уравнении (2.2) поменялись местами по сравнению с классическим уравнением теплопроводности.

Решением краевой задачи (2.2), (2.3) назовем всякую измеримую функцию $u(x, t)$, ограниченную условием роста (5.2) по t при $\gamma = 1$. Функция $u(x, t)$ называется *интерполирующей* между решением φ и его степенью φ^p .

Отметим, что интерполирующая функция представляется формулой Пуассона для уравнения (2.2):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2/x} d\tau, \quad 0 < x \leq 1. \quad (2.4)$$

Для нулей интерполирующей функции $u(x, t)$ имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 (теорема о ветвлении нулей функции $u(1, t) = \varphi^p(t)$) [11], [14]. Пусть функция $u(x, t)$ имеет в точке $t = 0$ нуль четной кратности $2n$. Тогда уравнение

$$u(1 - \varepsilon, t) = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (2.5)$$

имеет ровно $2n$ различных простых вещественных нулей:

$$t_k^\pm(\varepsilon) = \pm \lambda_k \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

где λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, – положительные корни полинома Эрмита: $H_{2n}(\lambda) = 0$.

Например, при $n = 2$ имеем $\lambda^4 - 12\lambda^2 + 12 = 0$, так что

$$\lambda_1 = \sqrt{6 - 2\sqrt{6}} \approx 1.049, \quad \lambda_2 = \sqrt{6 + 2\sqrt{6}} \approx 3.301.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если решение $\varphi \in \mathfrak{L}_2^1$, то оно разлагается в ряд по полиномам Эрмита [11]

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n(t)}{2^n n!}, \quad a_n = (\varphi, H_n)_1, \quad (2.7)$$

а функция $\varphi^p(t)$ – в ряд Тейлора

$$\varphi^p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad (2.8)$$

сходящийся равномерно на каждом компакте из \mathbb{R} . Если же $\varphi \in \mathfrak{L}_2^{1/2}$, то справедливы равенства

$$(\varphi^p, H_n)_1 = (\varphi, V_n)_{1/2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.9)$$

где V_n – модифицированные полиномы Эрмита,

$$V_n(t) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Определение пространства \mathfrak{L}_2^α дано в разделе 5.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $\varphi(t)$ – решение уравнения (1.9) и $t = 0$ – нуль функции $\varphi^p(t)$ кратности $\sigma \geq 1$. Тогда справедливы соотношения [4]

$$\frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \tau^n e^{-\tau^2} d\tau = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \dots, \sigma - 1, \\ a \neq 0, & n = \sigma. \end{cases} \quad (2.11)$$

Число перемен знака у функции $\varphi(t)$ не меньше σ [11].

УТВЕРЖДЕНИЕ 7а. При нечетных p и σ решение $\varphi(t)$ меняет знак в нуле и

$$\varphi(t) = \left(\frac{a}{\sigma!}\right)^{1/p} t^{\sigma/p} [1 + O(t)] \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7б. При четном p кратность σ четна и $a > 0$, и если $\varphi(t)$ меняет знак в нуле, то

$$\varphi(t) = \left(\frac{a}{\sigma!}\right)^{1/p} \text{sign } t |t|^{\sigma/p} [1 + O(t)] \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7в. Если $\varphi(t)$ не меняет знака в нуле, то $a > 0$ и кратность σ четна, и

$$\varphi(t) = \left(\frac{a}{\sigma!}\right)^{1/p} |t|^{\sigma/p} [1 + O(t)] \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

О решениях краевой задачи (1.9), (1.11) справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Для нечетного p существует непрерывное, вещественно-аналитическое при $t \neq 0$, нечетное, возрастающее решение $\varphi(t)$ с одним простым нулем $t = 0$, при этом справедливы соотношения (2.11) и (2.12) при $\sigma = 1$ [4], [10], [12].

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Для четного p не существует непрерывных решений, которые либо неотрицательны, либо имеют одну переменную знака; если существует непрерывное решение с двумя нулями, то оно имеет ровно две переменные знака [11]. Возможны разрывные решения с разрывами первого рода.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Пусть $u(x, t)$ – интерполирующая функция между решением φ и его степенью φ^p . Тогда справедливы закон сохранения

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t) - u(x, t)] dt = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t) - \varphi^p(t)] dt, \quad x \geq 0, \quad (2.15)$$

и неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^a [u(x, t) - \varphi(t)] dt \right| < \sqrt{\frac{x}{\pi}}, \quad x > 0, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Для нечетного p справедливы включения

$$1 - \varphi^{p-1}, 1 - |u(x, \cdot)| \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}), \quad x \geq 0, \quad (2.17)$$

число нулей функции $\varphi^p(t)$ конечно, все ее нули имеют конечную кратность; число перемен знака решения $\varphi(t)$ не больше числа нулей $\varphi^p(t)$ и не меньше максимальной кратности нулей этой функции; если $\varphi^p(t)$ имеет только три нуля, то решение $\varphi(t)$ имеет три переменные знака [11].

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Для четного p справедливы включения

$$1 - \varphi^{p-1}, 1 - u(x, \cdot) \in \mathfrak{L}_1(0, \infty), \quad x \geq 0, \quad (2.18)$$

и сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(t)[1 - \varphi^{p-1}(t)] dt, \quad (2.19)$$

а если функция $\varphi(t)$ знакопостоянна при $t < c$, то справедливы включения

$$\varphi, u(x, \cdot) \in \mathfrak{L}_1(-\infty, 0), \quad x \geq 0. \quad (2.20)$$

Множество нулей функции $\varphi^p(t)$ конечно или счетно и ограничено сверху. Обозначим эти нули через $t_0, t_1, \dots, t_k \rightarrow -\infty$, а их кратности – через $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ [11]. По теореме Адамара (лемма 2 раздела 5) справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k |t_k|^{-2-\varepsilon} < \infty \quad \text{при любом } \varepsilon > 0.$$

Возникают следующие вопросы.

1. Существует ли непрерывное или разрывное решение краевой задачи (1.9), (1.11) при четном p ?
2. Всегда ли в нуле функции $\varphi^p(t)$ имеет место переменная знака у решения $\varphi(t)$?
3. Являются ли кратности нулей функции $\varphi^p(t)$ только нечетными при нечетном p и только четными вида $2(2n + 1)$ при четном p ?

3. ЗАМКНУТАЯ СТРУНА

Динамика замкнутой струны определяется интегральным уравнением (1.8a) и краевыми условиями (1.10). Уравнение (1.8a) сводится к уравнению (1.9) с заменой p на p^2 и оператора K_1 на оператор K_2 (см. раздел 5). Поэтому утверждения 1–6 раздела 2, касающиеся ограниченных решений уравнения (1.9), остаются справедливыми и для уравнения (1.8a). Что касается краевой задачи (1.8a), (1.10), то утверждения 9–11 раздела 2 остаются справедливыми, а утверждения 8 и 12 заменяются на следующие.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8'. *Не существует неотрицательных непрерывных решений, кроме $\psi(t) = 1$. При четном p возможны разрывные решения со разрывами первого рода [4].*

УТВЕРЖДЕНИЕ 12'. *Число нулей функции ψ^{p^2} конечно как при нечетном, так и при четном p , и поэтому справедливы включения*

$$1 - \psi^{p^2-1}, 1 - u(x, \cdot) \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}), \quad x \geq 0. \quad (3.1)$$

Для построения приближенного решения краевой задачи (1.8a), (1.10) воспользуемся методом последовательных приближений, разработанным в работах [10] и [4] для открытой струны при нечетных p . Будем искать четное решение $\psi(t)$ с двумя нулями $\pm t_0$. Последовательные приближения определим рекуррентной формулой:

$$\psi_{n+1}(t) = [(K_2\psi_n)(t)]^{1/p^2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \psi_0(t) = 1 - \beta e^{-\alpha t^2}. \quad (3.2)$$

Здесь оператор K_2 определен формулой (5.1) (см. ниже) при $\gamma = 2$. На четных функциях ψ он принимает вид

$$(K_2\psi)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \psi(\tau) [e^{-2(t-\tau)^2} + e^{-2(t+\tau)^2}] d\tau.$$

Вычислим второе приближение. Имеем

$$(K_2\psi_0)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty [1 - \beta e^{-\alpha\tau^2 - 2(t-\tau)^2}] d\tau = 1 - \beta \sqrt{\frac{2}{\alpha+2}} e^{-2\alpha t^2/(\alpha+2)},$$

откуда в силу (3.2) выводим

$$\psi_1(t) = \left[1 - \beta \sqrt{\frac{2}{\alpha+2}} e^{-2\alpha t^2/(\alpha+2)} \right]^{1/p^2}.$$

Наконец,

$$\psi_2(t) = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[1 - \beta \sqrt{\frac{2}{\alpha+2}} e^{-2\alpha\tau^2/(\alpha+2)} \right]^{1/p^2} [e^{-2(t-\tau)^2} + e^{-2(t+\tau)^2}] d\tau \right\}^{1/p^2}. \quad (3.3)$$

Построенная по формуле (3.3) функция $\psi_2(t)$, как и функция $\psi_1(t)$, – хорошее приближение для решения краевой задачи (1.8a), (1.10). Для того, чтобы найти нули $\pm t_0$ функции $\psi_2^{p^2}(t)$ необходимо решить уравнение

$$\int_0^\infty \left[1 - \beta \sqrt{\frac{2}{\alpha+2}} e^{-2\alpha\tau^2/(\alpha+2)} \right]^{1/p^2} [e^{-2(t-\tau)^2} + e^{-2(t+\tau)^2}] d\tau = 0. \quad (3.4)$$

ПРИМЕРЫ. Пусть $p = 3$, $\alpha = 0, 1$. Тогда:

- 1) при $\beta = 1.5$, $\psi_0(0) = -0.500$, $t_0^0 = 2.01$, $\psi_1(0) = -0.917$, $t_0^1 = 2.00$;
- 2) при $\beta = 1.8$, $\psi_0(0) = -0.800$, $t_0^0 = 2.42$, $\psi_1(0) = 0.971$, $t_0^1 = 2.43$;
- 3) при $\beta = 1.9$, $\psi_0(0) = -0.900$, $t_0^0 = 2.53$, $\psi_1(0) = -0.982$, $t_0^1 = 2.55$;
- 4) при $\beta = 2$, $\psi_0(0) = -1$, $t_0^0 = 2.63$, $\psi_1(0) = -0.995$, $t_0^1 = 2.65$.

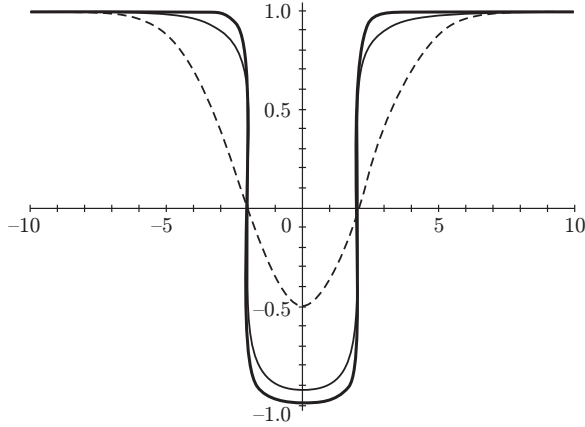


Рис. 1

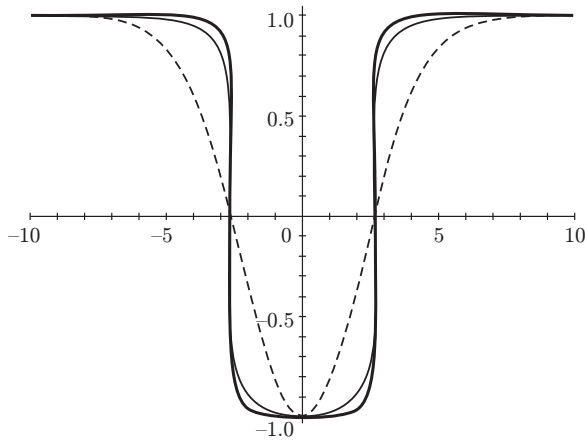


Рис. 2

На рис. 1 ($\beta = 1.5$, $t_0^n \approx 2.00$) и рис. 2 ($\beta = 2$, $t_0^n \approx 2.65$) изображены итерации $\psi_{n+1}^9 = (K_2 \psi_n)^{1/9}$: ψ_0 – штриховая линия, ψ_1 – тонкая сплошная линия, ψ_2 – жирная линия.

Как показывают численные расчеты (см. примеры и рисунки), при каждом β из интервала $1.5 \leq \beta \leq 2$ нулевое приближение $\psi_0 = 1 - e^{-0.1t^2}$ определяет решение, зависящее от β , к которому быстро сходятся итерации (и поэтому нули t_0^n , $n = 0, 1, 2$,

на рис. 1, 2 неразличимы). Таким образом, мы имеем однопараметрическое семейство приближенных решений, зависящих от параметра β в начальной функции ψ_0 . Однако доказательство сходимости последовательных приближений, продемонстрированное в работах [4], [10], [12] для открытой струны, в данном случае не проходит. Тем не менее справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Пусть p нечетное. Если существует непрерывное четное решение $\psi(t)$ с двумя нулями $t = \pm t_0$ краевой задачи (1.8a), (1.10), то эти нули простые и справедливы соотношения

$$\psi(t) = [a(t \pm t_0)]^{p-2} [1 + O(|t \pm t_0|)], \quad t \rightarrow \pm t_0, \quad (3.5)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \psi(\tau) [e^{-2(t_0-\tau)^2} + e^{-2(t_0+\tau)^2}] d\tau. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся, что нули $\pm t_0$ простые. Действительно, если нуль t_0 кратный, то необходимо, чтобы первая производная функции $\psi^{p^2}(t)$ обращалась в нуль в точке t_0 . Но $\psi(t)$, а значит, и $\psi^{p^2}(t)$ меняют знаки в точке t_0 . Стало быть, и вторая производная функции $\psi^{p^2}(t)$ равна нулю в этой точке. Это значит, что кратность нуля t_0 этой функции не меньше 3, но тогда и число перемен знака ее должно быть не меньше 3 (см. утверждение 6), что противоречит нашему предположению.

Для краевой задачи (1.8a), (1.10) при четных p справедлив такой отрицательный результат, сформулированный впервые в работе [8].

ТЕОРЕМА 1. Не существует непрерывных четных неубывающих при $t > 0$ решений ψ , кроме $\psi \equiv 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(t) \not\equiv 1$ – непрерывное четное и неубывающее при $t > 0$ решение краевой задачи (1.8a), (1.10). Тогда $\psi(0) < 0$, иначе в силу наших предположений функция $\psi(t)$ была бы неотрицательной при всех $t \in \mathbb{R}$, что противоречит утверждению 8'. Поэтому существует такая точка $t = t_0$, что $\psi(t) < 0$ при всех $0 \leq t < t_0$ и $\psi(t_0) = 0$. С другой стороны, функция $\psi'(t)$, $t \geq 0$, неотрицательна и непрерывна везде, кроме точки t_0 , в которой она имеет интегрируемую особенность (см. утверждения 7). Кроме того, $\psi'(\infty) = 0$ (см. утверждение 2). Согласно лемме 4 (см. раздел 5) справедливо равенство

$$p^2 \psi^{p^2-1}(t) \psi'(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \psi'(\tau) [e^{-2(t-\tau)^2} - e^{-2(t+\tau)^2}] d\tau \geq 0,$$

которое приводит к противоречию при $0 < t < t_0$, поскольку число $p^2 - 1$ нечетное и потому $\psi^{p^2-1}(t) < 0$ при $0 < t < t_0$.

Смысл доказанного утверждения состоит в том, что нетривиальные четные решения краевой задачи (1.8a), (1.10) должны иметь либо четное число нулей, не меньшее четырех (см. утверждение 11), либо они разрывны.

4. ОТКРЫТО-ЗАМКНУТАЯ СТРУНА

Динамика открыто-замкнутой струны определяется системой уравнений (1.8) и краевыми условиями (1.10) и (1.11). Краевая задача (1.8а), (1.10) описывает замкнутую струну, и решение этой задачи обсуждалось в разделе 3. Пусть $\psi_0(t)$ – известное четное решение этой задачи такое, что кратности σ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, нулей функции $\psi_0^{p^2}(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\sigma_k < \frac{2p^2}{p-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{4.1}$$

Подставляя это решение в уравнение (1.86), получим уравнение

$$\varphi^p(t)\psi_0^{p(p-1)/2}(t) = (K_1\varphi)(t), \tag{4.2}$$

где оператор K_1 определен формулой (5.1) при $\gamma = 1$. Для решения уравнения (4.2) введем новую неизвестную функцию

$$\chi(t) = \varphi(t)\psi_0^{(p-1)/2}(t), \quad \varphi(t) = \chi(t)\psi_0^{-(p-1)/2}(t). \tag{4.3}$$

Подставляя ее в уравнение (4.2), получим интегральное уравнение

$$\chi^p(t) = (K_1v\chi)(t), \tag{4.4}$$

где введено обозначение

$$v(t) = \psi_0^{-(p-1)/2}(t). \tag{4.5}$$

Перечислим свойства функции v : $|v(t)| > 1$, $t \in \mathbb{R}$, эта функция четная, (вещественно)-аналитическая всюду, кроме конечного числа нулей функции $\psi_0(t)$, в которых v в силу условия (4.1) имеет интегрируемую особенность (см. утверждения 7а, 7в с заменой p на p^2), удовлетворяет краевым условиям (1.10), и в силу (3.1) (поскольку $p^2 - 1 > (p - 1)/2$) справедливы включения

$$v - 1, |v| - 1 \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}). \tag{4.6}$$

Докажем оценку

$$(K_1|v|)(t) < N, \quad t \in \mathbb{R}, \quad N = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty [|v(\tau)| - 1] d\tau. \tag{4.7}$$

Действительно, в силу (4.6) имеем

$$(K_1|v|)(t) < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty [|v(\tau)| - 1] e^{-(t-\tau)^2} d\tau + 1.$$

Из оценки (4.7) следует оценка

$$|\chi(t)| < N^{1/(p-1)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

В самом деле, из уравнения (4.4) имеем

$$|\chi^p(t)| = |\chi(t)|^p = |K(v\chi)(t)| < \max_{t \in \mathbb{R}} |\chi(t)|(K|v|)(t) < N \max_{t \in \mathbb{R}} |\chi(t)|,$$

откуда и следует оценка (4.8).

Из (4.3) и (4.8) вытекает оценка для решения:

$$|\varphi(t)| < N^{1/(p-1)} |\psi_0^{-(p-1)/2}(t)|, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Предположим теперь, что p – нечетное число вида $p = 4n + 1$. В этом случае в силу (4.5) $v(t) > 1$, $t \in \mathbb{R}$. Как и для открытой струны [4], [10], ищем нечетное решение $\chi(t)$ краевой задачи (4.4), (1.11) методом последовательных приближений:

$$\chi_{n+1}(t) = [(K_1 v \chi_n)(t)]^{1/p}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \chi_0(t) = \text{sign } t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Приближения $\chi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, – нечетные, непрерывные, положительные, возрастающие при $t > 0$ функции, они обращаются в нуль при $t = 0$ и стремятся к единице при $t \rightarrow \infty$. Целые функции $\chi_n^p(t)$, $n = 1, 2, \dots$, имеют простой нуль при $t = 0$. Простота нуля вытекает из (4.10) в силу

$$\frac{d}{dt} \chi_n^p(0) = \frac{d}{dt} (K_1 v \chi_{n-1})(0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v(\tau) \chi_{n-1}(\tau) \tau e^{-\tau^2} d\tau > 0. \quad (4.11)$$

Докажем, что существуют такие положительные числа η и θ , что

$$\eta \chi_1(t) \leq \chi_2(t) \leq \theta \chi_1(t), \quad t \geq 0. \quad (4.12)$$

Введем функцию $f(t) = \chi_2^p(t) \chi_1^{-p}(t)$. Она непрерывна и положительна при $t > 0$ и обращается в единицу при $t \rightarrow \infty$; ее предел при $t \rightarrow 0$ в силу (4.11) существует и конечен (по правилу Лопиталья). Следовательно, существуют такие числа a и b , $0 < a < b$, что

$$a \leq f(t) \leq b, \quad t \geq 0,$$

откуда и вытекает неравенство (4.12) при $\eta = a^{1/p}$ и $\theta = b^{1/p}$.

Умножая неравенства (4.12) на v и применяя оператор K_1 , с учетом неотрицательности ядра оператора K_1 получим неравенства

$$\eta (K_1 v \chi_1)(t) \leq (K_1 v \chi_2)(t) \leq \theta (K_1 v \chi_1)(t),$$

откуда, пользуясь (4.10), выводим

$$\eta \chi_2^p(t) \leq \chi_3^p(t) \leq \theta \chi_2^p(t),$$

и, следовательно,

$$\eta^{1/p} \chi_2(t) \leq \chi_3(t) \leq \theta^{1/p} \chi_2(t).$$

И так далее. В результате получим следующие неравенства:

$$\eta^{p^{-n+1}} \chi_n(t) \leq \chi_{n+1}(t) \leq \theta^{p^{-n+1}} \chi_n(t), \quad n = 2, 3, \dots, \quad t \geq 0.$$

Теперь, рассуждая как в работе [4], убеждаемся, что последовательность итераций $\chi_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$, сходится равномерно на \mathbb{R} к решению $\chi(t)$ краевой задачи (4.3), (1.11) при p вида $p = 4n + 1$. Итак, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$ и ψ_0 – четное решение краевой задачи (1.8а), (1.10), причем кратности нулей суть $\sigma_k, k = 1, 2, \dots, m$, функции $\psi_0^{p^2}(t)$ удовлетворяют условию (4.1). Тогда решение краевой задачи (1.8), (1.10), (1.11) для открыто-замкнутой струны существует и задается формулой

$$(\psi = \psi_0, \varphi = \chi\psi_0^{-(p-1)/2}) \tag{4.13}$$

с оценкой

$$|\varphi(t)| \leq C\psi_0^{-(p-1)/2}(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad 1 - |\varphi| \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}), \tag{4.14}$$

где χ – нечетное решение краевой задачи (4.3), (1.11) с одним нулем, а постоянная C зависит лишь от ψ_0 (см. рис. 3).

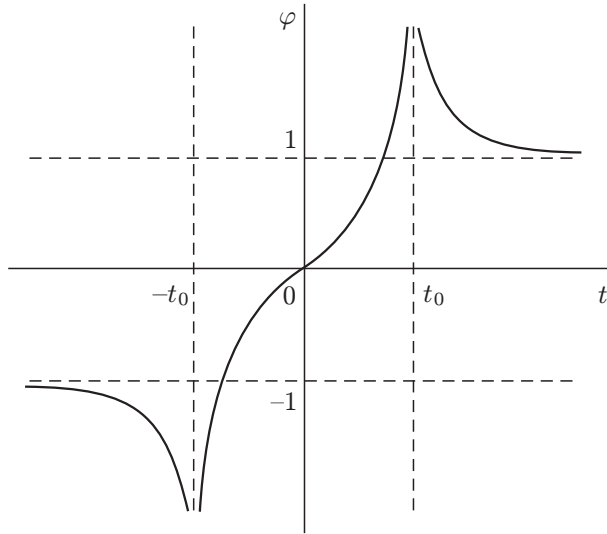


Рис. 3

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве решения ψ_0 в теореме 2 можно взять любое четное решение краевой задачи (1.8а), (1.10), описанное в разделе 3.

В случае p вида $p = 4n + 3$ доказательство сходимости изложенного метода не проходит, однако последовательные приближения (4.9), по-видимому, сходятся.

5. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА K_γ

Интегральный оператор K_γ определяется формулой

$$(K_\gamma f)(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)^2} d\tau, \quad \gamma > 0, \tag{5.1}$$

на классе \mathfrak{B}_γ локально интегрируемых функций f , удовлетворяющих условию роста

$$|f(t)| = O(e^{\varepsilon t^2}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \varepsilon < \gamma. \tag{5.2}$$

Нам понадобится шкала весовых сепарабельных гильбертовых пространств \mathfrak{L}_2^α , $\alpha > 0$, состоящих из измеримых квадратично-суммируемых функций на \mathbb{R} по мере

$$d\mu_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_\alpha(t) = 1,$$

со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t) d\mu_\alpha(t), \quad \|f\|_\alpha = \sqrt{(f, f)_\alpha}, \quad f, g \in \mathfrak{L}_2^\alpha.$$

ЛЕММА 1. Оператор K_γ отображает \mathfrak{L}_2^α в \mathfrak{L}_2^β при

$$0 < \alpha < 2\gamma, \quad \beta > \frac{2\alpha\gamma}{2\gamma - \alpha}$$

и ограничен,

$$\|Kf\|_\beta \leq \left(\frac{\beta\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma - 2\alpha^2\gamma - \beta\alpha^2} \right)^{-1/4} \|f\|_\alpha, \quad f \in L_2^\alpha. \quad (5.3)$$

ЛЕММА 2. Оператор K_γ отображает \mathfrak{L}_2^α , $0 < \alpha < 2\gamma$, в целую функцию $(Kf)(z)$, $z = t + iy$, не выше второго порядка роста с оценкой

$$|(Kf)(z)| \leq \|f\|_\alpha \sqrt{\gamma}(2\gamma - \alpha)^{-1/4} \exp\left(y^2 - \gamma t^2 + \frac{2}{2\gamma - \alpha} t^2\right). \quad (5.4)$$

ЛЕММА 3. Оператор K_γ отображает ограниченную функцию $|f(t)| < C$ в ограниченную функцию $|(K_\gamma f)(t)| < C$, и если $f(t) \rightarrow a$ при $t \rightarrow \infty$, то $(K_\gamma f)(t) \rightarrow a$ при $t \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 4. Если $f, f' \in \mathfrak{B}_\gamma$ и $f(t)$ – нечетная (четная) непрерывная возрастающая при $t \geq 0$ функция, непрерывно дифференцируемая всюду, кроме счетного числа изолированных точек, в окрестности которых $f'(t)$ интегрируема, то вещественно-аналитическая функция $(K_\gamma f)(t)$ нечетная (четная) и возрастает при $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ. При $\gamma = 1$ леммы 1, 2 доказаны в [11], а лемма 3 – в [4]. При $\gamma \neq 1$ их доказательство аналогично. Докажем возрастание функции $(K_\gamma f)(t)$ при $t \geq 0$. По предположению функция $f(t)$ не содержит сингулярной части, и поэтому производная $f'(t) \geq 0$ почти всюду, и справедлива формула интегрирования по частям для произведения с гладкой функцией. Воспользовавшись правилом дифференцирования свертки [3], получим для нечетных f при $t \geq 0$ неравенство

$$(K_\gamma f)'(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^\infty f'(\tau) [e^{-\gamma(t-\tau)^2} + e^{-\gamma(t+\tau)^2}] d\tau \geq 0.$$

Аналогичное рассуждение можно провести и для четных f .

Благодарности. Автор сердечно благодарит И. Я. Арефьеву за полезные обсуждения и за численные расчеты. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1542.2003.1).

Список литературы

- [1] L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep. (Rev. Set. Phys. Lett.)*, **233**:1 (1993), 1.
- [2] N. Moeller, M. Schnabl, *JHEP*, **01** (2004), 011.
- [3] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций*, Физматлит, М., 1958.
- [4] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 355; [math-ph/0306018](#).
- [5] М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*, т. I, II, Мир, М., 1990.
- [6] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **302** (1988), 365; В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -Адиический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994; A. Sen, *JHEP*, **04** (2002), 048; [hep-th/0203211](#); D. Ghoshal, A. Sen, *Nucl. Phys. B*, **584** (2000), 300; I. V. Volovich, *Class. Quant. Grav.*, **4** (1987), L83; J. A. Minahan, *JHEP*, **03** (2001), 028; N. Barnaby, *JHEP*, **07** (2004), 025; [hep-th/0406120](#); E. Coletti, I. Sigalov, W. Taylor, *JHEP*, **08** (2005), 104; [hep-th/0505031](#).
- [7] P. H. Frampton, Y. Okada, *Phys. Rev. D*, **37**:10 (1988), 3077.
- [8] N. Moeller, B. Zwiebach, *JHEP*, **10** (2002), 034; [hep-th/0207107](#).
- [9] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaja, A. S. Koshelev, *JHEP*, **09** (2003), 012; [hep-th/0301137](#).
- [10] Ya. I. Volovich, *J. Phys. A*, **36** (2003), 8685; [math-ph/0301028](#).
- [11] В. С. Владимиров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 55; [math-ph/0507018](#).
- [12] Л. В. Жуковская, *ТМФ*, **146**:3 (2006), 402.
- [13] G. Calcagni, *JHEP*, **05** (2006), 012; [hep-th/0512259](#).
- [14] В. С. Владимиров, *УМН*, **60**:6 (2005), 73.

Поступила в редакцию 16.06.2006