ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 27, 1987 № 9

УДК 519.632

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНОГО МЕТОДА

ВАБИЩЕВИЧ П. Н., ГАССИЕВ Р. В., ПУЛАТОВ П. А.

(Москва)

На примере модельных краевых задач для уравнения Пуассона обсуждаются вопросы вычислительной реализации различных вариантов метода фиктивных областей. Теоретически и экспериментально изучены возможности итерационного попеременно-треугольного метода А. А. Самарского.

Среди различных подходов к приближенному решению задач математической физики в сложных областях большое внимание уделяется методу фиктивных областей [1]. Он связан с рассмотрением задачи с сильнопеременными коэффициентами в регулярной области, целиком содержащей исходную. Наиболее полные результаты в настоящее время получены по обоснованию метода фиктивных областей на дифференциальном уровне, т. е. в направлении получения оценок близости приближенного и точного решений при стремлении параметра продолжения коэффициентов исходного уравнения в фиктивную область к нулю [2], [3]. Второй круг вопросов связан с исследованием соответствующих разностных схем метода фиктивных областей [4], [5].

Практическая пригодность метода фиктивных областей при приближенном решении краевых задач математической физики определяется нашими возможностями по решению соответствующих сеточных задач с сильнопеременными коэффициентами. Требуется тщательный отбор, модификация обычных итерационных методов решения сеточных задач [6]. Наиболее полно вопросы вычислительной реализации метода фиктивных областей освещены в работе [7]. А. Н. Коноваловым и А. Н. Бугровым (см., например, [7], [8]) сформулирован общий подход к построению итерационных схем метода фиктивных областей. Он заключается в замене единичного сеточного оператора стандартных итерационных методов на некоторый специальный диагональный оператор. Так, в [8] построены модификации явных итерационных методов и метода переменных направлений при реализации различных вариантов метода фиктивных областей, для которых скорость сходимости не зависит от параметра продолжения.

В настоящей статье рассмотрены возможности одного из наиболее быстрых современных итерационных методов — попеременно-треугольного метода А. А. Самарского [6] для решения эллиптических задач с малыми (большими) параметрами. Представлены результаты численного решения задачи Дирихле и смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью двух вариантов метода фиктивных областей [3]: при продолжении по старшим и по младшим коэффициентам. В последнем случае установлен строгий результат по модификации попеременно-треугольного метода, для которого скорость сходимости не зависит от параметра продолжения коэффициентов в фиктивную область. В простейшем варианте это утверждение доказано в [9]. Рассмотренная модификация попеременно-треугольного метода полностью укладывается в общую схему Коновалова — Бугрова.

Авторы выражают глубокую благодарность Е. С. Николаеву и А. Б. Кучерову за предоставленную возможность использовать подпрограммы ATMCG из комплекса прикладных программ ELLDEC (см. [12]).

§ 1. Модельные задачи и метод фиктивных областей

Применение различных вариантов метода фиктивных областей к задачам, имеющим одно и то же решение, изучалось на следующих модельных задачах. Ищется решение $u(x)$, $x=(x_1, x_2)$, в области $D=D_1\cap D_2$, где

$$D_1=\{x|x=(x_1, x_2),\ 0<x_\alpha<1,\ \alpha=1, 2\},$$

$$D_2=\{x|x=(x_1, x_2),\ (x_1+d)^2+(x_2+d)^2\leqslant(1+d)^2+d^2\},\qquad d>0.$$

Эта область представляет собой часть круга радиуса $r_0^2=(1+d)^2+d^2$, отсекаемую единичным квадратом D_1. В D рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\frac{1}{4}(r^2-r_0^2)-\frac{1}{4}\ln\frac{r^2}{r_0^2}, \tag{1}$$

где $r^2=(x_1+d)^2+(x_2+d)^2$. Легко убедиться, что $u(x)=\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}=1,\qquad x\in D. \tag{2}$$

Зададим на участках границы ∂D, где $x_1=0$, $x_2=0$, граничные условия I рода. Из (1) вытекает

$$u(x)=\varphi(x),\qquad x\in\Gamma_1=\partial D\backslash\Gamma_0, \tag{3}$$

где $\Gamma_0=\partial D\cap\partial D_2$. На Γ_0 выполнены однородные условия

$$u(x)=0,\qquad x\in\Gamma_0. \tag{4}$$

При рассмотрении краевой задачи со смешанными граничными условиями положим

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)=0,\qquad x\in\Gamma_0, \tag{5}$$

где ν — нормаль к Γ_0.

Для приближенного решения задачи (2), (3), (5) используем метод фиктивных областей. Будем рассматривать в квадрате D_1 краевую задачу для уравнения с переменными коэффициентами

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}k_\varepsilon(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha}-q_\varepsilon(x)u_\varepsilon=1,\qquad x\in D_1, \tag{6}$$

с граничными условиями

$$u_\varepsilon(x)=\varphi_\varepsilon(x),\qquad x\in\partial D_1. \tag{7}$$

Здесь

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in\Gamma_1,\\ 0, & x\in\partial D_1\backslash\Gamma_1.\end{cases}$$

Рассмотрим вначале задачу Дирихле (2)—(4). Применяя вариант метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам, используем выражения

$$\{k_\varepsilon(x), q_\varepsilon(x)\} = \begin{cases} \{1,0\}, & x\in D, \\ \{\varepsilon^{-2}, 0\}, & x\in D_1\setminus D. \end{cases} \tag{8}$$

При применении второго варианта метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам разрывен коэффициент $q_\varepsilon(x)$:

$$\{k_\varepsilon(x), q_\varepsilon(x)\} = \begin{cases} \{1,0\}, & x\in D, \\ \{1, \varepsilon^{-2}\}, & x\in D_1\setminus D. \end{cases} \tag{9}$$

Получена (см., например, [3]) следующая оценка близости приближенного решения $u_\varepsilon(x)$ (задача (6)—(8)) к точному $u(x)$ (задача (2)—(4)):

$$\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{W_2^1(D)}\leqslant c\varepsilon^2, \tag{10}$$

где постоянная c не зависит от ε. При применении второго варианта метода фиктивных областей аналогичная оценка имеет вид

$$\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{W_2^1(D)}\leqslant c\varepsilon.$$

Для приближенного решения задачи (2), (3) с условиями Неймана (5) применяется [1] метод фиктивных областей (6), (7) с продолжением по старшим коэффициентам, причем

$$\{k_\varepsilon(x), q_\varepsilon(x)\} = \begin{cases} \{1,0\}, & x\in D, \\ \{\varepsilon^{2}, 0\}, & x\in D_1\setminus D. \end{cases} \tag{11}$$

Для решения задачи (6), (7), (11) оценка близости к решению задачи (2), (3), (5) имеет (см. [10]) вид (10).

§ 2. Разностная задача и итерационные методы ее решения

Для решения задачи Дирихле (6), (7) используем разностные методы [6]. Введем в D_1 равномерную прямоугольную сетку

$$\bar\omega_h=\omega_h+\gamma_h=\{x\,|\,x=(x_{1i}, x_{2j})=(ih_1, jh_2),\ i=0, 1, \ldots, N_1,$$
$$j=0, 1, \ldots, N_2,\ N_\alpha h_\alpha=1,\ \alpha=1, 2\}.$$

От (6), (7) перейдем к разностной задаче, которую запишем в стандартных безындексных обозначениях теории разностных схем [6]:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha y_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha}-cy=1, \qquad x\in\omega_h, \tag{12}$$

$$y(x)=\varphi_\varepsilon(x), \qquad x\in\gamma_h. \tag{13}$$

Для коэффициентов разностного уравнения (12) использованы простейшие аппроксимации:

$$a_\alpha(x')=k_\varepsilon(x'),$$

$$x' = \begin{cases} (x_1-0.5h_1, x_2) & \text{при} \quad \alpha=1, \\ (x_1, x_2-0.5h_2) & \text{при} \quad \alpha=2, \end{cases}$$

$$c(x)=q_\varepsilon(x), \qquad x\in\omega_h.$$

Разностную задачу (12), (13) запишем [6] в виде операторного уравнения I рода

$$Ay=f \tag{14}$$

на множестве сеточных функций $y(x)$, $x\in\bar\omega_h$, обращающихся в нуль на γ_h. Для приближенного решения (14) удобно применять трехслойный итерационный метод сопряженных градиентов [6]. Он имеет при заданном начальном приближении y_0 канонический вид:

(15а) $$By_{k+1}=\alpha_{k+1}(B-\tau_{k+1}A)y_k+(1-\alpha_{k+1})By_k+\alpha_{k+1}\tau_{k+1}f,$$
$$k=1, 2, \ldots,$$

(15б) $$By_1=(B-\tau_1A)y_0+\tau_1f.$$

Итерационные параметры τ_{k+1}, α_{k+1} определяются по формулам

(16а) $$\tau_{k+1}=\frac{(w_k, r_k)}{(Aw_k, w_k)}, \quad k=0, 1, \ldots,$$

(16б) $$\alpha_{k+1}=\left[1-\frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}\frac{(w_k, r_k)}{(w_{k-1}, r_{k-1})}\frac{1}{\alpha_k}\right]^{-1}, \qquad \alpha_1=1, \quad k=1, 2, \ldots,$$

где $w_k=B^{-1}r_k$ — поправка, а $r_k=Ay_k-f$ — невязка на k-й итерации.

При решении задач с переменными коэффициентами хорошо зарекомендовал себя [6] модифицированный попеременно-треугольный метод. Оператор B в этом случае выбирается в виде

(17) $$B=(D+\omega_0A_1)D^{-1}(D+\omega_0A_2),$$

где

(18) $$A=A_1+A_2>0, \qquad A_1=A_2^*,$$

а $D=d(x)E$, $d(x)>0$, E — единичный сеточный оператор. В (17) имеем $\omega_0=2(\delta\Delta)^{-1/2}$, где δ, Δ определяются операторными неравенствами $\delta D\leqslant A$, $A_1D^{-1}A_2\leqslant\Delta A/4$, $\delta>0$. Конкретный выбор сеточной функции $d(x)$ в модифицированном попеременно-треугольном методе подробно описан в [6].

Отметим возможность простой модификации попеременно-треугольного метода, позволяющей эффективно реализовать вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам. В соответствии с (9), (12) представим оператор A в виде

(19) $$A=R+c(x)E,$$

где

(20) $$R=R_1+R_2>0, \qquad R_1=R_2^*.$$

Предположим теперь, что при решеини уравнения (14) с $c(x)=0$, $A=R$ попеременно-треугольным методом указан выбор $B=B_0$, для которого $\omega_0=2(\delta_0\Delta_0)^{-1/2}$, а $D=D_0=d_0(x)E$ и

(21) $$\delta_0D_0\leqslant R, \qquad R_1D_0^{-1}R_2\leqslant\Delta_0R/4.$$

В нашей задаче (6), (7), (9) величина $D_0=E$.

Теорема. *Пусть решается задача (14) с оператором A, определяемым согласно (19), с условием, что $c(x)\geqslant0$ и для R справедливы условия (20), (21). Тогда при выборе D в виде*

(22) $$D=D_0+\delta_0^{-1}c(x)E$$

для операторов A и B, определенных согласно (17), будут справедливы операторные неравенства (18) при $\delta=\delta_0$ и $\Delta=\Delta_0$ с учетом того, что

(23) $$A_\alpha=R_\alpha+c(x)E/2, \qquad \alpha=1, 2.$$

Таким образом, модифицированный попеременно-треугольный метод (15)–(17) имеет ту же асимптотическую скорость сходимости, что и для задачи с $c(x)=0$.

Утверждается, что модификация (22) позволяет решать задачи с произвольным коэффициентом $c(x)\geqslant 0$ за то же число итераций, что и в невозмущенном случае ($c(x)=0$). Поэтому такой вариант попеременно-треугольного метода особенно удобен для реализации метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам.

Для доказательства теоремы необходимо установить оценки (18). Первая из них с учетом (19), (21), (29) доказывается просто:

$$A=R+c(x)E\geqslant\delta_0D_0+c(x)E=\delta_0(D_0+\delta_0^{-1}c(x)E)=\delta_0D.$$

Принимая во внимание (20), (23), получаем

$$(A_1D^{-1}A_2y,\ y)=(D^{-1}(A_2y)^2,\ 1)=(d^{-1}(x)(R_2y+{}^1/_2c(x)y)^2,\ 1). \tag{24}$$

Применяя ε-неравенство

$$(a+b)^2\leqslant(1+\varepsilon)a^2+\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}b^2,$$

из (24) получаем

$$(A_1D^{-1}A_2y,y)\leqslant\left(\frac{1+\varepsilon}{d(x)}(R_2y)^2,1\right)+\left(\frac{(1+\varepsilon)c}{4\varepsilon d}cy^2,\ 1\right). \tag{25}$$

Пусть $c(x)>0$ (случай $c(x)\geqslant 0$ рассматривается аналогично). Выберем $\varepsilon=\varepsilon(x)$ в (25) так, чтобы

$$\frac{1+\varepsilon}{d(x)}=\frac{1}{d_0(x)}.$$

При таких ε из (25) следует

$$(A_1D^{-1}A_2y,y)\leqslant\left(\frac{1}{d_0(x)}(R_2y)^2,1\right)+\frac{\delta_0}{4}(cy^2,1). \tag{26}$$

Принимая во внимание (20), (21) и неравенство $\delta_0<\Delta_0$, из (26) окончательно получаем

$$(A_1D^{-1}A_2y,y)\leqslant\frac{\Delta_0}{4}([R+c(x)]y,y)=\frac{\Delta_0}{4}(Ay,y).$$

Таким образом, в (18) имеем $\delta=\delta_0$ и $\Delta=\Delta_0$, и теорема доказана.

§ 3. Результаты расчетов

Модифицированный попеременно-треугольный метод применялся нами для приближенного решения модельных задач (2)–(4) и (2), (3), (5) с использованием метода фиктивных областей (6), (7) в виде (8) (вариант 1), (9) (вариант 2) и (11) (вариант 3). Для выхода из итерационного процесса (15), (16) применялся критерий уменьшения невязки в ε_0^{-1} раз:

$$\|r_n\|\leqslant\varepsilon_0\|r_0\|\ \text{ либо }\ \max_{x\in\omega_h}|r_n(x)|\leqslant\varepsilon_0\max_{x\in\omega_h}|r_0(x)|.$$

Исследовалась зависимость числа итераций n для достижения одной и той же точности ε_0 от параметра продолжения ε. В табл. 1 собраны данные расчетов, проведенных при $\varepsilon_0^2=10^{-5}$ и $N=N_1=N_2=30$. Наблюдается определенная зависимость n от ε при применении вариантов 1, 3 мето-

Таблица 1

p	Варианты		
	1, $\varepsilon^{-2}=10^p$	2, $\varepsilon^{-2}=10^{2p-1}$	3, $\varepsilon^{-2}=10^{2p-1}$
1	5	6	9
2	11	5	9
3	12	5	13
4	13	5	14
5	16	5	15

Таблица 2

N	Варианты		
	1, $\varepsilon^{-2}=10^5$	2, $\varepsilon^{-2}=10^{10}$	3, $\varepsilon^{-2}=10^{10}$
10	8	4	9
20	13	5	12
30	16	5	15
40	19	5	19
50	21	6	19

да фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам. Как и следовало ожидать, в варианте 2 метода фиктивных областей зависимости n от ε нет.

Зависимость скорости сходимости итерационного процесса (15)—(17) от числа узлов N представлена в табл. 2 ($\varepsilon_0^2=10^{-5}$). Можно сделать вывод, что теоретическая зависимость $n=O(N^{1/2})$ выдерживается и в рассмотренных задачах с малыми (большими) параметрами. Аналогичный вывод можно сделать и относительно зависимости n от ε_0 ($N=30$):

ε^0	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
вариант 1, $\varepsilon^{-2}=10^5$	10	16	18
вариант 2, $\varepsilon^{-2}=10^{10}$	3	5	8
вариант 3, $\varepsilon^{-2}=10^{10}$	13	15	22

Анализ расчетов позволил сделать общий вывод, что модифицированный попеременно-треугольный метод пригоден для вычислительной реализации всех трех вариантов метода фиктивных областей. Подчеркнем, что это верно лишь для рассмотренной модельной задачи, которая характеризуется тем, что часть границы Γ_0 расчетной области D (общая граница D и фиктивной области $D_1 \backslash D$) пересекается линиями $x_\alpha=\mathrm{const}$, $\alpha=1, 2$, только один раз. Для более общих областей, как показывает теоретический анализ и проведенный вычислительный эксперимент, может наблюдаться существенная зависимость числа n итераций модифицированного попеременно-треугольного метода от параметра ε при применении вариантов 1 и 3 метода фиктивных областей. Предпочтение, как уже отмечалось ранее [11], следует отдать варианту с продолжением по младшим коэффициентам.

Литература

1. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
2. *Бугров А. Н., Коновалов А. Н., Крамаренко В. И.* Методы фиктивных областей в эллиптических задачах с краевыми условиями различных типов // Аэромеханика. М., 1976. С. 275–282.
3. *Бугров А. Н.* Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа // Числ. методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск, 1978. Ч. 2. С. 24–35.

4. *Ривкинд В. Я.* Приближенный метод решения задачи Дирихле и об оценках скорости сходимости решения разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ. 1964. № 13. С. 37—52.
5. *Бугров А. Н.* Обозначение метода фиктивных областей на конечно-разностном уровне // Материалы XIV Всес. студ. конф. Математика. Новосибирск, 1976. С. 19—25.
6. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. *Коновалов А. Н., Конюх Г. В., Цуриков Н. В.* О принципах построения итерационных процессов в методе фиктивных областей // Вариационные методы в задачах числ. анализа. Новосибирск, 1986. С. 58—79.
8. *Бугров А. Н.* Итерационные методы решения сеточных уравнений, возникающих в методе фиктивных областей // Числ. анализ. Новосибирск, 1978. С. 10—23.
9. *Вабищевич П. Н.* Численное решение задачи МГД-равновесия в кожухе произвольной формы: Препринт № 121. М.: ИПМатем. АН СССР, 1979. 19 с.
10. *Копченов В. Д.* Метод фиктивных областей для второй и третьей краевой задач // Тр. МИАН СССР. М., 1974. Т. 131. С. 119—127.
11. *Лебедев В. И.* Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 3. С. 449—465.
12. *Богданова М. С., Голубева А. А., Капорин И. Е. и др.* Комплекс программ для решения эллиптических краевых задач // Пакеты прикл. программ. Пробл. и перспективы. М.: Наука, 1982. С. 24—35.

Поступила в редакцию 20.XI.1985
Переработанный вариант 22.I.1987