К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, Значения дзета-функции Римана и бета-функции Дирихле в натуральных точках и кратные числовые ряды, *Матем. заметки*, 2022, том 112, выпуск 6, 947–952

DOI: 10.4213/mzm13534

Значения дзета-функции Римана и бета-функции Дирихле в натуральных точках и кратные числовые ряды

К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова

Ключевые слова: значения дзета-функции Римана и бета-функции Дирихле в натуральных точках, кратные числовые ряды, ряды Морделла–Торнхейма.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13534

1. Символом $\zeta(s)$, как обычно, обозначим дзета-функцию Римана и, следуя [1; гл. 23], символами $\beta(s)$ и $\lambda(s)$ – родственные с ней функции, определяемые равенствами

$$\beta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}\,, \qquad \lambda(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^s}=(1-2^{-s})\zeta(s).$$

Хорошо известно, что функции $\zeta(s)$, $\lambda(s)$ (при $\operatorname{Re}s>1$) и $\beta(s)$ (при $\operatorname{Re}s>0$), определяемые этими равенствами, аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость за возможным исключением точки $s=1$. Функцию $\beta(s)$ называют *бета-функцией Дирихле*, а числа $\beta(2)(=G)$ и $\zeta(3)$ принято называть *постоянными Каталана* и *Апери* соответственно (см., например, [2; гл. 1, п.п. 1.7 и 1.6]).

Известно также, что

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}\,B_{2m}, \qquad \beta(2m+1)=\frac{(-1)^m(\pi/2)^{2m+1}}{2(2m)!}\,E_{2m}, \qquad m=0,1,\dots, \tag{1}$$

где B_{2m} и E_{2m} – числа Бернулли и Эйлера соответственно (см. [1; гл. 23, формулы 23.2.16 и 23.2.22], а также [2; пп. 1.6 и 1.7], [3; гл. 25, формула 25.6.2] и [4; п. 5.1.2, формула 2 и п. 5.1.4, формула 2]). Из приведенных выше формул следует, что числа $\zeta(2m)$, $\lambda(2m)$ и $\beta(2m+1)$ являются трансцендентными. Однако различные известные представления для чисел $\zeta(2m+1)$, $\lambda(2m+1)$ и $\beta(2m)$ пока не позволяют судить об их арифметической природе, и об этом мало что известно. В частности, по этой причине отыскание представлений этих чисел или их определенных линейных комбинаций в виде интегралов, рядов и др. представляет особый интерес, а литература, посвященная этой тематике, весьма обширна.

Настоящая работа посвящена представлению чисел $\zeta(2m+1)$, $\lambda(2m+1)$ и $\beta(2m)$ или их некоторых линейных комбинаций (в формулировках каждый раз указывается, о каких комбинациях идет речь) в виде кратных числовых рядов. При этом особое внимание уделяется малым значениям параметра m, в частности, постоянным Апери и Каталана.

В работе намечаются пути доказательства некоторых утверждений пп. 3, 4 и 5. При этом отправным пунктом установления справедливости утверждений теорем 2 и 3 является полученная ранее авторами и сформулированная в п. 2 теорема 1.

В середине XX века в работах Торнхейма [5] и Морделла [6] было доказано, что суммы некоторых сходящихся кратных числовых рядов – позже названных рядами Морделла–Торнхейма – связаны со значениями дзета-функции Римана в целочисленных точках. В частности, в работе [6] устанавливается справедливость формулы

$$\zeta(k+1)=\frac{1}{k!}\sum_{n_1,\dots,n_k=1}^{+\infty}\frac{1}{n_1\cdots n_k(n_1+\dots+n_k)}\,, \qquad k=1,2,\dots$$

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 20-11-20261).

(см. также [3; гл. 25, формула 25.6.5]), обобщающей известную формулу Эйлера для $\zeta(3)$. Ряды типа Морделла–Торнхейма активно исследуются и в настоящее время (см. работу [7] и список цитированной литературы в ней). В п. 3 настоящей работы для некоторых линейных комбинаций чисел $\beta(2m)$ и $\lambda(2m+1)$ получены кратные числовые ряды типа рядов Морделла–Торнхейма.

В работе [8] получены представления чисел $\beta(2m+1)$, $\lambda(2m)$, $\zeta(2m)$ и $\zeta(2m+1)$ в виде кратных числовых рядов в терминах последовательностей чисел f_n^m и g_n^m, определяемых равенствами $f_n^0 = g_n^0 = 1$ при $n = 0, 1, \dots$ и

$$f_n^m = \sum_{0<l_1<l_2<\dots<l_m\leqslant n} \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{l_n^2}, \qquad g_n^m = \sum_{0<l_1<l_2<\dots<l_m\leqslant n} \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{(2l_n-1)^2}$$

при $n \in \mathbb{N}$ и $m = 1, 2, \dots, n$. В п. 4 настоящей работы для чисел $\zeta(2m)$ и $\beta(2m+1)$ в терминах тех же последовательностей получены похожие, но, по-видимому, более простые формулы, чем в [8], а в п. 5 – приведены кратные числовые ряды, содержащие f_n^m и g_n^m, уже для некоторых линейных комбинаций чисел $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1)$ и $\zeta(2m+1)$. В случае $m = 1$ некоторые из полученных нами рядов совпадают с классическими формулами для постоянных Каталана и Апери, а другие, насколько нам известно, новы (см. п. 6).

2. Используя методы, предложенные ранее авторами в работах [9]–[11], в частности, была установлена справедливость следующей теоремы (см. [11; следствие 1]).

Теорема 1. *При $m = 1, 2, \dots$ справедливы равенства*

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\,\beta(2n) = \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!}\int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m-1}}{\sin x}\,dx, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)+1}}{2^{2(m-n)+1}(2m-2n+1)!}\,\beta(2n) - \lambda(2m+1) = \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m)!}\int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m}}{\sin x}\,dx. \tag{3}$$

Позже авторы обнаружили, что справедливость теоремы 1 можно извлечь также из одного тождества Рамануджана (см. [12; entry 14, p. 261]).

Отметим, что формула (3) является формулой, связывающей значения $\zeta(2m+1)$, $\beta(2)$, $\beta(4), \dots, \beta(2m)$ и интеграл из ее правой части.

3. В интегралах, стоящих в правых частях равенств (2) и (3), сделав универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$ и применив разложения

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,x^{2n-1}, \qquad \operatorname{arctg}^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}h_n}{n}\,x^{2n},$$

где

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\,,$$

можно получить различные представления левых частей этих равенств в виде кратных числовых рядов, подобных рядам Морделла–Торнхейма. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При $m = 2, 3 \dots$ справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\,\beta(2n)$$
$$= \frac{2^{2(m-1)}}{(2m-1)!} \sum_{n_1,\dots,n_{m-1},n_m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n_1+\dots+n_{m-1}+n_m-1}h_{n_1}\cdots h_{n_{m-1}}}{n_1\cdots n_{m-1}(2n_m-1)(2(n_1+\dots+n_{m-1}+n_m)-1)}\,, \tag{4}$$

а при $m=1,2\dots$ *– равенство*

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)+1}}{2^{2(m-n)+1}(2m-2n+1)!}\,\beta(2n)-\lambda(2m+1)$$
$$=\frac{2^{2(m-1)}}{(2m)!}\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n_1+\dots+n_m-1}h_{n_1}\cdots h_{n_m}}{n_1\cdots n_m(n_1+\dots+n_m)}\,. \qquad (5)$$

Полагая $m=2$ в формуле (4) и $m=1$, $m=2$ в формуле (5), после некоторых элементарных преобразований приходим к справедливости такого следствия из теоремы 2.

Следствие 1. *Справедливы равенства*

$$\beta(4)-\frac{\pi^2}{8}\,\beta(2)=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\biggl(\sum_{k=1}^{n}\biggl(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2(n-k+1)}\biggr)\biggl(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i-1}\biggr)\biggr),$$

$$2\pi\beta(2)-\frac{7}{2}\,\zeta(3)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\biggl(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\biggr), \qquad (6)$$

$$8\pi\beta(4)-\frac{\pi^3}{3}\,\beta(2)-\frac{31}{2}\,\zeta(5)=\frac{16}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\biggl(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\biggl(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i-1}\biggr)\biggl(\sum_{j=1}^{n-k+1}\frac{1}{2j-1}\biggr)\biggr). \qquad (7)$$

Отметим, что формула (6) хорошо известна (см., например, [2; § 1, п. 1.7.2] или [13; формула 59]). Таким образом, (5) является формулой, связывающей значения $\zeta(2m+1)$, $\beta(2k)$ $(k=1,2,\dots,m)$ и ряда из ее правой части, а формулы (6) и (7) – первой и второй из этой серии.

4. Известно (см., например, [8]) и легко устанавливается, что при $|x|\leqslant\pi/2$ и $n=1,2,\dots$ справедливы разложения

$$\frac{x^{2m}}{(2m)!}=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{2^{2(n-m)}f_n^{m-1}}{n^2C_{2n}^n}\sin^{2n}x, \qquad \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}=\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n g_n^{m-1}}{2^{2n}(2n+1)}\sin^{2n+1}x, \qquad (8)$$

где последовательности f_n^m и g_n^m определены в конце п. 1.

Интегрируя эти разложения по отрезку $[0,\pi/2]$ и учитывая известные формулы

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2^{2n}}{(2n+1)C_{2n}^n}\,, \qquad \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx=\frac{\pi C_{2n}^n}{2^{2n+1}} \qquad (9)$$

(см., например, [4; п. 2.5.3, формула 1]), получим

$$\frac{\pi^{2m}}{(2m+1)!}=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{f_n^{m-1}}{n^2}\,, \qquad \frac{\pi^{2m}}{2^{2m}(2m)!}=\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{g_n^{m-1}}{(2n+1)^2}\,, \qquad (10)$$

а полагая $x=\pi/6$ в них, имеем

$$\frac{1}{(2m)!}\biggl(\frac{\pi}{3}\biggr)^{2m}=\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{f_n^{m-1}}{n^2C_{2n}^n}\,, \qquad \frac{1}{(2m-1)!}\biggl(\frac{\pi}{6}\biggr)^{2m-1}=\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n g_n^{m-1}}{2^{4n+1}(2n+1)}\,. \qquad (11)$$

Из приведенных выше формул при $m=1$ следуют хорошо известные равенства

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2C_{2n}^n}=\frac{\pi^2}{18}\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{16^n(2n+1)}=\frac{\pi}{3}\,, \qquad (12)$$

а при $m=2$ – равенства

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\biggl(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\biggr)=\frac{\pi^4}{120}\,,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\biggl(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\biggr)=\frac{\pi^4}{384}$$

и

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2C_{2n}^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^4}{1944}\,,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{16^n(2n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^3}{648}\,.$$

Отметим, что способ вывода равенств (10), приведенный здесь, был ранее применен в [14] для элементарного доказательства первого равенства из соотношений (12).

Отметим также, что, используя формулы (1) для значений $\beta(2m)$ и $\zeta(2m+1)$, равенства (10) и (11) можно переписать как их представления в виде кратных числовых рядов, а именно

$$\begin{aligned}\zeta(2m)&=(-1)^{m-1}\frac{6^{2m}B_{2m}}{2}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{f_n^{m-1}}{n^2C_{2n}^n}\\&=(-1)^{m-1}2^{4m-1}B_{2m}\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{g_n^{m-1}}{(2n+1)^2}=(-1)^{m-1}(2m+1)2^{2m-1}B_{2m}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{f_n^{m-1}}{n^2}\end{aligned}$$

и

$$\beta(2m+1)=(-1)^m\frac{(2m+1)3^{2m+1}E_{2m}}{4}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n g_n^m}{16^n(2n+1)}\,.$$

5. Учитывая разложения (8) в правых частях равенств (2) и (3) и интегрируя почленно полученные ряды с учетом равенств (9), заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При $m=1,2,\dots$ имеют место равенства*

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\,\beta(2n)=(-1)^{m-1}\frac{\pi}{4}\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{(C_{2n}^n)^2}{16^n(2n+1)}\,g_n^{m-1},\quad(13)$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)+1}}{2^{2(m-n)+1}(2m-2n+1)!}\,\beta(2n)-\lambda(2m+1)=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2(m+1)}}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{16^n}{n^3(C_{2n}^n)^2}\,f_{n-1}^{m-1}.\quad(14)$$

Предложенный нами в работах [9] и [10] метод позволяет также установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *При $m=1,2,\dots$ имеют место равенства*

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\,\beta(2n)=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2(m-1)}}\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{4^n}{(2n+1)^2C_{2n}^n}\,f_n^{m-1},\quad(15)$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)}(2m-2n)!}\,\lambda(2n+1)=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m+1}}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{4^n}{n^2C_{2n}^n}\biggl(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\biggr)f_{n-1}^{m-1}\quad(16)$$

$$=(-1)^{m-1}\frac{\pi}{4}\sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\biggl(\sum_{k=0}^{n}\frac{(C_{2k}^k)^2}{16^k}\biggr)g_n^{m-1},\quad(17)$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{(2m-2n+1)!}\,\zeta(2n+1)=(-1)^{m-1}\frac{1}{2}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\biggl(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\biggr)f_{n-1}^{m-1}.\quad(18)$$

6. В этом пункте мы перечислим следствия из теорем 3 и 4, которые получаются при малых значениях параметра m. Полагая $m = 1$ и $m = 2$ в формулах (13), (14) и (15), приходим к справедливости следующих утверждений.

Следствие 2. *Имеют место равенства*

$$\beta(2) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(C_{2n}^n)^2}{16^n(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n+1)^2 C_{2n}^n}, \tag{19}$$

$$\beta(4) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(C_{2k}^k)^2}{16^k(2k+1)} \right) = \frac{\pi^2}{8}\, \beta(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{(2n+1)^2 C_{2n}^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Следствие 3. *Имеют место равенства*

$$2\pi\beta(2) - \frac{7}{2}\,\zeta(3) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n^3 (C_{2n}^n)^2}, \tag{20}$$

$$\frac{31}{8}\,\zeta(5) - 2\pi\beta(4) = -\frac{\pi^3}{12}\,\beta(2) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{16^{n-1}}{n^3 (C_{2n}^n)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

Отметим, что формулы (19) хорошо известны и приведены в различных справочниках и статьях (см., например, [4; п. 7.4.4, формула 164] и [13; формула 61]), а равенство (20) является известным соотношением между постоянными Каталана, Апери и рядом, стоящим в его правой части (см., например, [13; формула 58]).

Полагая далее $m = 1$ и $m = 2$ в формулах (16), (17) и (18), приходим к справедливости следующих утверждений.

Следствие 4. *Имеют место равенства*

$$\lambda(3) = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2 C_{2n}^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_{2k}^k)^2}{16^k},$$

$$\lambda(5) = \frac{\pi^2}{8}\,\lambda(3) - \frac{1}{32} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2 C_{2n}^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{(C_{2i}^i)^2}{16^i} \right) \right).$$

Следствие 5. *Имеют место равенства*

$$\zeta(3) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \tag{21}$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \right) \right).$$

Формула (21) хорошо известна и приведена, например, в [4; п. 5.1.32, формула 5], а остальные формулы следствий 4 и 5, по-видимому, являются новыми.

Отметим, что, используя формулы (1), левые части равенств (13)–(18) можно переписать в несколько ином виде. При этом, например, равенство (18) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\zeta(2m-2n)\zeta(2n+1)}{2^{2m-2n-1}(2m-2n+1)B_{2(m-n)}} = (-1)^m \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) f_{n-1}^{m-1}.$$

Из этого равенства при $m = 2$, очевидно, следует тождество

$$\zeta(2)\zeta(3) - \zeta(5) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right), \tag{22}$$

которое, по-видимому, представляет самостоятельный интерес и связано с работами многих математиков, начало которых было положено в середине прошлого века. В частности, в работах [15]–[17] приведены списки формул, содержащие разложения в кратные числовые ряды выражения $\alpha\zeta(2)\zeta(3) - \beta\zeta(5)$, где α и β – целые числа. Однако равенства (22) среди них нет.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publ., New York, 1972. **[2]** S. R. Finch, *Mathematical Constants*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003. **[3]** *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge, New York, 2010. **[4]** А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*. Т. 1. *Элементарные функции*, Физматлит, М., 2002. **[5]** L. Tornheim, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 303–314. **[6]** L. J. Mordell, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 368–371. **[7]** I. A Aliev, *Tornheim-Like Series, Harmonic Numbers and Zeta Values*, 2020, arXiv: 2008.02488. **[8]** D. Leshchiner, *J. Number Theory*, **13** (1981), 355–362. **[9]** К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Докл. АН*, **482**:5 (2018), 500–503. **[10]** К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, Тр. ММО, **80**, № 2, МЦНМО, М., 2019, 157–177. **[11]** К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **494** (2020), 48–52. **[12]** B. C. Berndt, *Ramanujann's Notebooks. Part I*, Springer, New York, 1985. **[13]** D. M. Bradley, *Representations of Catalan's constant*, Unpublished Note, 2001. **[14]** R. C Boo, *Amer. Math. Monthly*, **94**:7 (1987), 662–663. **[15]** P. Flajolet, B. Salvy, *Experiment. Math.*, **7**:1 (1998), 15–35. **[16]** J. M. Borwein, *Amer. Math. Monthly*, **115**:2 (2008), 125–137. **[17]** J. M. Borwein, K. Dilcher, *Ramanujan J.*, **45**:2 (2018), 413–432.

К. А. Мирзоев
Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Поступило
07.04.2022
Принято к публикации
20.08.2022

Т. А. Сафонова
Северный (Арктический) федеральный университет
имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: t.safonova@narfu.ru