Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Е. П. Офицеров, О. И. Смирнов, Некоторые экстремальные задачи гармонического анализа и теории приближений, *Чебышевский сб.*, 2017, том 18, выпуск 4, 140–167

DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-139-166

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-139-166

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Е. П. Офицеров, О. И. Смирнов
(г. Тула)

Аннотация

Работа посвящена обзору основных результатов, полученных при решении экстремальных задач Турана и Дельсарта на торе; экстремальных задач Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана на евклидовом пространстве, полупрямой и гиперболоиде. Приводятся также результаты, полученные при решении близкой задачи об оптимальном аргументе в модуле непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве L^2 на евклидовом пространстве и полупрямой. Большая часть результатов была получена авторами обзора. В основу обзора лег доклад, сделанный В.И. Ивановым на симпозиуме «6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, Pecs, Hungary, 24-31 August 2017». Решается также задача об оптимальном аргументе на гиперболоиде. В качестве основного аппарата при решении экстремальных задач на полупрямой используются квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Для многомерных экстремальных задач осуществляется редукция к одномерным задачам с помощью усреднения допустимых функций по евклидовой сфере. Во всех случаях экстремальная функция единственна.

Ключевые слова: преобразования Фурье, Ганкеля и Якоби, экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана, квадратурные формулы Гаусса и Маркова.

Библиография: 60 названий.

SOME EXTREMAL PROBLEMS OF HARMONIC ANALYSIS AND APPROXIMATION THEORY

D. V. Gorbachev, V I. Ivanov, E. P. Ofitserov, O. I. Smirnov (Tula)

Abstract

The paper is devoted to a survey of the main results obtained in the solution of the Turán and Fejér extremal problems on the torus; the Turán, Delsarte, Bohmann, and Logan extremal problems on the Euclidean space, half-line, and hyperboloid. We also give results obtained when solving a similar problem on the optimal argument in the module of continuity in the sharp Jackson inequality in the space L^2 on the Euclidean space and half-line. Most of the results were obtained by the authors of the review. The survey is based on a talk made by V. I. Ivanov at the conference «6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, Pecs, Hungary, 24-31 August 2017». We solve also the problem of the optimal argument on the hyperboloid. As the basic apparatus for solving extremal problems on the half-line, we use the Gauss and Markov quadrature formulae on the half-line with respect to the zeros of the eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem. For multidimensional extremal problems we apply a reduction to one-dimensional problems by means of averaging of admissible functions over the Euclidean sphere. Extremal function is unique in all cases.

Keywords: Fourier, Hankel, and Jacobi transforms, Turán, Fejér, Delsarte, Bohman, and Logan extremal problems, Gauss and Markov quadrature formulae.

Bibliography: 60 titles.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00308.

1. Введение

Работа посвящена обзору основных результатов, полученных при решении экстремальных задач Турана и Дельсарта на торе, экстремальных задач Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана на евклидовом пространстве, полупрямой и гиперболоиде. Приводятся также результаты, полученные при решении близкой задачи об оптимальном аргументе в точном неравенстве Джексона в пространстве L^2. В основу обзора лег доклад, сделанный В.И. Ивановым на конференции «6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, Pecs, Hungary, 24-31 August 2017».

Напомним историю этих задач для тора и евклидова пространства.

В 1970 году П. Тураном в частной беседе со С.Б. Стечкиным была поставлена экстремальная задача о наибольшем среднем значении четной непрерывной 1-периодической функции с неотрицательными коэффициентами Фурье, фиксированным значением в нуле и носителем на отрезке $[-h, h]$, $0 \leqslant h \leqslant 1/2$. Неотрицательность коэффициентов Фурье функции эквивалентна ее положительной определенности. Постановка этой задачи возникла в связи с приложениями в аналитической теории чисел. Следуя Стечкину, эту задачу стали называть задачей Турана.

С.Б. Стечкин [1] решил задачу Турана для рациональных $h = \frac{1}{q}$. Д.В. Горбачев и А.С. Маношина [2] свели задачу Турана для рациональных h к дискретному варианту известной задачи Фейера [3] и получили решение задачи Турана для ряда рациональных последовательностей h. Для всех рациональных h задачу Турана решили В.И. Иванов и Ю.Д. Рудомазина [4, 5]. Полное решение задачи Турана было получено В.И. Ивановым [6, 7]. Оно позволило решить и задачу Дельсарта, в которой условие равенства функции нулю вне отрезка $[-h, h]$ заменяется на менее ограничительное условие ее неположительности. Экстремальная функция в задаче Турана оказалась экстремальной и в задаче Дельсарта.

Н.Н. Андреев [8] рассмотрел многомерную периодическую задачу Турана для функций с носителем в кубе и ромбе. Д.В. Горбачев [9] доказал, что периодическая задача Турана для функций с носителем в выпуклом центрально-симметричном компактном теле асимптотически эквивалентна аналогичной непериодической задаче Турана на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$.

Непериодический вариант задачи Турана появился задолго до ее постановки в периодическом случае. Еще в 1935 году К.Л. Зигель [10] решил задачу о наибольшем среднем значении непрерывной в $\mathbb{R}^d$ функции, положительно определенной или, что тоже самое с неотрицательным преобразованием Фурье, фиксированным значением в нуле и носителем в евклидовом шаре. С помощью решения этой задачи Зигель предполагал получить точную форму теоремы Минковского о точке решетки. Однако решение Зигеля было не замечено. Оно было переоткрыто Р.П. Боасом и М. Кацем [11] в одномерном случае, и Д.В. Горбачевым [9] в многомерном случае. Другое доказательство было предложено М.Н. Колонзакисом и Сц.Д. Ревешем [12].

Задача Турана в $\mathbb{R}^d$ исследовалась и для других выпуклых центрально-симметричных компактных тел. В.В. Арестов и Е.Е. Бердышева [13, 14] решили задачу Турана для политопов, замощающих $\mathbb{R}^d$ с помощью решетки, а М.Н. Колонзакис и Сц.Д. Ревеш [12, 15, 16] — для спектральных тел. Отметим, что указанные политопы являются спектральными телами, но евклидов шар спектральным не является.

Во всех известных случаях решения задачи Турана в $\mathbb{R}^d$ экстремальное значение равно объему половины тела, а экстремальной функцией с точностью до постоянного положительного множителя является свертка характеристической функции половины тела с нею самой. Тела с такими свойствами были названы телами Турана. В настоящий момент не известно примеров тел, не являющихся телами Турана.

Если задачу Турана в $\mathbb{R}^d$ переформулировать, переходя от функций к их преобразованиям Фурье, то мы придем к экстремальной задаче Фейера для неотрицательных целых функций многих переменных экспоненциального типа. Для неотрицательных тригонометрических полиномов одной переменной она была поставлена и решена Л. Фейером [3]. Для неотрицательных целых функций одной переменной экспоненциального типа она была решена Р.П. Боасом и М. Кацем [11].

Если в задаче Турана для шара условие равенства функции нулю вне шара заменить на условие неположительности, мы получим задачу Дельсарта.

До последнего времени решение задачи Дельсарта было известно только в одномерном случае, когда экстремальная функция в задаче Турана является экстремальной и в задаче Дельсарта. В 2016 году М. Вязовская [17] решила задачу Дельсарта в размерности 8, а Х. Кон, А. Кумар, С. Миллер, Д. Радченко и М. Вязовская [18] решили ее в размерности 24. Это позволило им пполучить решение проблемы упаковки евклидова пространства в размерностях 8 и 24.

Множество целых функций экспоненциального типа плотно в пространстве $L(\mathbb{R}^d)$. Была надежда получить решение Дельсарта для шара на пути ее решения для целых функций произвольного экспоненциального сферического типа. Однако это удалось сделать только при одном соотношении между радиусом шара и типом функции. Этот вариант задачи Дельсарта решили Д.В. Горбачев [19] и независимо Х. Кон [20]. Экстремальная функция была построена ранее В.И. Левенштейном [21] и В.А. Юдиным [22].

В задаче Бомана необходимо вычислить наименьший второй момент для интегрируемых неотрицательных целых функций экспоненциального сферического типа с фиксированным нулевым моментом. Эта задача имеет приложения в теории вероятностей и теории приближений. Экстремальная функция является плотностью случайной величины с наименьшим вторым моментом. Ее преобразование Фурье является генератором хорошего линейного положительного метода приближения, известного как метод Бомана–Коровкина [23, 24].

Эта задача в одномерном случае была поставлена и решена Х. Боманом [25]. В многомерном случае она решена В. Эмом, Т. Гнейтингом и Д. Ричардсом [26].

В задаче Логана необходимо вычислить радиус наименьшего шара, вне которого нетривиальная положительно определенная целая функция экспоненциального сферического типа неположительна.

Эта задача в одномерном случае была поставлена и решена Б. Логаном [27, 28]. В многомерном случае она решена Д.В. Горбачевым [29]. Экстремальная функция в одномерном случае ранее была построена Н.И. Черных [30], а в многомерном случае — В.А. Юдиным [31]. Е.Е. Бердышева [32] решила эту задачу, когда шар заменяется на куб, используя конструкцию В.А. Юдина экстремальной функции. Она доказала, что для любого выпуклого центрально-симметричного компактного тела задача Логана эквивалентна задаче об оптимальном аргументе в модуле непрерывности, определяемом этим телом, в точном неравенстве Джексона в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство неравенств Джексона в пространствах L^2 с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности является важным направлением исследований по экстремальным задачам теории приближений. Первые результаты в этом направлении были получены Н.И. Черных [30, 33] для одномерного тора $\mathbb{T}$.

Точная константа в неравенстве Джексона в L^2, зависящая от приближающего подпространства и модуля непрерывности, имеет глобальный минимум. Если фиксировать приближающее подпространство, то минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором константа Джексона становится наименьшей, называется оптимальным аргументом.

В многомерном случае оптимальный аргумент зависит как от геометрии спектра V приближающих целых функций, так и геометрии окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}^d$ в определении модуля непрерывности. Д.В. Горбачев [29] нашел оптимальный аргумент, когда оба тела являются евклидовыми шарами. Е.Е. Бердышева [32] нашла оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$, когда тело V есть l_p^d-шар, $1 \leqslant p \leqslant 2$, а U — куб. А.В. Иванов и В.И. Иванов [34] перенесли ее результаты на случай параллелепипеда, который оказался сложнее и потребовал развития конструкции В.А. Юдина экстремальной функции в задаче Логана.

Перейдем к точным постановкам экстремальных задач и формулировкам результатов, полученных при их решении. Мы ограничимся экстремальными задачами на локально компактных многообразиях, имеющими общие подходы к их решению.

2. Экстремальные задачи для преобразования Фурье на $\mathbb{R}^d$

Пусть

$$\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i(x,y)}\,dx$$

— преобразование Фурье функции f,

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dx$$

— свертка функций f и g, V — выпуклое центрально-симметричное компактное тело в $\mathbb{R}^d$, $|x|$ — евклидова длина вектора $x \in \mathbb{R}^d$, B_2^d — евклидов шар радиуса 1 с центром в нуле, χ_E — характеристическая функция множества E, $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя порядка $\alpha \geqslant -1/2$, q_α — ее наименьший положительный нуль, $j_\alpha(t) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)J_\alpha(t)/t^\alpha$ — нормированная функция Бесселя.

Задача Турана. Вычислить величину

$$T(V,\mathbb{R}^d) = \sup\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx,$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{R}^d), \quad f(0)=1, \quad \operatorname{supp} f \subset V, \quad \mathcal{F}f(y) \geqslant 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F(V,\mathbb{R}^d) = \sup g(0),$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad g(y) \geqslant 0, \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy = 1, \quad \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g \subset V.$$

По теореме Пэли–Винера множество допустимых функций в задаче Фейера совпадает с множеством неотрицательных целых функций экспоненциального типа, определяемого полярой тела V.

Допустимые функции в задаче Фейера являются преобразованиями Фурье допустимых функций в задаче Турана и обратно, поэтому

$$T(V,\mathbb{R}^d) = F(V,\mathbb{R}^d).$$

Напомним, что тело V называется замощающим, если $V+L=\mathbb{R}^d$ для некоторой решетки L и для любых различных $\lambda_1,\lambda_2 \in L$ тела $V+\lambda_1$, $V+\lambda_2$ пересекаются по множеству меры нуль. Тело V называется спектральным, если для некоторого дискретного множества $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ семейство экспонент $\{e^{i(\lambda,x)}:\ \lambda\in\Lambda\}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2(V)$.

Для простоты записи экстремальные функции будем указывать здесь и далее с точностью до положительного постоянного множителя.

Теорема 1 [10, 9, 11, 12, 14]. *Если тело V — евклидов шар или замощающее, или спектральное, то в задачах Турана и Дельсарта*

$$T(V,\mathbb{R}^d)=F(V,\mathbb{R}^d)=\Big|\frac{1}{2}V\Big|=\int_{\frac{1}{2}V}dx.$$

Единственные экстремальные функции имеют вид

$$f_V=\chi_{\frac{1}{2}V}*\chi_{\frac{1}{2}V},\quad g_V=\mathcal{F}f_V.$$

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(sB_2^d,\mathbb{R}^d)=\sup\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,dx,$$

если

$$f\in L^1(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d),\ f(0)=1,\ f(x)\leqslant 0,\ |x|\geqslant s,\ \mathcal{F}f(y)\geqslant 0.$$

Величина $D(sB_2^d,\mathbb{R}^d)$ дает хорошую оценку сверху плотности упаковки пространства $\mathbb{R}^d$. Она вычислена только при $d=1,8,24$, когда получаемые оценки плотности упаковки точны.

Модифицированная задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(rB_2^d,sB_2^d,\mathbb{R}^d)=\sup\int_{\mathbb{R}^d}g(y)\,dy,$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d),\quad g(0)=1,\quad g(y)\leqslant 0,\ |y|\geqslant s,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g\subset rB_2^d,\quad \mathcal{F}^{-1}g(y)\geqslant 0.$$

По теореме Пэли–Винера функции в модифицированной задаче Дельсарта являются целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше r, принадлежащими пространству $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Модифицированная задача Дельсарта решена только в единственном случае $s=2q_{d/2}/r$.

Теорема 2 [19, 20]. *Если $s=2q_{d/2}/r$, то в модифицированной задаче Дельсарта*

$$D(rB_2^d,sB_2^d,\mathbb{R}^d)=\Big(\int_{\frac{r}{2}B_2^d}dx\Big)^{-1}.$$

Единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(x)=\frac{j_{d/2}^2(|x|r/2)}{1-\Big(|x|r/2q_{d/2}\Big)^2}.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B(rB_2^d,\mathbb{R}^d)=\inf\int_{\mathbb{R}^d}|y|^2g(y)\,dy,$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d),\ g(y)\geqslant 0,\ \int_{\mathbb{R}^d}g(y)\,dy=1,\ \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g\subset rB_2^d.$$

По теореме Пэли–Винера функции g в задаче Бомана являются целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше r, принадлежащие пространству $L^1(\mathbb{R}^d)$. Можно считать, что $|y|^2 g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, так как значение интеграла $\int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 g(y)\,dy = +\infty$ заведомо не является наименьшим.

Теорема 3 [25, 26]. *В задаче Бомана*

$$B(rB_2^d, \mathbb{R}^d) = \Big(\frac{2q_{d/2-1}}{r}\Big)^2.$$

Единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(x) = \frac{j_{d/2-1}^2(|x|r/2)}{\Big(1 - \Big(|x|r/2q_{d/2-1}\Big)^2\Big)^2}.$$

Пусть U, V — выпуклые центрально-симметричные компактные тела в $\mathbb{R}^d$, $|\cdot|_V, |\cdot|_U$ — нормы, определяемые этими телами, и

$$\Lambda(g, V) = \sup\{|y|_V : g(y) > 0\}.$$

Задача Логана. Вычислить величину

$$L(V, \tau U, \mathbb{R}^d) = \inf \Lambda(g, V),$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad g \not\equiv 0, \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} g \subset \tau U, \quad \mathcal{F}^{-1} g(y) \geqslant 0.$$

Для величины $L(V, \tau U, \mathbb{R}^d)$ справедливо равенство

$$L(V, \tau U, \mathbb{R}^d) = \frac{L(V, U, \mathbb{R}^d)}{\tau}.$$

Теорема 4 [27, 28, 29]. *Если $V = U = B_2^d$, то в задаче Логана*

$$L(B_2^d, B_2^d, \mathbb{R}^d) = 2q_{d/2-1}.$$

Единственная экстремальная функция имеет вид

$$g(x) = \frac{j_{d/2-1}^2(|x|/2)}{1 - \Big(|x|/2q_{d/2-1}\Big)^2}.$$

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $a_j > 0$, $\Pi_a = \prod_{j=1}^d$ — параллелепипед,

$$b_a = \Big(\frac{\pi}{a_1}, \ldots, \frac{\pi}{a_d}\Big),\ |x|_p = \Big(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\Big)^{1/p},\ 1 \leqslant p < \infty,\ B_p^d = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x|_p \leqslant 1\}.$$

Теорема 5[32, 34]. *Если $1 \leqslant p \leqslant 2$, $V = B_p^d$, $U = \Pi_a$, то в задаче Логана*

$$L(B_p^d, \Pi_a, \mathbb{R}^d) = |b_a|_p.$$

Единственная экстремальная функция имеет вид

$$g(x)=\Big(|b_a|_p^p-\sum_{j=1}^{d}\Big(\frac{a_j}{\pi}\Big)^{2-p}x_j^2\Big)\prod_{j=1}^{d}\frac{\cos^2(a_jx_j/2)}{(1-(a_jx_j/\pi)^2)^2}.$$

Пусть для функции $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$E(f,\sigma V)_2=\inf\big\{\|f-g\|_2\colon g\in L^2(\mathbb{R}^d),\ \operatorname{supp}\mathcal{F}g\subset\sigma V\big\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Фурье со спектром в теле σV, где норма

$$\|f\|_2=\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

По теореме Пэли–Винера она совпадает с величиной наилучшего приближения классом целых функций экспоненциального типа, определяемого полярой σV^*, принадлежащих пространству $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Модуль непрерывности функции $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ определяется равенством

$$\omega(\tau U,f)_2=\sup_{t\in\tau U}\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+t)-f(x)|^2\,dx\bigg)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(\sigma V,\tau U,\mathbb{R}^d)_2=\sup\bigg\{\frac{E(f,\sigma V)_2}{\omega(\tau U,f)_2}\colon f\in L^2(\mathbb{R}^d)\bigg\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E(f,\sigma V)_2\leqslant D\omega(\tau U,f)_2.$$

Для константы Джексона справедливо равенство

$$D(\sigma V,\tau U,\mathbb{R}^d)_2=D(V,\tfrac{\tau}{\sigma}U,\mathbb{R}^d)_2,$$

поэтому можно считать, что $\sigma=1$.

Известно, что для всех V и U

$$D(V,\tau U,\mathbb{R}^d)_2\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величина

$$\tau(V,U,\mathbb{R}^d)=\inf\big\{\tau>0\colon D(V,\tau U,\mathbb{R}^d)_2=2^{-1/2}\big\}$$

называется оптимальным аргументом.

Теорема 6 [32]. *Для всех тел V,U,*

$$\tau(V,U,\mathbb{R}^d)=L(V,U,\mathbb{R}^d).$$

Из теорем 5, 6 вытекают точные значения оптимальных аргументов для пар (B_2^d,B_2^d) и (B_p^d,Π_a), $1\leqslant p\leqslant 2$.

3. Экстремальные задачи для преобразования Ганкеля на полупрямой $\mathbb{R}_+$

Экстремальные функции в задачах для евклидова шара являются радиальными. Усреднением функций по сфере с нормированной мерой $d\omega(x')$,

$$Sf(r)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(rx')\,d\omega(x'),$$

многомерные экстремальные задачи сводятся к аналогичным одномерным экстремальным задачам для преобразования Ганкеля на полупрямой. В случае евклидова шара к экстремальным задачам для преобразования Ганкеля сводятся и экстремальные задачи для преобразования Данкля (см. [35, 36, 47]).

Пусть $\alpha\geqslant -1/2$, $d\nu_\alpha(t)=(2^\alpha\Gamma(\alpha+1))^{-1}t^{2\alpha+1}\,dt$ — нормированная степенная мера на $\mathbb{R}_+$, и

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)=\int_0^\infty f(t)j_\alpha(\lambda t)d\nu_\alpha(t)$$

— преобразование Ганкеля. Отметим, что $\mathcal{H}_\alpha^{-1}=\mathcal{H}_\alpha$.

Сужение преобразования Фурье на радиальные функции приводит к преобразованию Ганкеля с $\alpha=d/2-1$. В этом случае

$$j_{d/2-1}(t)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i(x,\xi)}\,d\omega(\xi),\ |x|=t.$$

В пространстве $L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$ с нормой

$$\|f\|_{2,d\nu_\alpha}=\Bigl(\int_0^\infty |f(t)|\,d\nu_\alpha(t)\Bigr)^{1/2}$$

действует положительный оператор обобщенного сдвига Гегенбауэра

$$T^tf(x)=\int_0^\infty j_\alpha(t\lambda)j_\alpha(x\lambda)\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda),\quad t,\,x\in\mathbb{R}_+,$$

который может быть распространен на пространства $L_p(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, причем для любого $t\in\mathbb{R}_+$ $\|T^t\|_{p\to p}=1$. Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку [38]

$$(f*g)(x)=\int_0^\infty T^tf(x)g(t)\,d\mu(t).$$

Пусть $\chi_r(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,r]$.

Задача Турана. Вычислить величину

$$T_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\sup\int_0^\infty f(t)\,d\nu_\alpha(t),$$

если

$$f\in C_b(\mathbb{R}_+),\quad f(0)=1,\quad \operatorname{supp} f\subset[0,r],\quad \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\geqslant 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\sup g(0),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(y)\geqslant 0,$$

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=1,\quad \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,r].$$

По теореме Пэли–Винера преобразование Ганкеля множества допустимых функций в задачей Фейера совпадает с множеством четных неотрицательных целых функций экспоненциального типа не выше r.

Теорема 7. В задачах Турана и Фейера

$$T_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=F_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\int_0^{r/2} d\nu_\alpha(t),$$

единственные экстремальные функции имеют вид

$$f_r(t)=(\chi_{r/2}*\chi_{r/2})(t),\quad g_r(\lambda)=c\mathcal{H}_\alpha(f_r)(\lambda)=j_{\alpha+1}^2(\lambda r/2).$$

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D_\alpha(s,\mathbb{R}_+)=\sup\int_0^\infty f(t)\,d\nu_\alpha(t),$$

если

$$f\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\ f(0)=1,\ f(t)\leqslant 0,\ t\geqslant s,\ \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\geqslant 0.$$

Эта проблема решена только для $\alpha=-1/2,\,3,\,11$. В [17, 18] задачи Дельсарта решены именно для преобразования Ганкеля.

Модифицированная задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D_\alpha(r,s,\mathbb{R}_+)=\sup\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(0)=1,\quad g(\lambda)\leqslant 0,\ \lambda\geqslant s,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,r],\quad \mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)\geqslant 0.$$

Теорема 8. В модифицированной задаче Дельсарта

$$D_\alpha\Big(r,\frac{2q_{\alpha+1}}{r},\mathbb{R}_+\Big)=\Big(\int_0^{r/2} d\nu_\alpha(\lambda)\Big)^{-1},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{j_{\alpha+1}^2(\lambda r/2)}{1-\Big(\lambda r/2q_{\alpha+1}\Big)^2}.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\inf\int_0^\infty \lambda^2 g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(\lambda)\geqslant 0,$$
$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=1,\quad \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,r].$$

Теорема 9. В задаче Бомана

$$B_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\Bigl(\frac{2q_\alpha}{r}\Bigr)^2,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{j_\alpha^2(\lambda r/2)}{\Bigl(1-\Bigl(\lambda r/2q_\alpha\Bigr)^2\Bigr)^2}.$$

Пусть g — действительная непрерывная функция, $\Lambda(g)=\sup\{\lambda:\,g(\lambda)>0\}$.

Задача Логана. Вычислить величину

$$L_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\inf\Lambda(g),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(\lambda)\not\equiv 0,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,r],\quad \mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)\geqslant 0.$$

Теорема 10. В задаче Логана

$$L_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\frac{2q_\alpha}{r},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{j_\alpha^2(\lambda r/2)}{1-\Bigl(\lambda r/2q_\alpha\Bigr)^2}.$$

Пусть для функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$

$$E_R(f)_{2,d\nu_\alpha}=\inf\bigl\{\|f-g\|_{2,d\nu_\alpha}:g\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha),\ \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,R]\bigr\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Ганкеля.

По теореме Пэли–Винера она совпадает с величиной наилучшего приближения классом четных целых функций экспоненциального типа не выше R.

Модуль непрерывности функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$ определяется равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,d\nu_\alpha}=\sup_{0\le t\le\delta}\biggl(\int_0^\infty T^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\,d\nu_\alpha(x)\biggr)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}=\sup\biggl\{\frac{E_R(f)_{2,d\nu_\alpha}}{\omega(\delta,f)_{2,d\nu_\alpha}}:f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\biggr\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_R(f)_{2,d\nu_\alpha}\leqslant D\omega(\delta,f)_{2,d\nu_\alpha}.$$

Известно, что для всех $R,\delta>0$

$$D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величина

$$\tau(R,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}=\inf\left\{\delta>0\colon D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}=2^{-1/2}\right\}$$

называется оптимальным аргументом.

Теорема 11. *Если $\alpha\geqslant -1/2$, $R>0$, то*

$$\tau(R,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}=\frac{2q_\alpha}{R}.$$

Для любой функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$ справедливо неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности

$$E_R(f)_{2,d\nu_\alpha}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\Bigl(\frac{2q_\alpha}{R},f\Bigr)_{2,d\nu_\alpha}.$$

Отметим, что оптимальный аргумент совпадает с экстремальным значением в задаче Логана.

Теоремы 7-11 были доказаны Д.В. Горбачевым [29, 9, 19, 40, 39]. Он же доказал и единственность экстремальных функций.

Универсальный метод решения этих задач состоит в применении квадратурных формул Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям функции Бесселя (С. Фрапье и П. Оливер [41], Г.Р. Грозев и К.И. Рахман [42], Р.Б. Ганем и С. Фрапье [43]).

Пусть E_1^r — множество четных целых функций экспоненциального типа не выше r, для которых сужения на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$, $0<q_{\alpha,1}<\ldots<q_{\alpha,n}<\ldots$ — положительные нули функции Бесселя $J_\alpha(t)$.

Теорема 12. *Для любой функции $g\in E_1^r$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=\sum_{k=1}^\infty\gamma_{\alpha,k}(r)g(2q_{\alpha,k}/r). \qquad (1)$$

Ряд в (1) сходится абсолютно.

Теорема 13. *Для любой функции $g\in E_1^r$ справедлива квадратурная формула Маркова с положительными весами*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=\gamma'_{\alpha,0}(r)g(0)+\sum_{k=1}^\infty\gamma'_{\alpha,k}(r)g(2q_{\alpha+1,k}/r). \qquad (2)$$

Ряд в (2) сходится абсолютно.

Покажем как применяется формула Гаусса, например, при решении задачи Бомана. Так как допустимая функция $g\in E_1^r$, $\lambda^2g\in E_1^r$, $g(\lambda)\geqslant 0$, и $\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=1$, то применяя квадратурную формулу Гаусса два раза, получим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\lambda^2g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)&=\sum_{k=1}^\infty\gamma_{\alpha,k}(r)(2q_{\alpha,k}/r)^2g(2q_{\alpha,k}/\tau)\\&\geqslant(2q_{\alpha,1}/r)^2\sum_{k=1}^\infty\gamma_{\alpha,k}(r)g(2q_{\alpha,k}/r)\\&=(2q_{\alpha,1}/r)^2\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=(2q_{\alpha,1}/r)^2.\end{aligned}$$

Экстремальная функция $g_r(\lambda)$ в точках $2q_{\alpha,k}/r$, $k\geqslant 2$ должна иметь двойные нули. Этим требованиям удовлетворяет функция

$$g_\tau(\lambda)=\frac{j_\alpha^2(\lambda r/2)}{\Bigl(1-\bigl(\lambda r/2q_\alpha\bigr)^2\Bigr)^2}.$$

Недавно [44] мы доказали квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля при некоторых естественных предположениях на весовую функцию w. В частности, они выполняются для степенного веса $w(t)=t^{2\alpha+1}$, $\alpha\geqslant -1/2$ и гиперболического веса

$$w(t)=(\sinh t)^{2\alpha+1}(\cosh t)^{2\beta+1},\quad \alpha\geqslant\beta\geqslant -1/2.$$

Пусть $\lambda_0\geqslant 0$, и задача Штурма–Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(w(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,u_\lambda(t)\Bigr)+\bigl(\lambda^2+\lambda_0^2\bigr)w(t)u_\lambda(t)=0,$$
$$u_\lambda(0)=1,\quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\,(0)=0,\quad \lambda,t\in\mathbb{R}_+,$$

имеет спектральную меру $d\sigma(\lambda)=s(\lambda)\,d\lambda$, $s(\lambda)\asymp\lambda^{2\alpha+1}$, $\lambda\to+\infty$, и собственную функцию $\varphi(t,\lambda)$, которая является четной аналитической функцией t на $\mathbb{R}$ и четной целой функцией экспоненциального типа $|t|$ по λ. Пусть $0<\lambda_1(t)<\ldots<\lambda_k(t)<\ldots$ — положительные нули $\varphi(t,\lambda)$ по λ.

Пусть $\varphi_0(t)=\varphi(t,0)$, $u(t,\lambda)=\varphi(t,\lambda)/\varphi_0(t)$, $0<\lambda_1'(t)<\ldots<\lambda_k'(t)<\ldots$ — положительные нули $\frac{\partial}{\partial t}u(t,\lambda)$ по λ, E_1^r — множество четных целых функций экспоненциального типа не выше r, сужения которых на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)$.

Теорема 14. *Для любой функции $g\in E_1^r$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\sum_{k=1}^\infty\gamma_k(r)g(\lambda_k(r/2)).\tag{3}$$

Ряд в (3) сходится абсолютно.

Теорема 15. *Для любой функции $g\in E_1^r$ справедлива квадратурная формула Маркова с положительными весами*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\gamma_0'(r)g(0)+\sum_{k=1}^\infty\gamma_k'(r)g(\lambda_k'(r/2)).\tag{4}$$

Ряд в (4) сходится абсолютно.

4. Экстремальные задачи для преобразования Якоби на $\mathbb{R}_+$

В случае гиперболического веса

$$w(t)=w^{(\alpha,\beta)}(t)=2^{2\rho}(\sinh t)^{2\alpha+1}(\cosh t)^{2\beta+1},\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad \alpha\geqslant\beta\geqslant -1/2,$$

где $\rho = \alpha + \beta + 1 = \lambda_0$, собственная функция $\varphi_\lambda(t)$ есть функция Якоби, записываемая с помощью гипергеометрической функции,

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\Big(\frac{\rho + i\lambda}{2}, \frac{\rho - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -(\sinh t)^2\Big).$$

Пусть мера $d\mu(t) = d\mu^{(\alpha,\beta)}(t) = w(t)\,dt$,

$$s(\lambda) = (2\pi)^{-1}\bigg|\frac{2^{\rho - i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2)\Gamma((\rho+i\lambda)/2-\beta)}\bigg|^{-2},$$

$d\sigma(\lambda) = d\sigma^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = s(\lambda)\,d\lambda$ — спектральная мера.

Прямое и обратное преобразования Якоби определяются равенствами

$$\mathcal{J}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\varphi_\lambda(t)\,d\mu(t), \quad \mathcal{J}^{-1}g(t) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi_\lambda(t)\,d\sigma(\lambda).$$

В пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ с нормой

$$\|f\|_{2,d\mu} = \Big(\int_0^\infty |f(t)|\,d\mu(t)\Big)^{1/2}$$

действует положительный оператор обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_\lambda(t)\varphi_\lambda(x)\mathcal{J}f(\lambda)\,d\sigma(\lambda), \quad t,\, x \in \mathbb{R}_+,$$

который может быть распространен на $L_p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем для любого $t \in \mathbb{R}_+$ $\|T^t\|_{p\to p} = 1$. Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку [45, 46]

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} T^t f(x) g(t)\,d\mu(t).$$

Задача Турана. Вычислить величину

$$T_{\alpha,\beta}(r, \mathbb{R}_+) = \sup \mathcal{J}f(0) = \sup \int_0^\infty f(t)\varphi_0(t)\,d\mu(t),$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad f(0) = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset [0, r], \quad \mathcal{J}f(\lambda) \geqslant 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F_{\alpha,\beta}(r, \mathbb{R}_+) = \sup g(0),$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \geqslant 0,$$
$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = 1, \quad \operatorname{supp} \mathcal{J}^{-1}g \subset [0, r].$$

По теореме Пэли–Винера для преобразования Якоби множество допустимых функций в задаче Фейера совпадает с множеством четных неотрицательных целых функций экспоненциального типа не выше r.

Пусть $u_\lambda(t) = \varphi_\lambda(t)/\varphi_0(t)$, $\Delta(t) = \varphi_0^2(t)w(t)$.

Теорема 16[47]. В задачах Турана и Фейера

$$T_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+) = F_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+) = \int_0^{r/2} \Delta(t)\,dt,$$

единственные экстремальные функции имеют вид

$$f_r(t) = (\varphi_0\chi_{r/2} * \varphi_0\chi_{r/2})(t), \quad g_r(\lambda) = c\mathcal{J} f_r(\lambda) = \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(r/2)}{\lambda^2}\right)^2.$$

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D_{\alpha,\beta}(s,\mathbb{R}_+) = \sup \mathcal{J} f(0) = \sup \int_0^\infty f(t)\varphi_0(t)\,d\mu(t),$$

если

$$f \in L_1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C_b(\mathbb{R}_+),\ f(0) = 1,\ f(t) \leqslant 0,\ t \geqslant s,\ \mathcal{J} f(\lambda) \geqslant 0.$$

Решение этой задачи известно только для $\alpha = \beta = -1/2$, когда преобразование Якоби совпадает с косинус-преобразованием Фурье.

Модифицированная задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D_{\alpha,\beta}(r,s,\mathbb{R}_+) = \sup \mathcal{J}^{-1} g(0) = \sup \int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(0) = 1, \quad g(\lambda) \leqslant 0,\ \lambda \geqslant s,$$
$$\operatorname{supp} \mathcal{J}^{-1} g \subset [0,r], \quad \mathcal{J}^{-1} g(\lambda) \geqslant 0.$$

Модифицированная задача Дельсарта решена только в одном случае $s = \lambda_1'(r/2)$, где $\lambda_1'(t)$ есть наименьший положительный нуль функции $\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(t)$ по λ.

Теорема 17 [48]. В модифицированной задаче Дельсарта

$$D_{\alpha,\beta}(r,\lambda_1'(r/2),\mathbb{R}_+) = \Bigl(\int_0^{r/2} \Delta(t)\,dt\Bigr)^{-1},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{\Bigl(\lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(r/2)\Bigr)^2}{1 - \Bigl(\lambda/\lambda_1'(r/2)\Bigr)^2}.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+) = \inf \int_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \geqslant 0,$$
$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = 1, \quad \operatorname{supp} \mathcal{J}^{-1} g \subset [0,r].$$

Пусть $\lambda_1(t)$ — наименьший положительный нуль функции Якоби $\varphi_\lambda(t)$ по λ.

Теорема 18 [49]. В задаче Бомана

$$B_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=\lambda_1^2(\tau/2)+\rho^2,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{\Big(1-\big(\lambda/\lambda_1(r/2)\big)^2\Big)^2}.$$

Напомним, что $\Lambda(g)=\sup\{\lambda>0:\ g(\lambda)>0\}$.

Задача Логана. Вычислить величину

$$L_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=\inf\Lambda(g),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(\lambda)\not\equiv 0,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{J}^{-1}g\subset[0,r],\quad \mathcal{J}^{-1}g(\lambda)\geqslant 0.$$

Теорема 19 [50]. В задаче Логана

$$L_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=\lambda_1(r/2),$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{1-\big(\lambda/\lambda_1(r/2)\big)^2}.$$

Пусть для функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)$

$$E_R(f)_{2,d\mu}=\inf\big\{\|f-g\|_{2,d\mu}\colon g\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu),\ \operatorname{supp}\mathcal{J}g\subset[0,R]\big\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Якоби.

По теореме Пэли–Винера она совпадает с величиной наилучшего приближения классом четных целых функций экспоненциального типа не выше R.

Модуль непрерывности функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)$ определяется равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,d\mu}=\sup_{0\le t\le\delta}\bigg(\int_0^\infty T^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\,d\mu(x)\bigg)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}=\sup\bigg\{\frac{E_R(f)_{2,d\mu}}{\omega(\delta,f)_{2,d\mu}}\colon f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)\bigg\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_R(f)_{2,d\mu}\leqslant D\omega(\delta,f)_{2,d\mu}.$$

Известно, что для всех $R,\delta>0$

$$D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величина
$$\tau(R, \mathbb{R}_+)_{2,d\mu} = \inf\left\{\delta > 0\colon D(R, \delta, \mathbb{R}_+)_{2,d\mu} = 2^{-1/2}\right\}$$
называется оптимальным аргументом.

Теорема 20 [51]. *Если $R > 0$, то*
$$\tau(R, \mathbb{R}_+)_{2,d\mu} = \lambda_1(R/2).$$
Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ справедливо неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности
$$E_R(f)_{2,d\mu} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\big(\lambda_1(R/2), f\big)_{2,d\mu}.$$

Отметим, что оптимальный аргумент совпадает с экстремальным значением в задаче Логана. Многомерный вариант теоремы 20 доказан в [52].

Рассматриваемые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля решены в [53, 54, 47].

5. Экстремальные задачи для преобразования Фурье на гиперболоиде $\mathbb{H}^d$

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$,
$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$$
— евклидова сфера, $\mathbb{R}^{d,1}$ — $(d + 1)$-мерное действительное псевдоеклидово пространство с билинейной формой $[x, y] = -x_1y_1 - \ldots - x_dy_d + x_{d+1}y_{d+1}$,
$$\mathbb{H}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d,1} : [x, x] = 1,\, x_{d+1} > 0\}$$
— верхняя пола двуполостного гиперболоида,
$$d(x, y) = \operatorname{arc}\cosh[x, y] = \ln([x, y] + \sqrt{[x, y]^2 - 1})$$
— расстояние между $x, y \in \mathbb{H}^d$. Пара $\big(\mathbb{H}^d, d(\cdot,\cdot)\big)$ известна как пространство Лобачевского.

Пусть $x_0 = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{H}^d$, $d(x, x_0) = d(x)$, $r > 0$, $B_\tau = \{x \in \mathbb{H}^d : d(x) \leq r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x_0 в пространстве Лобачевского.

Пусть $t > 0$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, $x = (\sinh t\,\eta, \cosh t) \in \mathbb{H}^d$,
$$d\mu(t) = d\mu^{((d-2)/2,-1/2)}(t) = 2^{d-1}\sinh^{d-1} t\,dt = w(t)\,dt,$$
$$d\omega(\eta) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\,d\eta, \quad d\nu(x) = d\mu(t)d\omega(\eta)$$
— лебеговы меры на $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{S}^{d-1}$ и $\mathbb{H}^d$, соответственно. Отметим, что $d\omega$ — вероятностная мера на сфере, инвариантная относительно группы вращений $SO(d)$, а мера $d\nu$ — инвариантна относительно группы гиперболических вращений $SO_0(d, 1)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, $y = (\lambda, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1} = \Omega^d$,
$$d\sigma(\lambda) = d\sigma^{((d-2)/2,-1/2)}(\lambda) = 2^{3-2d}\Gamma^{-2}\Big(\frac{d}{2}\Big)\left|\frac{\Gamma\big(\frac{d-1}{2} + i\lambda\big)}{\Gamma(i\lambda)}\right|^2 d\lambda,$$

$$d\tau(y) = d\sigma(\lambda)d\omega(\xi)$$

— лебеговы меры на $\mathbb{R}_+$ и Ω^d.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{H}^d} f(x)[x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}-i\lambda}\,d\nu(x), \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) = \int_{\Omega^d} g(y)[x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}+i\lambda}\,d\tau(y),$$

где $\xi' = (\xi, 1)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Для преобразований Фурье справедлива L^2-теория, в частности, равенства Планшереля. Но так как их ядра являются неограниченными, для них не выполняется L^1-теория.

Пусть

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{((d-2)/2,-1/2)}(t) = F\Big(\frac{(d-1)/2+i\lambda}{2}, \frac{(d-1)/2-i\lambda}{2}; \frac{d}{2}; -(\sinh t)^2\Big)$$

— функция Якоби. Она получается усреднением по сфере ядер преобразований Фурье

$$\varphi_\lambda(t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}\pm i\lambda}\,d\omega(\xi),$$

где $x = (\sinh t\,\eta, \cosh t)$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\xi' = (\xi, 1)$.

Два оператора усреднения по сфере

$$Pf(t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x)\,d\omega(\eta),\ \ x = (\sinh t\,\eta, \cosh t) \in \mathbb{H}^d,$$

$$Qg(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(y)\,d\omega(\xi),\ \ y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d$$

дают нам сферические функции на $\mathbb{H}^d$ и Ω^d. Они используются как для постановки, так и для решения экстремальных задач.

Если $f(x) = f_0(d(x)) = f_0(t)$ и $g(y) = g_0(\lambda)$ — сферические функции, то

$$\mathcal{F}f(y) = \mathcal{J}f_0(\lambda), \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{J}^{-1}g_0(t).$$

Пусть далее $\Delta(t) = \varphi_0^2(t)w(t)$, $u_\lambda(t) = \varphi_\lambda(t)/\varphi_0(t)$.

Основные факты из гармонического анализа на гиперболоиде можно найти в [56].

Задача Турана. Вычислить величину

$$T(r, \mathbb{H}^d) = \sup Q(\mathcal{F}f)(0),$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{H}^d), \quad f(x_0) = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad \mathcal{F}f(y) \geqslant 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F(r, \mathbb{H}^d) = \sup Qg(0),$$

если

$$g \in L^1(\Omega^d, d\tau) \cap C_b(\Omega^d), \quad g(y) \geqslant 0,$$

$$\int_{\Omega^d} g(y)\,d\tau(y) = 1, \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1}g \subset B_r.$$

Допустимые функции в задаче Фейера являются четными целыми функциями экспоненциального типа не выше r по λ.

Теорема 21. В задачах Турана и Фейера

$$T(r,\mathbb{H}^d)=F(r,\mathbb{H}^d)=\int_0^{r/2}\Delta(t)\,dt,$$

единственные экстремальные функции имеют вид

$$f_r(x)=(\varphi_0\chi_{r/2}*\varphi_0\chi_{r/2})(t),\quad g_r(y)=c\mathcal{F}f_r(y)=\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(r/2)}{\lambda^2}\right)^2,$$

где

$$x=(\sinh t\,\eta,\cosh t)\in\mathbb{H}^d,\quad y=(\lambda,\xi)\in\Omega^d.$$

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(s,\mathbb{H}^d)=\sup Q(\mathcal{F}f)(0),$$

если

$$f\in L^1(\mathbb{H}^d,d\nu)\cap C_b(\mathbb{H}^d),\ f(x_0)=1,\ f(x)\leqslant 0,\ d(x)\geqslant s,\ \mathcal{F}f(y)\geqslant 0.$$

Эта задача является полностью открытой.

Модифицированная задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(r,s,\mathbb{H}^d)=\sup\int_{\Omega^d}g(y)\,d\tau(y),$$

если

$$g\in L^1(\Omega^d,d\tau)\cap C_b(\Omega^d),\quad Qg(0)=1,\quad g(\lambda,\xi)\leqslant 0,\ \lambda\geqslant s,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g\subset B_r,\quad \mathcal{F}^{-1}g(x)\geqslant 0.$$

Напомним, что $\lambda_1(t)$, $\lambda_1'(t)$ — наименьшие положительные нули функций $\varphi_\lambda(t)$ и $\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(t)$ по λ.

Теорема 22. В модифицированной задаче Дельсарта

$$D(r,\lambda_1'(r/2),\mathbb{H}^d)=\left(\int_0^{r/2}\Delta(t)\,dt\right)^{-1},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(y)=\frac{\left(\lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(r/2)\right)^2}{1-\left(\lambda/\lambda_1'(r/2)\right)^2},\quad y=(\lambda,\xi)\in\Omega^d.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B(r,\mathbb{H}^d)=\inf\int_{\Omega^d}\bigl(\lambda^2+\rho^2\bigr)g(y)\,d\tau(y),\quad y=(\lambda,\xi),$$

если

$$g\in L^1(\Omega^d,d\tau)\cap C_b(\Omega^d),\quad g(y)\geqslant 0,$$

$$\int_{\Omega^d} g(y)\,d\tau(y) = 1, \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} g \subset B_r.$$

Теорема 23. В задаче Бомана

$$B(r, \mathbb{H}^d) = \lambda_1^2(r/2) + \rho^2,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(y) = \frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{\Big(1 - \big(\lambda/\lambda_1(r/2)\big)^2\Big)^2}, \quad y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d.$$

Пусть $y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d$, $g(y)$ действительная непрерывная функция на Ω^d,

$$\Lambda(g) = \sup\{\lambda > 0 :\ g(\lambda, \xi) > 0,\ \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

Задача Логана. Вычислить величину

$$L(r, \mathbb{H}^d) = \inf \Lambda(g),$$

если

$$g \in L^1(\Omega^d, d\tau) \cap C_b(\Omega^d), \quad g(y) \not\equiv 0,$$
$$\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} g \subset B_r \quad \mathcal{F}^{-1} g(x) \geqslant 0.$$

Теорема 24. В задаче Логана

$$L(r, \mathbb{H}^d) = \lambda_1(r/2),$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(y) = \frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{1 - \big(\lambda/\lambda_1(r/2)\big)^2}, \quad y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d.$$

Теоремы 22-24 доказаны в [50] в предположении, что допустимые функции g в задачах Фейера, Бомана, Логана и модифицированной задаче Дельсарта являются преобразованиями Фурье $g = \mathcal{F} f$ функций $f \in C_b(\mathbb{H}^d)$, $\operatorname{supp} f \subset B_r$. В [50] экстремальные задачи для преобразования Фурье на гиперболоиде решаются путем их редукции с помощью усреднения допустимых функций по сфере к аналогичным задачам для преобразования Якоби на полупрямой.

Покажем, что, если функция

$$g \in L^1(\Omega^d, d\tau) \cap C_b(\Omega^d), \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} g \subset B_r,$$

то для функции $f(x) = \mathcal{F}^{-1} g(x)$ выполнены условия

$$f \in C_b(\mathbb{H}^d), \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad g(y) = \mathcal{F} f(y).$$

Поэтому теоремы 22-24 вытекают из соответствующих утверждений в [50].

Так как

$$|g(y)[x, \xi']^{-\frac{d-1}{2} + i\lambda}| = |g(y)||[x, \xi']^{-\frac{d-1}{2}}| \leqslant |g(y)| e^{\frac{d-1}{2} t},$$

то интеграл

$$\int_{\Omega^d} g(y)[x, \xi']^{-\frac{d-1}{2} + i\lambda}\, d\tau(y)$$

сходится равномерно на любом шаре B_R и функция $f(x)$ непрерывна, но вообще-говоря не ограничена на $\mathbb{H}^d$. Но в нашем случае по условию $\operatorname{supp} f \subset B_r$, поэтому $f \in C_b(\mathbb{H}^d)$. Аналогично интеграл

$$\int_{B_r} f(x)[x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}-i\lambda}\,d\nu(x)$$

сходится равномерно на Ω^d и функция $\mathcal{F}f(y) \in C(\Omega^d)$. Поточечное равенство $g(y) = \mathcal{F}f(y)$ вытекает из того, что оно справедливо в $L^2(\Omega^d)$ и функции в обеих частях равенства непрерывны.

Пусть для функции $f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$

$$E_R(f)_{2,d\nu} = \inf\bigl\{\|f-g\|_{2,d\nu}\colon g \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu),\ \operatorname{supp}\mathcal{F}g \subset [0,R]\times\mathbb{S}^{d-1}\bigr\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Фурье.

В качестве оператора обобщенного сдвига на $\mathbb{H}^d$ для определения модуля непрерывности будем использовать оператор среднего значения [57]

$$s^t f(x) = \int_{S_t(x)} f(y)\,d\omega_{t,x}(y),$$

где $S_t(x) = \{z \in \mathbb{H}^d\colon d(x,z) = t\}$ — сфера в $\mathbb{H}^d$ с центром в точке x и радиусом $t > 0$, $d\omega_{t,x}$ — вероятностная лебегова мера на $S_t(x)$. Для оператора обобщенного сдвига $\mathcal{F}(s^t f)(y) = \varphi_\lambda(t)\mathcal{F}f(y)$, где $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^d$.

Модуль непрерывности функции $f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$ определим равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,d\nu} = \sup_{0\le t\le\delta}\biggl(\int_{\mathbb{H}^d} s^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\,d\nu(x)\biggr)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = \sup\biggl\{\frac{E_R(f)_{2,d\nu}}{\omega(\delta,f)_{2,d\nu}}\colon f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)\biggr\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_R(f)_{2,d\nu} \leqslant D\omega(\delta,f)_{2,d\nu}.$$

Для всех $R,\delta > 0$ [40, 58],

$$D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величина

$$\tau(R,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = \inf\bigl\{\delta > 0\colon D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = 2^{-1/2}\bigr\}$$

называется оптимальным аргументом.

Теорема 25. *Для всех* $R,\delta > 0$

$$D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}.$$

Доказательство. Неравенство $D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu} \leqslant D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu}$ вытекает из того, что сферические функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ составляют подпространство в $L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$.

Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$ рассмотрим функцию

$$\psi(\lambda) = \Bigl(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\mathcal{F}f(y)|^2\,d\omega(\xi)\Bigr)^{1/2}, \quad y = (\lambda,\xi) \in \Omega^d.$$

Для нее в силу равенства Планшереля

$$\|\psi\|_{2,d\sigma}^2=\int_0^\infty |\psi(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda)=\|\mathcal{F}f\|_{2,d\tau}^2=\|f\|_{2,d\tau}^2<\infty,$$

поэтому функция

$$\varphi(t)=\mathcal{J}^{-1}\psi(t)\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)$$

и $\mathcal{J}\varphi(\lambda)=\psi(\lambda)$. Имеем

$$\begin{aligned}E_R^2(f)_{2,d\nu}&=\int_R^\infty\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\mathcal{F}f(\lambda,\xi)|^2\,d\omega(\xi)d\sigma(\lambda)\\&=\int_R^\infty|\mathcal{J}\varphi(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda)=E_R^2(\varphi)_{2,d\mu}.\end{aligned}$$

Так как [40, 58]

$$\int_{\mathbb{H}^d}s^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\,d\nu(x)=2\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{d-1}}(1-\varphi_\lambda(t))|\mathcal{F}f(\lambda,\xi)|^2\,d\omega(\xi)d\sigma(\lambda)$$

$$=2\int_0^\infty(1-\varphi_\lambda(t))|\mathcal{J}\varphi(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda)=\int_0^\infty T^t|\varphi(\cdot)-\varphi(r)|^2(r)\,d\mu(r),$$

то

$$\omega(\delta,f)_{2,d\nu}=\omega(\delta,\varphi)_{2,d\mu}.$$

Итак,

$$\frac{E_R(f)_{2,d\nu}}{\omega(\delta,f)_{2,d\nu}}=\frac{E_R(\varphi)_{2,d\mu}}{\omega(\delta,\varphi)_{2,d\mu}},$$

и $D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu}\leqslant D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}$. Теорема 25 доказана.

Из теорем 20, 25 вытекает следующая теорема.

Теорема 26. *Если $R>0$, то*

$$\tau(R,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu}=\lambda_1(R/2).$$

Для любой функции $f\in L^2(\mathbb{H}^d,d\nu)$ справедливо неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности

$$E_R(f)_{2,d\nu}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\big(\lambda_1(R/2),f\big)_{2,d\nu}. \tag{5}$$

Неравенство Джексона (5) было доказано В.Ю. Поповым [59] для $d=2$ и Д.В. Горбачевым и М.С. Пискоржем [58] для $d\geqslant 3$. С неточной константой оно было получено И.В. Петровой [60].

6. Заключение

Исследование представленных в работе экстремальных задач гармонического анализа и теории приближений носит достаточно законченный характер. Только экстремальная задача Дельсарта остается недостаточно исследованной. Хотя с точки зрения приложений она является наиболее важной. Основная ее трудность состоит в том, что экстремальная функция в ней не является целой функцией экспоненциального типа, а множество допустимых функций устроено очень сложно. Для ее решения на полупрямой нужны новые идеи, новые квадратурные формулы по нулям экстремальных функций. В двух случаях они были предложены М. Вязовской.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stechkin S. B. An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. Vol. 23, № 3-4. P. 289–291.
2. Горбачев Д. В., Маношина А. С. Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С. 688–700.
3. Fejér L. Über trigonometrische Polynome // J. Angew. Math. 1915. Vol. 146. P. 53–82.
4. Иванов В. И., Рудомазина Ю. Д. О задаче Турана для периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье и малым носителем // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 941–945.
5. Иванов В. И., Горбачев Д. В., Рудомазина Ю. Д. Некоторые экстремальные задачи для периодических функций с условиями на их значения и коэффициенты Фурье // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 92–111.
6. Иванов В. И. О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 6. С. 934–939.
7. Ivanov V. I., Ivanov A. V. Turán problems for periodic positive definite functions // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2010. Vol. 33. P. 219–237.
8. Андреев Н. Н. Экстремальная задача для периодических функций с малым носителем // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 1. С. 29–32.
9. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 346–352.
10. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65, № 1. P. 307–323.
11. Boas R. P., Kac M. Inequalities for Fourier Transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 189–206.
12. Kolountzakis M. N., Révész Sz. Gy. On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.
13. Арестов В. В., Бердышева Е. Е. Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в шестиугольнике // Тр. ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 21–29.
14. Arestov V. V., Berdysheva E. E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, № 3. P. 381–388.
15. Kolountzakis M. N., Révész Sz. Gy. Turán's extremal problem for positive definite functions on groups // J. London Math. Soc. 2006. Vol. 74. P. 475–496.
16. Révész Sz. Gy. Turán's extremal problem on locally compact abelian groups // Anal. Math. 2011. Vol. 37, № 1. P. 15–50.
17. Viazovska M. S. The sphere packing problem in dimension 8 // Annals of Math. 2017. Vol. 185, № 3. P. 991–1015.
18. Cohn H., Kumar A., Miller S. D., Radchenko D., Viazovska M. The sphere packing problem in dimension 24 // Annals of Math. 2017. Vol. 185, № 3. P. 1017–1033.

19. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа, связанная с оценкой Левенштейна плотности упаковки $\mathbb{R}^n$ шарами // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6, № 1. С. 71–78.

20. Cohn H. New upper bounds on sphere packings II // Geom. Topol. 2002. Vol. 6. P. 329–353.

21. Левенштейн В. И. Границы для упаковок в n-мерном Евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 20. С. 417–421.

22. Юдин В. А. Упаковки шаров в евклидовом пространстве и экстремальные задачи для триигонометрических полиномов // Дискрет. матем. 1989. Т. 1, № 2. С. 155–158.

23. Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона // Матем. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 439–444.

24. Иванов В. И. Приближение функций в пространствах L_p // Матем. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 15–40.

25. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1960. Vol. 4. P. 99–157.

26. Ehm W., Gneiting T., Richards D. Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.

27. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 249–252.

28. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 253–257.

29. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 179–187.

30. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.

31. Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 158–162.

32. Бердышева Е. Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 336–350.

33. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces: Proc. intern. conf., Gdansk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25—43.

34. Иванов А.В., Иванов В.И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 338—348.

35. Иванов А. В. Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 26–44.

36. Иванов А. В. Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 29–58.

37. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 115–123.

38. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Математика. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой

39. Горбачев Д. В. Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье–Ганкеля // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.

40. Горбачев Д. В. Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Гриф и К, 2005. 192 с.

41. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60. P. 303–316.

42. Grozev G. R., Rahman Q. I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64. P. 715–725.

43. Ghanem R. B., Frappier C. Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 92, № 2. C. 267–279.

44. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.

45. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. Vol. 11. P. 245–262.

46. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure // Ark. Mat. 1979. Vol. 17. P. 139–151.

47. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Turán's and Fejér's extremal problems for Jacobi transform // Anal. Math. 2017. [In press]

48. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. The Delsarte Extremal Problem for the Jacobi Transform // Math. Notes. 2016. Vol. 100, № 5. P. 677–686.

49. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 126–135.

50. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid // Math. Notes. 2017. Vol. 102, № 4. P. 480–491.

51. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 6. P. 338–348.

52. Вепринцев Р.А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 815—831.

53. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 519–530.

54. Горбачев Д. В., Иванов В. И., Вепринцев Р.А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 136–152.

55. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Некоторые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, № 2. С. 34–53.

56. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991. 576 с.

57. Лизоркин П. И. Прямые и обратные теоремы теории приближе- ний для функций на пространстве Лобачевского // Тр. МИАН. 1992. Т. 194. С. 120–147.

58. Горбачев Д. В., Пискорж М. С. Точное неравенство Джексона в L_2 на гиперболоиде // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4, № 1. С. 54–58.

59. Попов В. Ю. Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 на гиперболоиде // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т. 5, № 4. С. 254–266.

60. Петрова И. В. Приближение на гиперболоиде в метрике L_2 // Тр. МИАН. 1992. Т. 194. С. 215–228.

REFERENCES

1. Stechkin S. B., 1972, “An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients”, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol. 23, № 3-4, pp. 289–291.

2. Gorbachev D. V., Manoshina A. S., 2004, “Turán Extremal Problem for Periodic Functions with Small Support and Its Applications”, *Math. Notes*, vol. 76, № 5, pp. 640–652.

3. Fejér L., 1915, “Über trigonometrische Polynome”, *J. Angew. Math.*, vol. 146, pp. 53–82.

4. Ivanov V. I., Rudomazina Yu. D., 2005, “About Turán problem for periodic functions with nonnegative Fourier coefficients and small support”, *Math. Notes*, vol. 77, № 6, pp. 870–875.

5. Ivanov V. I., Gorbachev D. V., Rudomazina Yu. D., 2005, “Some extremal problems for periodic functions with conditions on their values and Fourier coefficients”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, № 2 suppl, pp. 139–159.

6. Ivanov V. I., 2006, “On the Turán and Delsarte problems for periodic positive definite functions”, *Math. Notes*, vol. 80, № 6, pp. 875–880.

7. Ivanov V. I., Ivanov A. V., 2010, “Turán problems for periodic positive definite functions”, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.*, vol. 33, pp. 219–237.

8. Andreev N. N., 1997, “An extremal problem for periodic functions with small support”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol 52, pp. 29–32.

9. Gorbachev D. V., 2001, “An extremal problem for periodic functions with supports in the ball”, *Math. Notes*, vol. 69, № 3, pp. 313–319.

10. Siegel C. L., 1935, “Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem”, *Acta Math.*, vol. 65, № 1, pp. 307–323.

11. Boas R. P., Kac M., 1945, “Inequalities for Fourier Transforms of positive functions”, *Duke Math. J.*, vol. 12, pp. 189–206.

12. Kolountzakis M. N., Révész Sz. Gy., 2003, “On a problem of Turán about positive definite functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 131, pp. 3423–3430.

13. Arestov V. V., Berdysheva E. E., 2001, “Turán’s problem for positive definite functions with supports in a hexagon”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, № 1, suppl, pp. 20–29.

14. Arestov V. V., Berdysheva E. E., 2002, “The Turán problem for a class of polytopes”, *East J. Approx.*, vol. 8, № 3, pp. 381–388.

15. Kolountzakis M. N., Révész Sz. Gy., 2006, “Turán’s extremal problem for positive definite functions on groups”, *J. London Math. Soc.*, vol. 74, pp. 475–496.

16. Révész Sz. Gy., 2011, “Turán’s extremal problem on locally compact abelian groups”, *Anal. Math.*, vol. 37, № 1, pp. 15–50.

17. Viazovska M. S., 2017, “The sphere packing problem in dimension 8”, *Annals of Math.*, vol. 185, № 3, pp. 991–1015.

18. Cohn H., Kumar A., Miller S. D., Radchenko D., Viazovska M., 2016, “The sphere packing problem in dimension 24”, *Annals of Math.*, vol. 185, № 3, pp. 1017–1033.

19. Gorbachev D. V., 2000, “An extremal problem for an entire functions of exponential spherical type related to the Levenshtein estimate for the sphere packing density in $\mathbb{R}^n$”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Mat. Mec. Inf.*, vol. 6, № 1, pp. 71–78. [in Russian]

20. Cohn H., 2002, “New upper bounds on sphere packings II”, *Geom. Topol.*, vol. 6, pp. 329–353.

21. Levenshtein V. I., 1979, “Bounds for packings in n-dimensional Euclidean space”, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 20, pp. 417–421.

22. Yudin V. A., 1989, “Packings of balls in Euclidean space, and extremal problems for trigonometric polynomials”, *Discrete Math. Appl.*, vol. 1, № 1, pp. 69–72.

23. Yudin V. A., 1976 “The multidimensional Jackson theorem”, *Math. Notes*, vol. 20, № 3, pp. 801–804.

24. Ivanov V. I., 1994 “Approximation of functions in spaces L_p”, *Math. Notes*, vol. 56, № 2, pp. 770–789.

25. Bohman H., 1960, “Approximate Fourier analysis of distribution functions”, *Ark. Mat.*, vol. 4, pp. 99–157.

26. Ehm W., Gneiting T., Richards D., 2004, “Convolution roots of radial positive definite functions with compact support”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 356, pp. 4655–4685.

27. Logan B. F., 1983, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, № 2, pp. 249–252.

28. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions II. Eventually negative functions", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, № 2, pp. 253–257.

29. Gorbachev D. V., 2000, "Extremum problems for entire functions of exponential spherical type", *Math. Notes*, vol. 68, № 2, pp. 159–166.

30. Chernykh N. I., 1967, "On Jackson's inequality in L_2", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 88, pp. 75–78.

31. Yudin V. A., 1981, "Multidimensional Jackson theorem in L_2", *Math. Notes*, vol. 29, № 2, pp. 158–162.

32. Berdysheva E. E., 1999, "Two related extremal problems for entire functions of several variables", *Math. Notes*, vol. 66, № 3, pp. 271–282.

33. Arestov V. V., Chernykh N. I., 1981, "On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials", Approximation and functions spaces: Proc. intern. conf., Gdansk, 1979. Amsterdam: North-Holland, pp. 25—43.

34. Ivanov A. V., Ivanov V. I., 2013, "Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$", *Math. Notes*, vol. 94, № 3, pp. 320–329.

35. Ivanov A. V., 2010, "Some extremal problem for entire functions in weighted spaces", *Izv. Tul. Gos. Univ., Estestv. Nauki*, № 1, pp. 26–44. [in Russian]

36. Ivanov A. V., 2011, "Logan problem for entire functions of several variables and Jackson constants in weighted spaces", *Izv. Tul. Gos. Univ., Estestv. Nauki*, № 2, pp. 29–58. [in Russian]

37. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, "Boman extremal problem for Dunkl transform", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol 297, № 1 suppl., pp. 88–96.

38. Platonov S. S., 2007, "Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line", *Izvestiya: Mathematics*, vol 71, № 5, pp. 1001–1048.

39. Gorbachev D. V., 2014, "Boman extremal problem for Fourier–Hankel transform", *Izv. Tul. Gos. Univ., Estestv. Nauki*, № 4, pp. 5–10. [in Russian]

40. Gorbachev D. V., 2005, "Selected Problems in the Theory of Functions and Approximation Theory: Their Applications", *Tula: Grif and K*, 192 p. [in Russian]

41. Frappier C., Olivier P., 1993, "A quadrature formula involving zeros of Bessel functions", *Math. Comp.*, vol. 60, pp. 303–316.

42. Grozev G. R., Rahman Q. I., 1995, "A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes", *Math. Comp.*, vol. 64, pp. 715–725.

43. Ghanem R. B., Frappier C., 1998, "Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type", *J. Approx. Theory*, vol. 92, № 2, pp. 267–279.

44. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2015, "Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type", *Sbornik: Math.*, vol. 206, № 8, pp. 1087–1122.

45. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H., 1973, "The convolution structure for Jacobi function expansions", *Ark. Mat.*, vol. 11, pp. 245–262.

46. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H., 1979, "Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure", *Ark. Mat.*, vol. 17, pp. 139–151.

47. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, "Turán's and Fejér's extremal problems for Jacobi transform", *Anal. Math.* [In press]

48. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I., 2016, "The Delsarte Extremal Problem for the Jacobi Transform", *Math. Notes*, vol. 100, № 5, pp. 677–686.

49. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2016, "Boman extremal problem for Jacobi transform", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, № 4, pp. 126–135. [in Russian]

50. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, "Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid", *Math. Notes*, vol. 102, № 4, pp. 480–491.

51. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A., 2014, "Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight", *Math. Notes*, vol. 96, № 6, pp. 338–348.

52. Veprintsev R. A., 2015, "Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Jacobi transform", *Math. Notes*, vol. 97, № 6, pp. 815–831.

53. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2016, "Approximation in L_2 by partial integrals of the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Math. Notes*, vol. 100, № 4, pp. 540–549.

54. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A., 2016, "Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, № 4, pp. 136–152. [in Russian]

55. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, "Some extremal problems for the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, № 2, pp. 34–53. [in Russian]

56. Vilenkin N. J., 1968, "Special Functions and the Theory of Group Representations", *Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, Translations of mathematical monographs, vol. 22, 613 p.

57. Lizorkin P. I., 1992, "Direct and inverse theorems of approximation theory for functions on the Lobachevsky space", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194. pp. 125–151.

58. Gorbachev D. V., Piskorsh M. S., 1998, "Sharp Jackson inequality in L_2 on hyperboloid", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Mat. Mec. Inf.*, vol. 4, № 1. pp. 54–58. [in Russian]

59. Popov V. Yu., 1998, "Sharp Jackson–Stechkin inequality in L_2 on the hyperboloid", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 5, № 4. pp. 254–266. [in Russian]

60. Petrova I. V., 1992, "Approximation on the hyperboloid in L_2-metric", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194. pp. 229–243.

Тульский государственный университет.
Получено 06.08.2017
Принято в печать 14.12.2017