E. P. Golubeva, The distribution of the eigenvalues of Hecke operators, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2004, Volume 314, 33–40

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 314, 2004 г.

Е. П. Голубева

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРОВ ГЕККЕ

Пусть S_k – множество новых форм четного веса k относительно полной модулярной группы. Обозначим через N порядок S_k, тогда $N = k/12 + O(1)$.

Пусть $f \in S_k$ и

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} e(nz).$$

В силу известного результата Делиня, $\lambda_f(p) = 2\cos\varphi_f(p)$, где $\varphi_f(p) \in [0, \pi]$.

Согласно гипотезе Сато–Тейта, множество $\{\varphi_f(p)\}$ при фиксированной форме f и $p \to \infty$ распределено асимптотически по мере

$$\frac{2}{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi. \tag{1}$$

В работах [1, 2] эта проблема была видоизменена следующим образом: зафиксируем простое число p и пусть $N \to \infty$. Оказалось, что в этом случае $\{\varphi_f(p), f \in S_k\}$ имеет предельное распределение по мере

$$\mu_p(\varphi) = \frac{2(1+p^{-1})}{\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \dfrac{2\cos 2\varphi}{p} + \dfrac{1}{p^2}} \, d\varphi. \tag{2}$$

(См. также работы [3–5]).

Отсюда, в частности, следует, что множество $\{\lambda_f(p)\}$ всюду плотно на интервале $[-2, 2]$.

В работе [1], кроме того, рассматривалась подобная задача для фиксированного набора простых $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. В частности, оказалось, что первые r значений $\lambda_f(p)$ асимптотически независимы.

В настоящей работе уточняются количественные аспекты результатов из [1, 2]:

оценена скорость сходимости к предельному закону (2) (см. теорему 1 ниже),

в качестве следствия доказано, что разность между соседними $\lambda_f(p)$ (при фиксированном p) не превосходит величины $C_\varepsilon \log p/(\log N)^{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – произвольная постоянная, C_ε – постоянная, зависящая от ε.

Кроме того, показано, что вместо фиксированного числа собственных значений мы можем рассматривать одновременно $r(N) = C_\varepsilon(\log N)^{1-\varepsilon}$ собственных значений.

Мера, по которой они распределены, $\mu = \mu_{p_1} \cdots \mu_{p_r}$.

Таким образом, в предельном законе величины $\varphi(p_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r(N))$ независимы.

Отсюда следует, что предельный закон распределения Сато–Тейта (1) для фиксированной новой формы не может при больших N проявляться на первых $C_\varepsilon(\log N)^{1-\varepsilon}$ собственных значениях.

Так же как в работах [1, 2], основную роль в настоящей работе играет формула следа Айхлера–Сельберга.

Основное отличие нашего подхода состоит в том, что мы не вычисляем моменты предельного распределения, как это было проделано в цитируемых работах, а рассматриваем разложение функции распределения в ряд Фурье. Уточнения, о которых говорилось выше, получены за счет предварительного сглаживания функции распределения.

Мы рассматриваем случай полной модулярной группы, но, в действительности, как и в работе [1], можно получить точно такие же результаты для новых форм любого уровня.

Заметим, наконец, что при усреднениях по $\{S_k\}$ величин, связанных с $\varphi_f(p)$, закон распределения (2) сохраняется.

Например, при

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1 - \dfrac{2\cos\varphi_f(p)}{p^s} + \dfrac{1}{p^{2s}}}$$

множество $\{\log L_f(1), f \in S_k\}$ имеет при $k \to \infty$ предельное распределение.

Предельная функция распределения совпадает с функцией распределения множества

$$\log \prod_p \frac{1}{1 - \dfrac{2\cos\varphi(p)}{p} + \dfrac{1}{p^2}},$$

где величины $\varphi(p)$ независимы и распределены на интервале $[0, \pi]$ по мере (2). Этот результат получен в работе [6].

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *При достаточно больших k имеем*

$$\left| \frac{\#\{\varphi_f(p) < \theta, f \in S_k\}}{N} - F(\theta) \right| < C_\varepsilon \frac{\log p}{(\log k)^{1-\varepsilon}},$$

где $F(\theta)$ – функция распределения случайной величины $\theta \in [0, \pi]$,

$$F(\theta) = \int_0^\theta \mu_p(\varphi), \quad \mu_p(\varphi) = \frac{2(1+\frac{1}{p})\sin^2\varphi}{\pi\Big(1 - \dfrac{2\cos 2\varphi}{p} + \dfrac{1}{p^2}\Big)} d\varphi,$$

$\varepsilon > 0$ – произвольная постоянная, C_ε – постоянная.

Следствие. *Для любого $\lambda_f(p)$ найдется $f_1(z)$ такая, что*

$$\left|\lambda_f(p) - \lambda_{f_1}(p)\right| < C_\varepsilon \frac{\log p}{(\log k)^{1-\varepsilon}}.$$

Теорема 2. *Для любого набора простых чисел $\{p_1, \dots, p_r\}$ и достаточно больших k имеем*

$$\left| \frac{\#\{\varphi_f(p_1) < \theta_1, \dots, \varphi_f(p_r) < \theta_r; f \in S_k\}}{N} - F(\theta_1, \dots, \theta_r) \right| <$$
$$< C_\varepsilon \frac{\log(p_1 \cdots p_r)}{(\log N)^{1-\varepsilon}},$$

где

$$F(\theta_1, \dots, \theta_r) = \prod_{i=1}^r F_i(\theta_i),$$

$F_i(\theta_i)$ то же, что и в теореме 1 при $p = p_i$, $\theta = \theta_i$; $\varepsilon > 0$ – произвольная постоянная, C_ε – постоянная.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся три леммы.

Лемма 1 (см. [7]). *Пусть* $0 \leqslant \theta$, $\theta + \delta < \pi$. *Существует функция* $\psi_\delta(\varphi)$ *такая, что*

$$
\begin{aligned}
\psi_\delta(\varphi) &= 1, \quad \text{если} \quad 0 < \varphi < \theta; \\
0 \leqslant \psi_\delta(\varphi) &\leqslant 1, \quad \text{если} \quad \theta \leqslant \varphi \leqslant \theta + \delta; \\
\psi_\delta(\varphi) &= 0, \quad \text{если} \quad \theta + \delta < \varphi < \pi;
\end{aligned}
$$

коэффициенты Фурье разложения $\psi_\delta(\varphi)$ *в ряд по косинусам —*

$$\psi_\delta(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi$$

удовлетворяют оценкам $a_n = O(1/n)$, $a_n = O_M\big((1/n) \cdot (n\delta)^{-M}\big)$, *где* M *– произвольное целое число.*

Лемма 2 (формула следа Айхлера–Сельберга). *Имеем*

$$
\sum_{f \in S_k} \lambda_f(n) =
$$
$$
= \begin{cases} N/n^{1/2} + O_\varepsilon\big(n^{1/2+\varepsilon}\big), & \text{если } n \text{ является полным квадратом}, \\ O_\varepsilon\big(n^{1/2+\varepsilon}\big) & \text{в противном случае}. \end{cases}
$$

Здесь $\varepsilon > 0$ *– произвольная постоянная.*

Доказательство см., например, в [1].

Лемма 3. *Имеем*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^{n-1}} \right) \cos 2n\varphi = \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 - \dfrac{2\cos 2\varphi}{p} + \dfrac{1}{p^2}}.$$

Доказательство. Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\varphi}{p^n} = \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 - \dfrac{2\cos 2\varphi}{p} + \dfrac{1}{p^2}},$$

имеем

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\right)\cos 2n\varphi =$$

$$=\frac{(1-p)\Big(1-\dfrac{\cos 2\varphi}{p}\Big)+p\Big(1-\dfrac{2\cos 2\varphi}{p}+\dfrac{1}{p^2}\Big)}{1-\dfrac{2\cos 2\varphi}{p}+\dfrac{1}{p^2}}=$$

$$=\frac{\Big(1+\dfrac{1}{p}\Big)(1-\cos 2\varphi)}{1-\dfrac{2\cos 2\varphi}{p}+\dfrac{1}{p^2}}.$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим две функции, удовлетворяющие условиям леммы 1: $\psi_\delta^{(+)}(\varphi)$ на промежутке $[0,\theta+\delta]$ и $\psi_\delta^{(-)}(\varphi)$ на промежутке $[0,\theta-\delta]$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{f\in S_k}\psi_\delta^{(-)}(\varphi_f(p))\leqslant \#\{\varphi_f(p)<\theta, f\in S_k\}\leqslant \sum_{f\in S_k}\psi_\delta^{(+)}(\varphi_f(p)). \qquad (3)$$

Положим $\delta=\log p/(\log k)^{1-\varepsilon}$.

Далее,

$$\sum_{f\in S_k}\psi_\delta^{(+)}(\varphi_f(p))=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{f\in S_k}\cos(n\varphi_f(p)).$$

Разобьем ряд по n на две части: к первой отнесем $n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}$.

Для второй части в силу результата леммы 1 и тривиальной оценки внутренней суммы имеем

$$\sum_{n>1/\delta^{1+\varepsilon}}a_n\sum_{f\in S_k}\cos(n\varphi_f(p))=O_M(N\delta^{M\varepsilon}).$$

За счет выбора M получаем

$$\sum_{n>1/\delta^{1+\varepsilon}}a_n\sum_{f\in S_k}\cos(n\varphi_f(p))=O_\varepsilon(N\delta). \qquad (4)$$

При $n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}$ воспользуемся леммой 2. Как известно, при $n\geqslant 1$

$$\cos(n\varphi_f(p))=\frac{1}{2}\Big(\lambda_f(p^n)-\lambda_f(p^{n-1})\Big).$$

Таким образом,

$$\sum_{f\in S_k}\cos(n\varphi_f(p))=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}N\left(\dfrac{1}{p^{n/2}}-\dfrac{1}{p^{n/2-1}}\right)+O_\varepsilon\left(p^{n/2+\varepsilon}\right), & \text{если } n \text{ – четное число},\\ O_\varepsilon\left(p^{n/2+\varepsilon}\right), & \text{если } n \text{ является нечетным.}\end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}}a_n\sum_{f\in S_k}\cos(n\varphi_f(p))= \tag{5}$$

$$=\frac{N}{2}\sum_{1\leqslant n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}}a_{2n}\left(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\right)+Na_0+O_\varepsilon\Big(p^\varepsilon\sum_{1\leqslant n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}}|a_n|p^{n/2}\Big).$$

Для остаточного члена имеем оценку

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}}|a_n|p^{n/2}=O\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}}\frac{p^{n/2}}{n}\Big)=$$

$$=O_\varepsilon\Big(\delta\exp(\delta^{-1-\varepsilon}\log p)\Big)=O_\varepsilon(\delta N^{1-\varepsilon}). \tag{6}$$

Коэффициент a_{2n} имеет вид

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\psi_\delta^{(+)}(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\theta d\varphi+O(\delta),$$

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\psi_\delta^{(+)}(\varphi)\cos 2n\varphi d\varphi=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta\cos 2n\varphi d\varphi+O(\delta).$$

Следовательно,

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}}a_{2n}\left(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{1\leqslant n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}}\left(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\right)\int\limits_0^\theta\cos 2n\varphi d\varphi+O\Big(\delta\sum_{n=1}^\infty\Big(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\Big)\Big)=$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\right)\int_0^{\theta}\cos 2n\varphi d\varphi + O(\delta) + O\big(p^{-1/\delta^{1+\varepsilon}}\big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\right)\int_0^{\theta}\cos 2n\varphi d\varphi + O(\delta). \tag{7}$$

Из леммы 3 и соотношения (7) получаем

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant n\leqslant 1/\delta^{1+\varepsilon}} a_{2n}\left(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\right) &= \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^n}-\frac{1}{p^{n-1}}\right)\cos 2n\varphi\right)d\varphi + O(\delta) &= \\ = \frac{2(1+\frac{1}{p})}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{1-\dfrac{2\cos 2\varphi}{p}+\dfrac{1}{p^2}} + O(\delta). & \end{aligned} \tag{8}$$

Комбинируя (5), (6) и (8), имеем

$$\sum_{f\in S_k}\psi_\delta^{(+)}(\varphi_f(p)) = N\int_0^{\theta}\mu_p(\varphi) + O_\varepsilon\Big(N\log p/\big(\log k\big)^{1-\varepsilon}\Big).$$

Совершенно аналогично,

$$\sum_{f\in S_k}\psi_\delta^{(-)}(\varphi_f(p)) = N\int_0^{\theta}\mu_p(\varphi) + O_\varepsilon\Big(N\log p/\big(\log k\big)^{1-\varepsilon}\Big),$$

и, в силу (4), теорема доказана.

Теорема 2 доказывается точно так же.

Литература

1. J.-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p,* J. Amer. Math. Soc **10**, No. 1 (1997), 75–101.
2. J. B. Conrey, W. Duke, and D. W. Farmer, *The distribution of the eigenvalues of Hecke operators,* Acta Arithm. **78**, No. 4 (1997), 405–409.

3. P. Sarnak, *Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators,* in: Analytic Number Theory and Diophantine Problems (Stillwater, OK, 1984), Progr. Math. **70**, Birkhäuser, Boston, 1987, 321–331.
4. P. Michel, *Autour de la conjecture de Sato–Tate pour les sommes de Kloosterman. I,* Invent. Math. **121** (1995), 61–78.
5. R. Livné, *The average distribution of cubic exponential sums,* J. Reine Angew. Math. **375/376** (1987), 362–379.
6. Е. П. Голубева, *Распределение значений L-функций Гекке в точке 1,* Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), ??–??.
7. И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел,* М., 1980.

Государственный
университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича
E-mail:elena_golubeva@mail.ru

Поступило 10 сентября 2004 г.