М. Б. Абросимов, О достаточном условии Гудмана–Хедетниеми гамильтоновости графа,
Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, 2018, том 18, выпуск 3, 347–353

ИНФОРМАТИКА

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 519.17

О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ГУДМАНА – ХЕДЕТНИЕМИ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ГРАФА

М. Б. Абросимов

Абросимов Михаил Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, mic@rambler.ru

В 1859 году ирландский математик сэр Уильям Роуэн Гамильтон предложил игру, в которой требовалось найти обход додекаэдра по его ребрам с возвратом в исходную точку. В его честь позднее был назван соответствующий обход графа. Гамильтоновым циклом называется остовной цикл в графе, то есть цикл, проходящий по всем вершинам графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. В 1952 году Дирак предложил достаточное условие гамильтоновости графа: если степень каждой вершины не меньше половины от общего числа вершин графа, то такой граф является гамильтоновым. Впоследствии было получено много различных достаточных условий гамильтоновости, из которых большую группу образовывают так называемые условия типа Дирака, или достаточные условия, сформулированные в терминах степеней вершин графа: достаточные условия Оре, Поша, Хватала и другие. В 1976 году Бонди и Хватал предложили конструкцию замыкания графа и новое достаточное условие: если замыкание графа является полным графом, то сам граф является гамильтоновым. Это условие остается одним из наиболее эффективных достаточных условий. В работе исследуется достаточное условие гамильтоновости графов Гудмана – Хедетниеми, которое было предложено в 1974 году. Это условие формулируется в терминах запрещенных подграфов. Дается описание всех графов, удовлетворяющих условию Гудмана – Хедетниеми, и доказывается, что при $n > 4$ существует только $\lfloor n/2 \rfloor + 2$ таких n-вершинных графов.

Ключевые слова: гамильтоновы графы, запрещенные подграфы.

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-347-353

ВВЕДЕНИЕ

Неориентированным графом (далее — просто графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V, называемое отношением смежности. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершины u и v смежны и эти вершины соединены ребром (u, v). При этом (u, v) и (v, u) — это одно и то же ребро, которое обозначают $\{u, v\}$. Говорят, что ребро $\{u, v\}$ инцидентно каждой из вершин u и v и эти вершины называются концевыми вершинами, или концами ребра $\{u, v\}$. Степенью вершины v в графе G будем называть количество вершин в G, смежных с v, и обозначать через $d(v)$. Основные определения даются по работе [1].

Гамильтоновым циклом называется остовной цикл в графе, то есть цикл, проходящий по всем вершинам графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. Задача проверки гамильтоновости графа является NP-полной, поэтому эффективный алгоритм решения этой задачи неизвестен. В 1952 году Дирак предложил достаточное условие гамильтоновости.

Теорема 1 (Дирак, 1952 [2]). *Если в графе G с числом вершин $n \geqslant 3$ степень любой вершины $d(u) \geqslant n/2$, то граф G — гамильтонов.*

Очевидно, что графы, которые удовлетворяют условию теоремы 1, имеют достаточно много рёбер. В последующие годы было предложено много других достаточных условий гамильтоновости: Оре (Ore) [3, 4], Поша (Posa) [5], Хватала (Chvatal) [6], Бонди – Хватала (Bondy, Chvatal) [7], Фана (Fan) [8], Фодри – Гульда – Якобсона – Шелпа (Faudree, Gould, Jacobson, Schelp) [9] и др. [10, 11]. Многие из условий формулируются в терминах степеней вершин. Одна из немногих попыток предложить достаточное условие гамильтоновости в терминах запрещенных подграфов была предпринята в 1976 году Гудманом (Goodman) и Хедетниеми (Hedetniemi) [12].

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$, порожденным подмножеством вершин V', называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \in V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$. Подграф называется максимальным, если он получается из графа удалением одной вершины и всех инцидентных её рёбер. Граф называется двусвязным, если все его максимальные подграфы связные. В двусвязном графе нет вершины, после удаления которой граф перестаёт быть связным. Двусвязность является необходимым условием гамильтоновости графа [1]. Связный n-вершинный граф, у которого все вершины имеют степень 2, называется циклом и обозначается C_n. Очевидно, что любой цикл C_n является гамильтоновым, однако при $n > 4$ он не удовлетворяет условию теоремы Дирака.

Граф G называется двудольным, если множество его вершин можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 такие, что концы любого ребра графа G принадлежат разным подмножествам. Если граф G содержит все возможные рёбра, соединяющие вершины V_1 и V_2, то G называется полным двудольным графом и обозначается $K_{m,n}$, где m и n — число вершин в V_1 и V_2. На рис. 1 изображены графы $K_{1,3}$ и $K_{1,3} + x$. Граф $K_{1,3} + x$ получается из графа $K_{1,3}$ добавлением одного ребра (рис. 1).

Теорема 2 (Гудман, Хедетниеми, 1976 [12]). *Если двусвязный граф G не содержит подграфов вида $K_{1,3}$ и $K_{1,3}+x$, то граф G — гамильтонов.*

В своей работе вместе с элегантным доказательством, занимающим один абзац, авторы приводят и эффективный алгоритм проверки выполнения условия теоремы с одновременным построением гамильтонова цикла. Авторы также отмечают, что в отличие от графов, удовлетворяющих достаточным условиям гамильтоновости типа Дирака, Поша, Хватала и других, графы, удовлетворяющие предложенному условию, могут иметь меньше рёбер. В работе [10] отмечается, что число графов, удовлетворяющих условию Гудмана – Хедетниеми, не очень велико. Очевидно, что любой цикл C_n удовлетворяет условию теоремы 2. Как показывают две следующие теоремы, эффективность условия Гудмана – Хедетниеми действительно оказывается очень низкой.

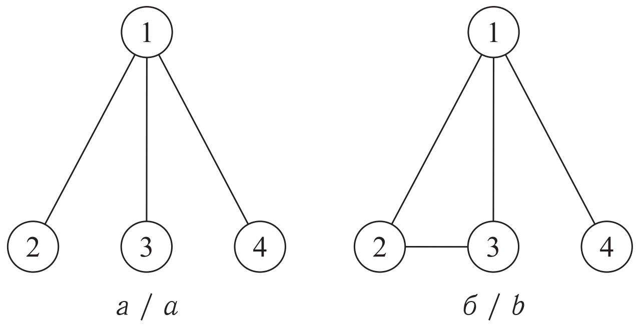


Рис. 1. Графы $K_{1,3}$ (*а*) и $K_{1,3}+x$ (*б*)
Fig. 1. Graph $K_{1,3}$ (*a*) and $K_{1,3}+x$ (*b*)

Теорема 3. *Если n-вершинный граф G с числом вершин $n>4$ удовлетворяет условию теоремы 2 и не является циклом, то он не содержит вершин степени ниже $n-2$.*

Доказательство. Пусть n-вершинный граф G удовлетворяет условию теоремы. Так как граф G не является циклом, то хотя бы одна его вершина имеет степень больше 2. Покажем, что граф G не содержит вершин степени 2.

Обозначим гамильтонов цикл в графе G через C и занумеруем вершины в порядке его прохождения: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Возьмем произвольную вершину v такую, что $d(v)>2$: пусть это будет v_1. Тогда вершина v_1 смежна с v_2 и v_n, а также, по крайней мере, еще с одной вершиной v_i, $i \notin \{1,2,n\}$. Так как граф G не содержит подграфов вида $K_{1,3}$ и $K_{1,3}+x$, то вершины v_2, v_n и v_i соединены не менее чем двумя ребрами. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Вершины v_2 и v_n смежны между собой (рис. 2). С учетом того, что вершина v_2 также смежна с v_3, а вершина v_n — с вершиной v_{n-1}, получаем, что степени вершин v_2 и v_n больше 2.

Случай 2. Вершины v_2 и v_n не смежны между собой, тогда обе они смежны с вершиной v_i. Если вершина v_i отлична от вершин v_3 и v_{n-1} (рис. 3, *а*), то снова получаем, что степени вершин v_2 и v_n больше 2. Пусть $i=3$. Рассмотрим вершину v_3 (рис. 3, *б*). Она смежна с v_2, v_4 и v_n, причем v_2 и v_n не смежны между собой. Так как граф G не содержит подграфов вида $K_{1,3}$ и $K_{1,3}+x$, то вершина v_4 должна быть смежна с v_2 и v_n. Снова получаем, что степени вершин v_2 и v_n больше 2.

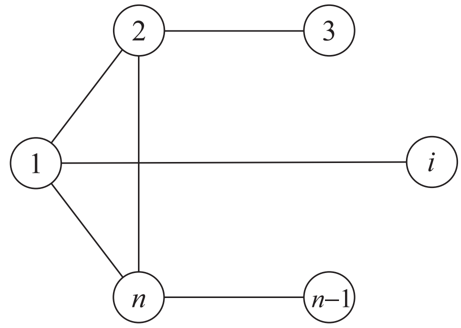
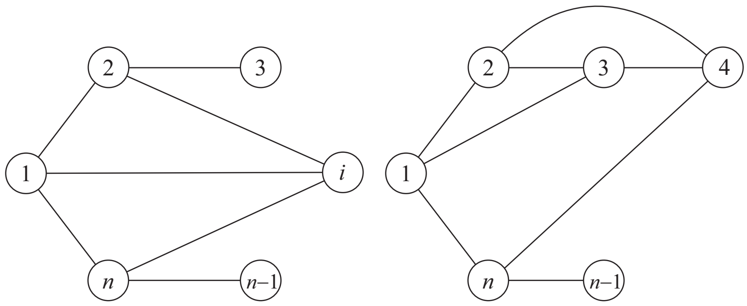


Рис. 2. Случай 1
Fig. 2. Case 1



а / a б / b

Рис. 3. Случай 2: а — $i \neq 3$ и $i \neq n-1$; б — $i = 3$

Fig. 3. Case 2: a — $i \neq 3$ и $i \neq n-1$; b — $i = 3$

Продолжая рассуждения с вершиной v_2, докажем, что граф G не содержит вершин степени 2. Рассмотрим произвольную вершину v_1 и покажем, что $d(v_1) \geqslant n-2$.

Предположим, что это не так. Тогда есть по крайней мере две вершины, с которыми вершина v_1 несмежна. Выберем среди всех несмежных с v_1 вершин пару вершин v_i и v_j, таких что $j > i$ и разность $j - i$ минимальна. При равенстве разностей $j - i$ будем выбирать пару с меньшим значением i. Это означает, что при прохождении по циклу между вершинами v_i и v_j все вершины смежны с v_1. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $j = i+1$. Так как вершина v_i не смежна с вершиной v_1, то $i > 2$, причем вершина v_{i-1} смежна с v_1. По доказанному ранее $d(v_i) > 2$, следовательно, есть смежная с v_i вершина w, отличная от v_{i-1} и v_j. Рассмотрим подграф, порожденный вершинами $\{v_i, v_{i-1}, v_j, w\}$. Возможны два варианта.

1а. Вершина v_{i-1} смежна с v_j. Рассматривая подграф, порожденный вершинами $\{v_{i-1}, v_1, v_i, v_j\}$, получим граф, изоморфный $K_{1,3}+x$.

1б. Вершины v_{i-1} и v_j смежны с w. Рассматривая подграф, порожденный вершинами $\{v_{i-1}, v_1, v_i, w\}$, получим, что вершина w смежна с v_1. Наконец, рассматривая подграф, порожденный вершинами $\{w, v_1, v_i, v_j\}$, получим граф, $K_{1,3}+x$.

Случай 2. $j > i+1$, т.е. между вершинами v_i и v_j все вершины $v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}$ смежны с v_1. Рассмотрим подграф, порожденный вершинами $\{v_{i+1}, v_1, v_i, v_{i+2}\}$. Так как вершины v_1 и v_i не смежны, то получим, что вершины v_{i+2} и v_i смежны. Рассматривая аналогично подграфы, порожденные $\{v_{i+2}, v_1, v_i, v_{i+3}\}$, $\ldots$, $\{v_{j-2}, v_1, v_i, v_{j-1}\}$, получим что вершина v_{j-1} смежна с v_i. Кроме того, она смежна с v_j и с v_1. Таким образом, подграф, порожденный вершинами $\{v_{j-1}, v_1, v_i, v_j\}$, изоморфен либо $K_{1,3}$, либо $K_{1,3}+x$ (в зависимости от смежности вершин v_i и v_j).

Оба возможных случая привели к противоречию, что доказывает утверждение теоремы. □

Теорема 4. *Для заданного $n > 4$ количество графов, удовлетворяющих условию Гудмана – Хедетниеми, равно $\lfloor n/2 \rfloor + 2$.*

Доказательство. Пусть дано $n > 4$. Для любого n условию теоремы 2 удовлетворяет цикл C_n. Перечислим, какие n-вершинные графы, кроме цикла C_n, удовлетворяют условию теоремы 2 с учетом теоремы 3. Эти графы могут иметь степенное множество вида $\{n-1\}$, $\{n-1, n-2\}$ или $\{n-2\}$. Напомним, что степенным множеством называется множество, составленное из степеней вершин графа. Вектором степеней называется вектор, компонентами которого являются степени вершин графа в порядке невозрастания. Если вектор степеней однозначно с точностью до изоморфизма определяет граф, то такой граф называется униграфом.

При любом n только один n-вершинный граф имеет степенное множество $\{n-1\}$ — это полный граф K_n.

При чётном n только один n-вершинный граф имеет степенное множество $\{n-2\}$. Для доказательства единственности достаточно посмотреть на дополнение этого графа — однородный граф порядка $\{1\}$. Такой граф представляет собой объединение двухвершинных цепей.

Рассмотрим граф G со степенным множеством вида $\{n-1, n-2\}$. Обозначим через k количество вершин степени $n-2$. Рассмотрим G' — дополнение графа G. G' будет иметь степенное множество вида $\{1, 0\}$. То есть граф G' будет представлять собой k вершин степени 1 и $n-k$ вершин степени 0. Такой граф для заданных n и k может быть только один с точностью до изоморфизма, причем только при четном k. Граф G можно получить из полного графа K_n удалив рёбра $k/2$ раз, соединяющие вершины степени $n-1$. Всего графов со степенным множеством $\{n-1, n-2\}$ и $\{n-2\}$ будет $\lfloor n/2 \rfloor$, откуда и получается утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1. При $n = 3$ число графов, удовлетворяющих условию Гудмана – Хедетниеми, равно 1 (полный граф K_3), а при $n = 4$ таких графов 3: цикл C_4, полный граф K_4 и униграф с вектором степеней $(3, 3, 2, 2)$.

Библиографический список

1. *Харари Ф.* Теория графов. М : Мир, 1973. 300 с.
2. *Dirac G. A.* Some Theorems on Abstract Graphs // Proc. London Math. Soc. 1952. Vol. s3–2, iss. 1. P. 69–81. DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.69
3. *Ore O.* Note on Hamilton Circuits // Amer. Math. Monthly. 1960. Vol. 67, № 1. P. 55. DOI: https://doi.org/10.2307/2308928
4. *Ore O.* Arc coverings of graphs // Ann. Mat. Pura Appl. 1961. Vol. 55, iss. 1. P. 315–322. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02412090
5. *Posa L.* On the circuits of finite graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1963. Vol. 8. P. 355–361.
6. *Chvatal V.* On Hamilton's ideals // J. Combinat. Theory (B). 1972. Vol. 12, iss. 2. P. 163–168. DOI: https://doi.org/10.1016/0095-8956(72)90020-2
7. *Bondy J. A., Chvatal V.* A method in graph theory // Discrete Math. 1976. Vol. 15, iss. 2. P. 111–135. DOI: https://doi.org/10.1016/0012-365X(76)90078-9
8. *Fan G. H.* New sufficient conditions for cycles in graphs // J. Combinat. Theory (B). 1984. Vol. 37, iss. 3. P. 221–227. DOI: https://doi.org/10.1016/0095-8956(84)90054-6
9. *Faudree R. J., Gould R. J., Jacobson M. S., Schelp R. H.* Neighborhood unions and Hamiltonian properties in graphs // J. Combinat. Theory (B). 1989. Vol. 47, iss. 1. P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1016/0095-8956(89)90060-9
10. *Gould R. J.* Advances on the Hamiltonian Problem – A Survey // J. Graph Theory. 1991. Vol. 15, iss. 2. P. 121–157. DOI: https://doi.org/10.1002/jgt.3190150204
11. *Li H.* Generalizations of Diracs theorem in Hamiltonian graph theory – A survey // Discrete Math. 2013. Vol. 313, iss. 19. P. 2034–2053. DOI: https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.11.025
12. *Goodman S. E., Hedetniemi S. T.* Sufficient Conditions for a graph to be Hamiltonian // J. Combin Theory (B). 1974. Vol. 16, iss. 2. P. 175–180. DOI: https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90061-6

Образец для цитирования:

Абросимов М. Б. О достаточном условии Гудмана – Хедетниеми гамильтоновости графа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 347–353. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-347-353

On a Goodman – Hedetniemi Sufficient Condition for the Graph Hamiltonicity

M. B. Abrosimov

Mikhail B. Abrosimov, https://orcid.org/0000-0002-4473-8790, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, 410012, Russia, mic@rambler.ru

In 1859 the Irish mathematician Sir William Rowan Hamilton proposed a game in which it was required to find a dodecahedron bypass around its edges with a return to the starting point. In his honor, the corresponding path in the graph was later called the Hamiltonian cycle: it is the spanning cycle in the graph, that is, the cycle passing through all the vertices of the graph. A graph containing a Hamiltonian cycle is said to be Hamiltonian. In 1952 Dirac proposed a sufficient condition for the graph to be Hamiltonian: if the degree of each vertex is not less than half of the total number of vertices of the graph, then such a graph is Hamiltonian. Subsequently, many different sufficient conditions for Hamiltonicity were obtained, of which a large group is formed by so-called Dirac-type conditions or sufficient conditions formulated in terms of degrees of the vertices of the graph: sufficient conditions by Ore, Pocha, Chvatal and others. In 1976 Bondy and Chvatal proposed a closure construction for the graph and a new sufficient condition: if the closure of a graph is a complete graph, then the graph itself is Hamiltonian. This condition remains one of the most effective sufficient condition. In this paper, we will investigate the sufficient condition for the Hamiltonian graph by Goodman – Hedetniemi, which is formulated in terms of forbidden subgraphs. We give a description of all graphs that satisfy the Goodman – Hedetniemi condition and prove that for $n > 4$ there are only $\lfloor n/2 \rfloor + 2$ such n-vertex graphs.

Key words: Hamiltonian graph, forbidden subgraphs.

References

1. Harary F. *Graph Theory*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1969. 274 p. [Russ. ed. Moscow, Mir, 1973. 300 p.].
2. Dirac G. A. Some Theorems on Abstract Graphs. *Proc. London Math. Soc.*, 1952, vol. s3–2, iss. 1, pp. 69–81. DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s3-2.1.69
3. Ore O. Note on Hamilton circuits. *Amer. Math. Monthly.*, 1960, vol. 67, no. 1, pp. 55. DOI: https://doi.org/10.2307/2308928
4. Ore O. Arc coverings of graphs. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1961, vol. 55, iss. 1, pp. 315–322. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02412090
5. Posa L. On the circuits of finite graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 1963, vol. 8, pp. 355–361.
6. Chvatal V. On Hamilton's ideals. *J. Combinat. Theory (B)*, 1972, vol. 12, iss. 2, pp. 163–168. DOI: https://doi.org/10.1016/0095-8956(72)90020-2
7. Bondy J. A., Chvatal V. A method in graph theory. *Discrete Math.*, 1976, vol. 15, iss. 2, pp. 111–135. DOI: https://doi.org/10.1016/0012-365X(76)90078-9
8. Fan G. H. New sufficient conditions for cycles in graphs. *J. Combinat. Theory (B)*, 1984, vol. 37, iss. 3, pp. 221–227. DOI: https://doi.org/10.1016/0095-8956(84)90054-6
9. Faudree R. J., Gould R. J., Jacobson M. S., Schelp R. H. Neighborhood unions and Hamiltonian properties in graphs. *J. Combinat. Theory (B)*, 1989, vol. 47, pp. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1016/0095-8956(89)90060-9

10. Gould R. J. Advances on the Hamiltonian Problem – A Survey. *J. Graph Theory*, 1991, vol. 15, iss. 2, pp. 121–157. DOI: https://doi.org/10.1002/jgt.3190150204
11. Li H. Generalizations of Diracs theorem in Hamiltonian graph theory – A survey. *Discrete Math.*, 2013, vol. 313, iss. 19, pp. 2034–2053. DOI: https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.11.025
12. Goodman S. E., Hedetniemi S. T. Sufficient Conditions for a graph to be Hamiltonian. *J. Combin Theory (B)*, 1974, vol. 16, iss. 2, pp. 175–180. DOI: https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90061-6

Cite this article as:

Abrosimov M. B. On a Goodman – Hedetniemi Sufficient Condition for the Graph Hamiltonicity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 347–353 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-3-347-353