А. М. Гайсин, К одной теореме Пойа о целых функциях с вещественными коэффициентами Тейлора,
*Сиб. матем. журн.*, 1997, том 38, номер 1, 46–55

https://www.mathnet.ru/smj421

*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1*

*УДК 517.53*

# К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПОЙА О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕЙЛОРА*)

А. М. Гайсин

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z = x + iy) \tag{1}$$

— целая транцендентная функция с вещественными коэффициентами, $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, а $\{p_k\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов, т. е. $a_{p'_k} a_{p_k} < 0$, где $p'_k = \max\{n < p_k : a_n \neq 0\}$. Через $p(t)$ обозначим считающую функцию последовательности $\{p_k\}$, т. е. $p(t) = \sum\limits_{p_k \leqslant t} 1$. Если существует предел

$$\Delta = \lim_{t \to \infty} \frac{p(t)}{t},$$

то последовательность $\{p_k\}$ называется ***измеримой***, а число $\Delta$ — ее *плотностью*. В [1] показано, что если $\Delta = 0$, то в каждом угле $\{z : |\arg z| \leqslant \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ функция (1) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости.

В работе [2] показано, что если функция (1) имеет конечный порядок $\rho$ и $\Delta = 0$, то

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln M_f(x)} = 1, \tag{2}$$

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln \ln |f(x)|}{\ln x} = \rho. \tag{3}$$

Условие $\Delta = 0$ для справедливости равенств (2) и (3), вообще говоря, существенно. Действительно, для любой последовательности $\{p_k\}$ такой, что

$$\delta = \varliminf_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{p_k \leqslant x} \frac{1}{p_k} > 0,$$

существует целая функция порядка $\rho = 0{,}5\delta^{-1}$ с вещественными тейлоровскими коэффициентами, ограниченная на положительном луче, для которой $\{p_k\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов [3]. Так как для измеримых последовательностей $\{p_k\}$ имеет место равенство $\delta = \Delta$, то в классе целых функций конечного порядка с измеримой последовательностью перемен знаков тейлоровских коэффициентов условие $\Delta = 0$ для выполнения равенств (2), (3) является

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-00259).

и необходимым. При $\Delta = 0$ равенство (2) для функций (1) конечного нижнего порядка установлено в [4].

Цель статьи — найти неулучшаемые условия, при выполнении которых были бы справедливы результаты работ [2, 4].

Вместо рядов (1) мы рассматриваем более общие ряды, а именно целые ряды Дирихле с вещественными коэффициентами, показатели которых удовлетворяют некоторым вполне естественным условиям несгущаемости. Перед тем как сформулировать наши результаты, введем обозначения.

Через $A^+$ и $A^-$ будем обозначать классы положительных неубывающих на $[0,\infty)$ функций $\alpha(t)$ таких, что $\alpha(t) = o(t\ln t)$ при $t \to \infty$ и соответственно

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\ln r}\int_1^r \frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt = 0, \qquad \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\ln r}\int_1^r \frac{\alpha(t)}{t^2}\,dt = 0.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая следующим условиям несгущаемости:

$$\sup_t(\lambda(t+1) - \lambda(t)) < \infty, \quad \ln(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > -\alpha(\lambda_n) \ (n \geqslant 1), \tag{4}$$

где $\alpha(t)$ — некоторая функция из $A^+$, $\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n\leqslant t} 1$. Через $S(\Lambda)$ обозначим класс функций, заданных во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it) \tag{5}$$

с вещественными коэффициентами $a_n$. Положим $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma+it)|$. Через $\mu(\sigma)$ будем обозначать максимальный член ряда (5).

Для характеристики исключительных множеств, вне которых будут получены наши оценки для целых функций, заданных рядами (1) или (5), мы будем пользоваться понятием $\nu$-меры. Напомним определение.

Пусть $\nu(r)$ — неубывающая абсолютно непрерывная на $[0,\infty)$ функция. Эта функция определяет *$\nu$-меру* на $[0,\infty)$ по правилу

$$\nu\text{-mes}(e) = \int_e \nu'(r)\,dr,$$

где $e$ — произвольное борелевское множество из $[0,\infty)$. *Верхней $\nu$-плотностью* измеримого множества $E \subset [0,\infty)$ называется величина

$$\nu\text{-}\overline{\text{dens}}\,E = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\nu\text{-mes}\,E(r)}{\nu(r)}, \qquad E(r) = E \cap [0,r]. \tag{6}$$

Если $\nu(r) \equiv r$, то верхняя $\nu$-плотность называется *верхней* (линейной) *плотностью* и обозначается $DE = \overline{\text{dens}}\,E$. В случае $\nu(r) \equiv \ln r$ верхняя $\nu$-плотность называется *верхней логарифмической* и обозначается $\ln\text{-}\overline{\text{dens}}\,E$. Если в (6) знак верхнего предела заменить знаком нижнего предела, получим определение *нижней $\nu$-плотности* $dE$ ($\nu$-$\underline{\text{dens}}\,E$). Если $DE = dE$, то говорят, что *множество $E$ имеет $\nu$-плотность* $\nu$-dens $E$.

Положим $\mu_k = \lambda_{p_k}$, где $\{p_k\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (5), т. е. $a_{p'_k} a_{p_k} < 0$, если $p'_k = \max\{n < p_k : a_n \neq 0\}$. Пусть $l(t) = \sum\limits_{\mu_k \leqslant t} 1$.

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Для того чтобы для любой функции $F \in S(\Lambda)$ конечного $R$-порядка при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней плотности выполнялось асимптотическое равенство*

$$\ln M(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(\sigma)|, \tag{7}$$

*необходимо и достаточно, чтобы $l \in A^-$.*

**Теорема 2.** *Для того чтобы для любой функции $F \in S(\Lambda)$ конечного нижнего $R$-порядка при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней плотности выполнялось асимптотическое равенство (7), необходимо и достаточно, чтобы $l \in A^+$.*

Из теорем 1 и 2 вытекают следствия для функций $f(z)$, заданных рядами (1) (в этом случае $\lambda_{p_k} = p_k$).

**Следствие 1.** *Для того чтобы для любой целой функции $f(z)$ конечного порядка, заданной рядом (1), при $r \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней логарифмической плотности выполнялось асимптотическое равенство*

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \ln |f(r)|, \tag{8}$$

*необходимо и достаточно, чтобы $p \in A^-$.*

**Следствие 2.** *Для того чтобы для любой целой функции $f(z)$ конечного порядка, заданной рядом (1), при $r \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней логарифмической плотности выполнялось асимптотическое равенство (8), необходимо и достаточно, чтобы $p \in A^+$.*

В § 2 показано, что если функция $F(S)$ ($F \in S(\Lambda)$) имеет конечный $R$-порядок $\rho_R$ и $l \in A^+$, то $\rho_R = \rho_0$, где

$$\rho_0 = \varlimsup_{\sigma \to \infty} \frac{\ln \ln |F(\sigma)|}{\sigma}.$$

Таким образом, видим, что утверждения, доказанные в работах [2, 4], полностью содержатся в наших результатах. Ясно также, что (8) есть более сильная оценка, чем (2). Наконец, отметим, что наша методика исследования отличается от методики, примененной в работах [2, 4].

## § 1. Вспомогательные утверждения

**Лемма 1.** *Пусть $w(t)$ — непрерывная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, $\sqrt{t} \leqslant w(t)$, $w(t) = o(t \ln t)$, $t \to \infty$,*

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \frac{w(t)}{t^2}\, dt = 0.$$

*Если $u(\sigma)$ — неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $u(\sigma) \to \infty$, $u(\sigma) = O(t)$ при $\sigma \to \infty$, а $v = v(\sigma)$ — решение уравнения*

$$w(v) = e^{u(\sigma)}, \tag{9}$$

*то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней плотности*

$$u\left(\sigma + d\frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) = u(\sigma) + o(1) \quad (0 < d < \infty). \tag{10}$$

**Лемма 2.** *Пусть $w(t)$ — непрерывная возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\sqrt{t} \leqslant w(t)$,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \frac{w(t)}{t^2}\, dt = 0.$$

*Если $u(t)$ — неубывающая непрерывная на $[0,\infty)$ функция, $u(\sigma) \to \infty$ при $\sigma \to \infty$, причем*

$$\varliminf_{f\to\infty} \frac{u(\sigma)}{\sigma} < \infty,$$

*а $v = v(\sigma)$ — решение уравнения (9), то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0,\infty)$ нулевой нижней плотности имеет место равенство (10).*

Леммы 1, 2 доказаны в [5].

Замечание. В [5] показано, что в лемме 2

$$\frac{\operatorname{mes}(E \cap [0, \sigma_n^*])}{\sigma_n^*} = o(1), \quad \sigma_n^* \to \infty,$$

где последовательность $\{\sigma_n^*\}$ такова, что $u(\sigma_n^*) = O(\sigma_n^*)$ при $\sigma_n^* \to \infty$.

**Лемма 3.** *Пусть $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $\{z : |z| < R\}$, причем*

$$|g(0)| > 1, \quad \ln \sup_{|z|<R} |g(z)| = M < \infty.$$

*Если $0 < r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, то существует не более чем счетное множество кружков $V_n = \{z : |z - z_n| < \rho_n\}$ таких, что*

$$\sum_n \rho_n \leqslant Rr^N(1-r),$$

*вне которых, но в круге $\{z : |z| \leqslant rR\}$ выполняется оценка*

$$\ln|g(z)| \geqslant \left[\frac{R-r}{R+r} - 5N\frac{L}{\ln|g(0)|}\right] \ln|g(0)|, \tag{11}$$

*где*

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\theta})|\, d\theta - \ln|g(0)|.$$

Лемма 3 установлена в [6].

Пусть $\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $l(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$,

$$q_n = \min\left(\frac{\lambda_{p_n} + \lambda_{p_n+1}}{2}, \lambda_{p_n} + 1\right), \quad q(t) = \sum_{q_n \leqslant t} 1.$$

Положим

$$Q_a(z) = \prod_{q_n \leqslant 2a} \left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right) \quad (a \geqslant q_1).$$

Имеет место следующая

**Лемма 4.** *Для любого* $\lambda_n \leqslant a$ $(a \geqslant q_1)$ *справедлива оценка*

$$-\ln|Q_a(\lambda_n)| < \int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt + 4N_q(2ea), \tag{12}$$

*где* $q(t;\lambda_n)$ — *число точек* $q_i$ *в отрезке* $\{h : |h-\lambda_n| \leqslant t\}$,

$$N_q(t) = \int_0^t \frac{q(x)}{x}\,dx.$$

Доказательство. Пусть $a$ $(a \geqslant q_1)$ фиксировано, $\lambda_n \leqslant a$. Тогда

$$\ln|Q_a(\lambda_n)| = \sum_{|\lambda_n - q_i| \leqslant \lambda_n} \ln|1-\lambda_n/q_i| + \sum_{|\lambda_n - q_i| \leqslant \lambda_n} \ln(1+\lambda_n/q_i)$$
$$+ \sum_{|\lambda_n - q_i| > \lambda_n} \ln\left|1-\lambda_n^2/q_i^2\right| = a+b+c > a+c \quad (b>0). \tag{13}$$

Но

$$c = \int_{2\lambda_n}^{2a} \ln\left(1-\frac{\lambda_n^2}{t^2}\right)dq(t) = q(2a)\ln\left(1-\frac{\lambda_n^2}{4a^2}\right)$$
$$-q(2\lambda_n)\ln\frac{3}{4} - 2\lambda_n^2 \int_{2\lambda_n}^{2a} \frac{q(t)}{t(t^2-\lambda_n^2)}\,dt > -2q(2a). \tag{14}$$

Далее, для любого $z \neq q_i$ $(i \geqslant 1)$ имеем

$$\sum_{|z-q_i| \leqslant |z|} \ln|1-z/q_i| = \sum_{|z-q_i| \leqslant |z|} \ln|q_i - z| + \sum_{|z-q_i| \leqslant |z|} \ln\frac{1}{q_i}$$
$$= \int_0^{|z|} \ln t\,dq(t;z) + \int_0^{2|z|} \ln\frac{1}{t}\,d\mu(t;z)$$
$$= q(|z|;z)\ln|z| - \int_0^{|z|} \frac{q(t;z)}{t}\,dt + \ln\frac{1}{2|z|}\mu(2|z|;z) + \int_0^{2|z|} \frac{\mu(t;z)}{t}\,dt,$$

где $q(t;z)$ — число точек $q_i$ в круге $\{h : |h-z| \leqslant t\}$, а $\mu(t;z)$ — число точек $q_i$, принадлежащих пересечению кругов $\{h : |h-z| \leqslant z\}$, $\{h : |h| \leqslant t\}$. Но

$$q(|z|;z)\ln|z| + \mu(2|z|;z)\ln{}^1\!/_2|z| = q_1(z)\ln{}^1\!/_2,$$

где $q_1(z)$ — число точек $q_i$ в круге $\{h : |h-z| \leqslant |z|\}$. Далее,

$$\int_0^{2|z|} \frac{\mu(t;z)}{t}\,dt \leqslant \int_0^{2|z|} \frac{q(t)}{t}\,dt = N_q(2|z|).$$

Следовательно,

$$a \geqslant -\int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt - q(2a) - N_q(2a), \tag{15}$$

где $q(t;\lambda_n)$ — число точек $q_i$ в отрезке $\{h : |h-\lambda_n| \leqslant t\}$. С учетом оценок (14), (15) из (13) получаем требуемую оценку (12). Лемма доказана.

## § 2. Доказательство теоремы 1

**1.** Достаточность. Поскольку $|l(t)-q(t)| \leqslant 1$, из $l \in A^-$ следует, что $q \in A^-$. Далее,

$$\int_0^r \frac{q(t)}{t^2}\,dt = \int_0^r \frac{dN_q(t)}{t} = \frac{N_q(r)}{r} + \int_0^r \frac{N_q(t)}{t^2}\,dt,$$

где $N_q(t) = \int_0^t \frac{q(x)}{x}\,dx$. Следовательно, $N_q \in A^-$. Тогда найдется непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\beta_1(t)$, $0 < \beta_1(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$, такая, что функция $N_q(2et)\beta_1(t)$ также принадлежит $A^-$.

Оценим интеграл $\int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt$, где $q(t;\lambda_n)$ — число точек $q_i$ в отрезке $\{h : |h-\lambda_n| \leqslant t\}$. В силу условий (4) имеем

$$\int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt = \int_{\gamma_n}^1 \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt + \int_1^{\nu_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt + \int_{\nu_n}^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt,$$

$$\nu_n = \frac{\lambda_n}{\beta_1(\lambda_n)}, \qquad \gamma_n = \frac{1}{2}e^{-\alpha(\lambda_n)}.$$

Но из условия $\sup\limits_t(\lambda(t+1)-\lambda(t)) < \infty$ следует, что $q(t;\lambda_n) \leqslant dt$ $(0 < d < \infty)$. Поэтому

$$\begin{gathered}\int_{\gamma_n}^1 \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt \leqslant d[\ln 2 + \alpha(\lambda_n)], \qquad \int_1^{\nu_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt \leqslant d\nu_n, \\ \int_{\nu_n}^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt \leqslant q(\lambda_n;\lambda_n)\ln\beta_1(\lambda_n) < N_q(2e\lambda_n)\ln\beta_1(\lambda_n).\end{gathered} \tag{16}$$

Поскольку $\nu_n = \lambda_n/\beta_1(\lambda_n)$, $\beta_1(\lambda_n) \to \infty$, $n \to \infty$, из (16) видно, что

$$\int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt < \Theta(\lambda_n) + N_q(2e\lambda_n)\ln\beta_1(\lambda_n), \tag{17}$$

где $\Theta \in A^+$. Далее, найдется непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\beta_2(t)$, $0 < \beta_2(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$, такая, что $\Theta(t)\beta_2(t) \in A^+$. Положим $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, где $w(t) = \Theta(t) + N_q(2et)$, $\beta(t) = \min(\beta_1(t), \beta_2(t))$. Ясно, что $w^* \in A^-$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma), \tag{18}$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (5). Положим

$$F_a(s) = \sum_{\lambda_n \leqslant a} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad F_a^*(s) = \sum_{\lambda_n \leqslant a} a_n Q_a(\lambda_n) e^{\lambda_n s},$$

где

$$Q_a(z) = \prod_{q_n \leqslant 2a} \left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right).$$

Поскольку все $a_nQ_a(\lambda_n)$ $(\lambda_n \leqslant a)$ одного знака, можно считать, что $a_nQ_a(\lambda_n) \geqslant 0$ $(\lambda_n \leqslant a)$. Имеем

$$M_a^*(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} \left|F_a^*(\sigma + it)\right| = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\delta} q_a(t) F_a(t+\sigma)\, dt, \tag{19}$$

где $q_a(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $Q_a(z)$, $\delta = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w_1(t) = \beta^{1/2}(t)w(t)$. Но

$$\ln M(Q_v, r) = \ln \max_{|z|=r} |Q_v(z)| \leqslant \int\limits_0^{2v} \ln\left(1 + \frac{r^2}{t^2}\right) dq(t) = q(2v) \ln\left(1 + \frac{r^2}{4v^2}\right)$$

$$= 2r^2 \int\limits_0^{2v} \frac{q(t)}{t(t^2+r^2)}\, dt \leqslant \frac{q(2v)}{v} r + 2N_q(2v) \leqslant \frac{1}{2}\delta r + 2w(v),$$

$$v = v(\sigma) \geqslant v_1, \quad q(t) = \sum_{q_n \leqslant t} 1.$$

Следовательно, с учетом (18) при $\sigma \to \infty$ будет

$$\delta \max_{|t|=\delta} |q_v(t)| \leqslant \delta \int\limits_0^{\infty} M(Q_v, r) e^{-\delta r}\, dr < \mu^{o(1)}(\sigma). \tag{20}$$

Далее, применяя лемму 1, получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E_1 \in [0, \infty)$ нулевой нижней плотности

$$\ln \mu(\sigma + 4\delta^*) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad \delta^* = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}. \tag{21}$$

Тогда при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$\sum_{\lambda_n > v(\sigma)} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + 3\delta^*)} < \mu(\sigma + 3\delta^*) \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-\delta^* \lambda_n}$$

$$< \mu^{1+o(1)}(\sigma) \exp[-3(1 + o(1)) \ln \mu(\sigma)] < 1. \tag{22}$$

Отсюда с учетом (21) при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$ имеем

$$M(\sigma + 3\delta^*) \leqslant \mu(\sigma + 4\delta^*)[\lambda(ev(\sigma)) + 1] < M^{1+o(1)}(\sigma), \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1.$$

Следовательно, при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$\ln M(\sigma + 3\delta^*) = (1 + o(1)) \ln M(\sigma). \tag{23}$$

Учитывая (20), (22), из (19) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$M_v^*(\sigma) \leqslant M^{1+o(1)}(\sigma)\big(\max_{|\xi-\sigma|\leqslant\delta} |F(\xi) + 1|\big). \tag{24}$$

Но при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$M(\sigma) \leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant v(\sigma)} |a_n| e^{\lambda_n \sigma} + 1 = \sum_{\lambda_n \leqslant v(\sigma)} (|a_n||Q_v(\lambda_n)| e^{\lambda_n \sigma}) |Q_v(\lambda_n)|^{-1} + 1.$$

Отсюда ввиду леммы 4, оценки (17), равенства (18) следует, что при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$M(\sigma) \leqslant \mu^{o(1)}(\sigma)M_v^*(\sigma) \leqslant M^{o(1)}(\sigma)M_v^*(\sigma).$$

С учетом этой оценки из (24) окончательно получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$, $dE_1 = 0$,

$$\begin{gathered} M^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|\xi-\sigma|\leqslant\delta} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \\ |\xi^* - \sigma| = \delta, \quad \delta = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}, \quad w_1(t) = \beta^{1/2}(t)w(t). \end{gathered} \tag{25}$$

Положим $B = [0,\infty)\setminus E_1$. Найдется последовательность $\{\sigma_i\}$ $(\sigma_i \in B)$ такая, что $\sigma \uparrow \infty$, $\sigma_i + \delta_i \leqslant \sigma_{i+1}$, причем $\sigma_{i+1} - \delta_{i+1} < \inf\{\sigma : \sigma \in B,\ \sigma > \sigma_i + \delta_i\}$, где $\delta_i = \delta(v(\sigma_i))$ $(i \geqslant 1)$. Тогда

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[\sigma_i - \delta_i, \sigma_i + \delta_i].$$

Положим $g(z) = F(z + \xi^*)$. Из (25) видно, что $|g(0)| > 1$ при $\sigma \in B \cap [\sigma_0, \infty)$ $(\sigma_0 > 0)$. Полагая в (25) $\sigma = \sigma_i$, $\delta = \delta_i$, а в лемме 3 $N = 3$, $r = [\beta(v(\sigma_i))]^{-1/2}$, $R = 2\delta_i^*$, $(\delta_i^* = \frac{w^*(v(\sigma_i))}{v(\sigma_i)})$, получим, что в круге $\{z : |z| \leqslant 2\delta_i\}$, но вне исключительных кружков $V_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке

$$\sum_n p_n^{(i)} \leqslant 2\delta_i\beta_i^{-1/2}, \tag{26}$$

выполняется оценка (11). Здесь $\beta_i = \beta(v(\sigma_i))$. Тогда для всех $z$ из круга $\{z : |z| \leqslant \delta_i\}$, но вне кружков $V_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке (26), из (11) при $i \to \infty$ имеем

$$\ln|g(z)| \geqslant \left[1 + o(1) - 15\frac{L}{\ln|g(0)|}\right] \ln|g(0)|. \tag{27}$$

Учитывая, что $g(z) = F(z+\xi^*)$, а также используя оценки (25), (23), (27), получаем, что для всех $z$ из круга $\{z : |z - \sigma_i| \leqslant \delta_i\}$, но вне исключительных кружков $C_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов не больше $2\delta_i\beta_i^{-1/2}$,

$$\ln|F(z)| > (1 + o(1))\ln M(\sigma_i), \quad i \to \infty. \tag{28}$$

Пусть $E_2$ — проекция множества $\bigcup_{i,n} C_n^{(i)}$ на вещественную ось. Убедимся, что $DE_2 = 0$. Действительно, пусть $\sigma_i < \sigma \leqslant \sigma_{i+1}$. Тогда

$$\frac{\operatorname{mes}(E_2 \cap [0,\sigma])}{\sigma} \leqslant \frac{4}{\sigma}\sum_{k=1}^{i}\delta_k\beta_k^{-1/2} + 4\beta_{i+1}^{-1/2}. \tag{29}$$

Поскольку $\beta_k \to \infty$ при $k \to \infty$, а $\sigma \geqslant 2\sum\limits_{k=1}^{i}\delta_k$, из (29) вытекает, что $DE_2 = 0$. Тогда, учитывая (23), из (28) окончательно получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне $E = E_1 \cup E_2$, $dE = 0$, будет

$$\ln|F(\sigma)| = (1 + o(1))\ln M(\sigma).$$

Достаточность доказана.

**2.** Необходимость. Пусть $l \notin A^-$. Тогда

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \sum_{\mu_n \leqslant r} \frac{1}{\mu_n} = \gamma > 0. \tag{30}$$

Положим

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right).$$

Последовательность $\{\mu_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность. Поэтому из результатов работы [7] следует, что

$$\ln|\Phi'(\mu_n)| = -\int_0^1 \frac{\mu(t;\mu_n)}{t}\,dt + O(\mu_n), \tag{31}$$

где $\mu(t;\mu_n)$ — число точек $\mu_i$ ($\mu_i \neq \mu_n$) из отрезка $\{h : |h - \mu_n| \leqslant t\}$. С учетом условий (4) из представления (31) получаем, что

$$-\ln|\Phi'(\mu_n)| = O(\mu_n), \quad n \to \infty. \tag{32}$$

Введем в рассмотрение ряд

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s} \quad (s = \sigma + it), \tag{33}$$

где

$$a_k = \begin{cases} \frac{\varphi^2(\mu_n)}{\Phi'(\mu_n)(1+\mu_n)^2}, & k = p_n, \\ 0, & k \neq p_n \end{cases} \quad (n \geqslant 1), \quad \varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z/\mu_n)e^{-z/\mu_n}.$$

Из условий (30), (32) следует, что ряд (33) абсолютно сходится во всей плоскости и его сумма имеет конечный $R$-порядок, $|F(\sigma)| = O(1)$ при $\sigma \to +\infty$ [5]. Поскольку $\{p_n\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (33), необходимость установлена.

Замечание. Если функция $F(s)$, заданная рядом (5), имеет конечный $R$-порядок $\rho_R$ и $l \in A^+$, то $\rho_R = \rho_0$, где

$$\rho_0 = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln|F(\sigma)|}{\sigma}.$$

Действительно, поскольку $l \in A^+$, равенство (7) выполняется вне $E \subset [0,\infty)$, $DE = 0$ (утверждение леммы 1 справедливо в этом случае вне некоторого множества нулевой плотности). Отсюда следует, что $\rho_R = \rho_0$ [6].

## § 3. Доказательство теоремы 2

**1.** Достаточность доказывается так же, как и достаточность в теореме 1. Действительно, и в этом случае при $\sigma \to \infty$ вне $E_1 \subset [0,\infty)$, $dE_1 = 0$, имеет место оценка (25), причем согласно лемме 2

$$\frac{\operatorname{mes}(E_1 \cap [0,\sigma_n^*])}{\sigma_n^*} = o(1), \quad \sigma_n^* \to \infty,$$

где последовательность $\{\sigma_n^*\}$ выбрана из условия $\ln\ln M(\sigma_n^*) = O(\sigma_n^*)$, $\sigma_n^* \to \infty$.

Оценка (28) также имеет место. Она справедлива для всех $z$ из круга $\{z : |z - \sigma_i| \leqslant \delta_i\}$, но вне исключительных кружков $C_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов не больше $2\beta_i^{-1/2}\delta_i$. Здесь $\delta_i = \delta(v(\sigma_i))$, а $\delta = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w = w(t)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 2 (она определяется точно так же, как и в теореме 1).

Пусть $E_2$ — проекция множества $\bigcup\limits_{i,n} C_n^{(i)}$ на вещественную ось. Оценим относительную меру множества $E_2$. Для этого заметим, что последовательность $\{\sigma_n\}$ ($\sigma_n \in B$, $B = [0,\infty) \setminus E_1$) из доказательства теоремы 1 можно выбрать так, что если $\sigma_n' = \inf\{\sigma : \sigma \in B,\ \sigma > \sigma_n + \delta_n\}$, то $0 \leqslant \sigma_{n+1} - \sigma_n' \leqslant \delta_n$.

Пусть $\sigma_k < \sigma_n^* \leqslant \sigma_{k+1}$. Поскольку $\ln\ln M(\sigma_n^*) \leqslant d\sigma_n^*$ ($n \geqslant 1$), с учетом (18) получаем, что $\sigma_n^* \geqslant \alpha \ln v(\sigma_n^*) > \alpha \ln v(\sigma_k)$ ($\alpha > 0$). Тогда

$$\frac{\operatorname{mes}(E_2 \cap [0, \sigma_n^*])}{\sigma_n^*} \leqslant \frac{4}{\sigma_k} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^{-1/2}\delta_i + \frac{4\delta_k}{\alpha \ln v(\sigma_k)},$$

где

$$\delta_k = \frac{\beta^{-1/2}(v(\sigma_k)) w(v(\sigma_k))}{v(\sigma_k)} < \frac{w^*(v(\sigma_k))}{v(\sigma_k)},$$

$w^*(t) = \beta(t)w(t)$ ($0 < \beta(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$) — функция, удовлетворяющая условиям леммы 2. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{4\delta_k}{\alpha \ln v(\sigma_k)} = 0.$$

Но так как $\beta_i^{-1/2} \to 0$ при $i \to \infty$, а $\sigma_k \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta_i$, то $dE_2 = 0$. Значит, оценка (7) имеет место при $\sigma \to \infty$ вне $E = E_1 \cup E_2$, $dE = 0$. Достаточность теоремы 2 установлена.

**2.** Необходимость. Пусть $l \notin A^-$. Тогда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\ln r} \sum_{\mu_n \leqslant r} \frac{1}{\mu_n} = \gamma > 0.$$

Следовательно, ввиду (32) ряд (33) абсолютно сходится во всей плоскости, имеет конечный нижний $R$-порядок и $|F(\sigma)| = O(1)$ при $\sigma \to +\infty$ [5]. Необходимость доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken and Singularitäten von Potenzeihen // Math. Z. 1929. Bd 29. S. 549–560.
2. *Шеремета М. Н.* Об одной теореме Полиа // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35, № 1. С. 119–124.
3. *Edrei A.* Gap and density theorems for entire functions // Scripta Math. 1957. Bd 23. S. 117–141.
4. *Шеремета М. Н.* О целых функциях с вещественными тейлоровскими коэффициентами // Укр. мат. журн. 1985. Т. 37, № 6. С. 786–787.
5. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 2. С. 73–92.
6. *Гайсин А. М.* Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 4. С. 47–56.
7. *Красичков И. Ф.* Оценка снизу для целых функций конечного порядка // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 4. С. 840–861.


*г. Уфа* *Статья поступила 4 июля 1995 г.*