Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. F. Kleimenov, The existence and stability of periodic solutions of systems with lag which are close to a Ljapunov system, *Differ. Uravn.*, 1968, Volume 4, Number 8, 1433–1440

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
March 24, 2025, 11:49:41

АВГУСТ 1968 г., ТОМ IV, № 8

*УДК 517.949.22*

# СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМЕ ЛЯПУНОВА

А. Ф. КЛЕЙМЕНОВ

1. Рассматривается система

$$\frac{dx_1}{dt} = -kx_2 + X_1(x_1, \ldots, x_n) + \mu F_1(t, x_1, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau), \mu),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = kx_1 + X_2(x_1, \ldots, x_n) + $$

$$+ \mu F_2(t, x_1, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau), \mu), \tag{1.1}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=3}^{n} a_{sj} x_j + X_s(x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \mu F_s(t, x_1, \ldots, x_n, x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau), \mu)$$

$$(s = 3, \ldots, n),$$

где $X_i$ — аналитические функции, разложения которых в ряды по степеням $x_1, \ldots, x_n$ начинаются членами не ниже 2-го порядка; функции $F_i$ непрерывны и периодичны по $t$ с периодом $2\pi$, по остальным аргументам разлагаются в степенные ряды, содержащие свободные члены; $\tau$ — постоянное запаздывание; $\mu$ — малый параметр.

Предполагается, что порождающая система

$$\frac{dx_1}{dt} = -kx_2 + X_1(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = kx_1 + X_2(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.2}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=3}^{n} a_{sj}x_j + X_s(x_1, \ldots, x_n)$$

является системой Ляпунова [1], т. е. уравнение $|a_{ij} - \rho\delta_{ij}| = 0$ не имеет нулевых корней и корней вида $\pm Nk\sqrt{-1}$ ($N$ — целое число), и, кроме того, система (1.2) допускает первый интеграл.

Будем исследовать случай главного резонанса. Согласно [1], главный резонанс имеет место, если выполнены следующие условия:

1) число $k$ — целое; 2) хотя бы одна из величин

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \int_0^{2\pi} [F_1(t, 0, \ldots, 0)\cos kt + F_2(t, 0, \ldots, 0)\sin kt]\, dt,\\
C_2 &= \int_0^{2\pi} [F_1(t, 0, \ldots, 0)\sin kt - F_2(t, 0, \ldots, 0)\cos kt]\, dt
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

отлична от нуля.

Известно [1], что система Ляпунова (1.2) допускает зависящее от двух параметров периодическое решение, период которого вычисляется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k}(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots), \tag{1.4}$$

где первый отличный от нуля коэффициент $h_i$ имеет четный индекс; $c$ — значение $x$ в начальный момент $t = 0$.

Имеет место следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы И. Г. Малкина [1] на системы с запаздыванием, близкие к системам Ляпунова.

Теорема. *При главном резонансе существует одно и только одно периодическое решение системы* (*1.1*), *обращающееся при* $\mu = 0$ *в тривиальное. Это решение разлагается в ряд по степеням* $\mu^{\frac{1}{2\beta+1}}$, *где* $2\beta$ — *младшая степень величины* $c$ *в разложении периода* (*1.4*).

В доказательстве, данном И. Г. Малкиным для обыкновенных уравнений, использовался метод Пуанкаре. Для систем с запаздыванием определяющие уравнения Пуанкаре будут функциональными. Это обстоятельство создает определенные трудности. Однако задача может быть успешно решена с помощью метода вспомогательных систем [2, 3].

Наряду с системой (1.1) рассмотрим вспомогательную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -kx_2 + X_1 + \mu F_1 + W_1\cos kt + W_2 \sin kt,\\
\frac{dx_2}{dt} &= kx_1 + X_2 + \mu F_2 + W_1 \sin kt - W_2\cos kt,\\
\frac{dx_s}{dt} &= \sum_{j=3}^{n} a_{sj}x_j + X_s + \mu F_s,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(X_1 + \mu F_1)\cos kt + (X_2 + \mu F_2)\sin kt]\, dt,\\
W_2 &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(X_1 + \mu F_1)\sin kt - (X_2 + \mu F_2)\cos kt]\, dt.
\end{aligned}
$$

Зададим начальные условия $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ и будем искать решение системы (1.5) методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем

$$x_{10} = a\cos kt - b\sin kt, \quad x_{20} = a\sin kt + b\cos kt,$$
$$x_{s0} = 0, \quad W_{10} = W_{20} = 0 \quad (s = 3, \ldots, n).$$

В качестве $i$-го приближения примем периодическое решение системы

$$\frac{dx_{1i}}{dt} = -kx_{2i} + X_1^{(i-1)} + \mu F_1^{(i-1)} + W_{1i}\cos kt + W_{2i}\sin kt,$$

$$\frac{dx_{2i}}{dt} = kx_{1i} + X_2^{(i-1)} + \mu F_2^{(i-1)} + W_{1i}\sin kt - W_{2i}\cos kt,$$

$$\frac{dx_{si}}{dt} = \sum_{j=3}^{n} a_{sj}x_j + X_s^{(i-1)} + \mu F_s^{(i-1)},$$

$$W_{1i} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(X_1^{(i-1)} + \mu F_1^{(i-1)})\cos kt + (X_2^{(i-1)} + \mu F_2^{(i-1)})\sin kt]\,dt,$$

$$W_{2i} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(X_1^{(i-1)} + \mu F_1^{(i-1)})\sin kt - (X_2^{(i-1)} + \mu F_2^{(i-1)})\cos kt]\,dt.$$

Здесь индекс $i-1$ у функций $X_k$, $F_k$ означает подстановку $(i-1)$-го приближения.

Производя соответствующие оценки, можно убедиться в том, что при достаточно малых $a$, $b$, $\mu$ последовательности $\{x_{ki}\}$, $\{W_{1i}\}$, $\{W_{2i}\}$ равномерно сходятся к некоторым функциям $x_k(t, a, b, \mu)$, $W_1(a, b, \mu)$, $W_2(a, b, \mu)$, которые будут аналитичны по $a$, $b$, $\mu$, и, кроме того, функции $x_k$ будут непрерывны и периодичны по $t$ с периодом $2\pi$. Условия

$$W_1(a, b, \mu) = 0, \quad W_2(a, b, \mu) = 0 \tag{1.6}$$

будут необходимыми и достаточными для существования периодического решения системы (1.1).

Применяя метод вспомогательных систем к системе вида (1.1) без запаздывания и используя результаты И. Г. Малкина ([1], стр. 466), получим

$$\begin{aligned} W_1(a, b, 0) &= -kh_{2\beta}(a^2+b^2)^\beta b + \cdots, \\ W_2(a, b, 0) &= -kh_{2\beta}(a^2+b^2)^\beta a + \cdots, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где ненаписанные члены имеют относительно величин $a$, $b$ порядок, бо́льший $2\beta+1$.

Учитывая (1.7), условия (1.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} -kh_{2\beta}(a^2+b^2)^\beta b + \cdots - \frac{\mu}{2\pi}[C_1 + \Phi_1(a, b, \mu)] &= 0, \\ -kh_{2\beta}(a^2+b^2)^\beta a + \cdots - \frac{\mu}{2\pi}[C_2 + \Phi_2(a, b, \mu)] &= 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\Phi_1$ и $\Phi_2$ — аналитические функции, обращающиеся в нуль при $a = b = \mu = 0$.

Уравнения (1.8) допускают в окрестности $\mu = 0$ только одно вещественное решение вида

$$a = a_1 \nu + a_2 \nu^2 + \cdots,$$

$$b = b_1 \nu + b_2 \nu^2 + \cdots,$$

где $\nu = \mu^{\frac{1}{2\beta+1}}$ [1]. Следовательно, система (1.1) допускает единственное периодическое решение, которое может быть представлено в виде

$$x_k(t, \nu) = x_{k1}(t)\nu + x_{k2}(t)\nu^2 + \cdots \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{1.9}$$

где $x_{ki}(t)$ — периодические функции $t$.

Теорема доказана.

При практическом вычислении резонансное решение системы (1.1) можно искать в виде рядов (1.9) с неизвестными периодическими коэффициентами. На основании доказанной теоремы такие ряды всегда найдутся. Вследствие единственности построенные ряды будут сходиться при достаточно малом $\mu$.

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости резонансного решения (1.9). Уравнения в вариациях для системы (1.1) будут

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -k\xi_2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_j} + \nu^{2\beta+1}\frac{\partial F_1}{\partial x_j}\right)\xi_j + \nu^{2\beta+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j(t-\tau)}\right)\xi_j(t-\tau),$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = k\xi_1 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_j} + \nu^{2\beta+1}\frac{\partial F_2}{\partial x_j}\right)\xi_j +$$

$$+ \nu^{2\beta+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_j(t-\tau)}\right)\xi_j(t-\tau), \tag{2.1}$$

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_{j=3}^{n} a_{sj}\xi_j + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_j} + \nu^{2\beta+1}\frac{\partial F_s}{\partial x_j}\right)\xi_j +$$

$$+ \nu^{2\beta+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_j(t-\tau)}\right)\xi_j(t-\tau),$$

где скобки $(\cdots)$ означают, что после дифференцирования произведена подстановка решения (1.9).

Трудность исследования на устойчивость резонансного решения состоит в том, что для подсчета характеристических показателей необходимо сделать $2\beta + 1$ приближений. Однако в некоторых частных случаях, встречающихся на практике, этих затруднений удается избежать.

Допустим, что разложения функций $X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ в степенные ряды начинаются членами $(2\beta + 1)$-го порядка относительно $x_1$, $x_2$. Предположим далее, что все корни уравнения $|a_{ij} - \rho\delta_{ij}| = 0$ имеют отрицательные действительные части.

В системе (2.1) сделаем замену $\xi_i = e^{\nu\alpha t}u_i$, после чего рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{du_1}{dt} = -ku_2 + U_1 + W_1\cos kt + W_2\sin kt,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{du_2}{dt} = ku_1 + U_2 + W_1 \sin kt - W_2 \cos kt,\\
&\frac{du_s}{dt} = \sum_{j=3}^{n} a_{sj} u_j + U_{(}\\
&W_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (U_1 \cos kt + U_2 \sin kt)\, dt,\\
&W_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (U_1 \sin kt - U_2 \cos kt)\, dt,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где обозначено

$$U_k(t,\ u_1,\ \ldots,\ u_n,\ u_1(t-\tau),\ \ldots,\ u_n(t-\tau),\ \nu) = -\nu\alpha u_k +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_j} + \nu^{2\beta+1}\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\right)u_j + \nu^{2\beta+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_j(t-\tau)}\right)u_j(t-\tau).$$

Периодическое решение системы (2.2) будем искать в виде

$$u_k = \sum_{\alpha=0}^{\infty} u_{k\alpha}\nu^{\alpha}, \quad W_1 = \sum_{\alpha=0}^{\infty} W_{1\alpha}\nu^{\alpha}, \quad W_2 = \sum_{\alpha=0}^{\infty} W_{2\alpha}\nu^{\alpha}$$

с начальными условиями

$$u_{10}(0) = \beta_1, \quad u_{20}(0) = \beta_2, \quad u_{1i}(0) = u_{2i}(0) = 0, \quad i \geqslant 1.$$

В результате получим

$$u_{10} = \beta_1 \cos kt - \beta_2 \sin kt, \quad u_{20} = \beta_1 \sin kt + \beta_2 \cos kt,$$
$$u_{30} = \ldots = u_{n0} = 0, \quad W_{10} = W_{20} = 0;$$
$$u_{11} = \ldots u_{n1} = 0, \quad W_{11} = \alpha\beta_1, \quad W_{21} = -\alpha\beta_2.$$

В последующих приближениях, включая $(2\beta-1)$-ое, имеем

$$u_{1i} = \ldots = u_{ni} = W_{1i} = W_{2i} = 0 \quad (i = 2,\ \ldots,\ 2\beta - 1).$$

Для величин $W_{1,2\beta}$, $W_{2,2\beta}$ получим следующие выражения:

$$W_{1,2\beta} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)_1 u_{10} + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_1 u_{20}\right]\cos kt + \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_1 u_{10} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 u_{20}\right]\sin kt\right\} dt,$$

$$W_{2,2\beta} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)_1 u_{10} + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_1 u_{20}\right]\sin kt - \right.$$
$$\left. - \left[\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_1 u_{10} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 u_{20}\right]\cos kt\right\} dt.$$

Здесь скобки $(\cdots)_1$ означают подстановку после дифференцирования $x_k = x_{k1}(t)$.

Приравнивая $W_1 = \nu W_{11} + \nu^{2\beta} W_{1,2_\beta} + \ldots$ и $W_2 = \nu W_{21} + \nu^{2\beta} W_{2,2_\beta} + \ldots$ нулю, получим относительно $\beta_1$, $\beta_2$ следующую однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\beta_1 (\alpha\nu - A\nu^{2\beta}) + \beta_2 B \nu^{2\beta} = 0, \\ &-\beta_1 C \nu^{2\beta} + \beta_2 (-\alpha\nu + D\nu^{2\beta}) = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)_1 \cos^2 kt + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_1 \cos kt \sin kt + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 \sin^2 kt\right] dt, \\ B &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_1 \sin^2 kt + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 \cos kt \sin kt - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_1 \cos^2 kt\right] dt, \\ C &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_1 \sin^2 kt + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 \cos kt \sin kt - \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_1 \cos^2 kt\right] dt, \\ D &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)_1 \sin^2 kt - \right. \\ &\left. - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_1 \sin kt \cos kt + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 \cos^2 kt\right] dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для существования нетривиального решения системы (2.3) необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю. Это условие дает квадратное уравнение относительно $\alpha$:

$$\alpha^2 - (A + D)\nu^{2\beta-1}\alpha + (AD - BC)\nu^{4\beta-2} = 0. \tag{2.5}$$

Сумма корней уравнения (2.5) равна

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (A + D)\nu^{2\beta-1} = \frac{\nu^{2\beta-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 dt. \tag{2.6}$$

Здесь возможны 3 случая:

$$1) \qquad \frac{\nu^{2\beta-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 dt < 0. \tag{2.7}$$

Покажем, что условие (2.7) достаточно для устойчивости решения (1.9). Здесь мы воспользуемся тем обстоятельством, что независящие от $\mu$ члены характеристического уравнения в форме Пуанкаре, составленного для резонансного решения (1.9), будут теми же, что и для уравнений без запаздывания, рассмотренных в [1]. Подсчитывая свободный член характеристического уравнения, убедимся, что при достаточно малом $\mu$ имеет место неравенство

$$(1-e^{2\pi\alpha_1})(1-e^{2\pi\alpha_2})\prod_{i=1}^{n}(1-e^{2\pi\rho_i})>0,$$

где $\rho_i$ — корни уравнения $|a_{ij}-\rho\delta_{ij}|=0$. В силу сделанных предположений о корнях $\rho_i$

$$\prod_{i=1}^{n}(1-e^{2\pi\rho_i})>0,$$

поэтому

$$(1-e^{2\pi\alpha_1})(1-e^{2\pi\alpha_2})>0. \tag{2.8}$$

Из неравенств (2.7) и (2.8) следует, что

$$\operatorname{Re}\alpha_1<0, \quad \operatorname{Re}\alpha_2<0,$$

т. е. решение (1.9) устойчиво.

$$2) \qquad \frac{\nu^{2\beta-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 dt>0. \tag{2.9}$$

В этом случае неравенства (2.7) и (2.9) дают

$$\operatorname{Re}\alpha_1>0, \quad \operatorname{Re}\alpha_2>0,$$

и решение (1.9) неустойчиво.

$$3) \qquad \frac{\nu^{2\beta-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_1 dt=0.$$

Третий случай является наиболее интересным, так как, по-видимому, именно он характерен для систем Ляпунова. Этот факт подтверждается во всех известных нам примерах систем Ляпунова.

Тогда, если $AD-BC<0$ ($A$, $B$, $C$, $D$ определены формулами (2.4)), то один из корней уравнения (2.5) будет положительным и, следовательно, решение (1.9) будет неустойчивым. Если выполнено неравенство $AD-BC\geqslant 0$, то для решения задачи устойчивости необходимо рассмотреть $(2\beta+1)$-ое приближение. Получим

$$W_{1,2\beta+1}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)_1 x_{k2}u_{j0}+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j}\right)_0 u_{j0}+\right.\right.$$
$$+\left.\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j(t-\tau)}\right)_0 u_{j0}(t-\tau)-\alpha\,u_{1,2\beta}\right]\cos kt+\left[\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)_1 x_{k2}u_{j0}+\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_j}\right)_0 u_{j0}+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_j(t-\tau)}\right)_0 u_{j0}(t-\tau)-\alpha\,u_{2,2\beta}\right]\sin kt\right\}dt,$$

$$W_{2,2\beta+1} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\left[\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)_1 x_{k2}u_{j0} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j}\right)_0 u_{j0} + \right.\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j(t-\tau)}\right)_0 u_{j0}(t-\tau) - \alpha\, u_{1,2\beta}\Bigg]\sin kt - \left[\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)_1 x_{k2}u_{j0} + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_j}\right)_0 u_{j0} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_j(t-\tau)}\right)_0 u_{j0}(t-\tau) - \alpha\, u_{2,2\beta}\right]\cos kt\right\} dt.$$

Здесь скобки $(\cdots)_0$ означают подстановку после дифференцирования $x_k = \mu = 0$. Как и выше, показывается, что условие

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\nu^{2\beta}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_1\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_2\,\partial x_k}\right)_1 x_{k2} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_0 + \right.$$

$$+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)_0 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1(t-\tau)} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2(t-\tau)}\right)_0 \cos k\tau +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1(t-\tau)} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2(t-\tau)}\right)_0 \sin k\tau\right\} dt < 0 \tag{2.10}$$

является достаточным для устойчивости решения (1.9).

Если

$$\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x_1\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x_2\,\partial x_k}\right)_1 x_{k2}\,dt = 0,$$

что имеет место, например, для систем, близких к консервативным, то достаточное условие устойчивости примет вид

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)_0 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1(t-\tau)} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2(t-\tau)}\right)_0 \cos k\tau + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1(t-\tau)} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2(t-\tau)}\right)_0 \sin k\tau\right] dt < 0.$$

Автор благодарит С. Н. Шиманова за ценные советы.

## Литература

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Шиманов С. Н. ПММ, т. XVI, в. 2, 129—146, 1952.
3. Шиманов С. Н. ПММ, т. XIX, в. 2, 225—228, 1955.

*Поступила в редакцию*
*13 июня 1967 г.*

*Свердловское отделение*
*Математического института*
*им. В. А. Стеклова (СОМИ)*