

УДК 517.924

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ¹⁾

© 2007 г. Г. Л. Хатламаджиян

(344006 Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105, Ростовский гос. ун-т)

e-mail: gaspard@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.06.2006 г.

Рассматривается задача об устойчивости для некоторых классов систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами. Спецификой этих систем является наличие в них быстро осциллирующих слагаемых с большими амплитудами. Для каждого класса уравнений описана процедура исследования устойчивости решений в критическом случае, которая базируется на методе Штокало–Колесова. Указана схема обоснования. Изложенная теория проиллюстрирована на примере линеаризованной задачи об устойчивости верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса. Библ. 15.

Ключевые слова: линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, большие высокочастотные почти периодические коэффициенты, критический случай устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется устойчивость решений некоторых классов линейных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае. Дифференциальным уравнениям с большими высокочастотными слагаемыми посвящены, например, работы [1]–[7], в которых можно найти сведения об истории вопроса.

В разд. 1 настоящей статьи рассматривается уравнение вида

$$\dot{\mathbf{x}} = [A(t, \omega t) + \sqrt{\omega}B(t, \omega t)]\mathbf{x}, \quad (1)$$

в разд. 2 речь идет о системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A(t, \omega t)\mathbf{x} + B(t, \omega t)\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= F(t, \omega t)\mathbf{x} + G(t, \omega t)\mathbf{y} + \omega H(t, \omega t)\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2)$$

в разд. 3 исследуется уравнение n -го порядка вида

$$\mathbf{x}^{(n)} = \sum_{\alpha=n-p+1}^{n-1} A_{\alpha}\mathbf{x}^{(\alpha)} + \sum_{q=0}^p \sum_{\alpha=0}^{n-p-q} \omega^q A_{q,\alpha}(t, \omega t)\mathbf{x}^{(\alpha)}, \quad p \leq \frac{n}{2}, \quad (3)$$

и полученный результат применяется к линеаризованной задаче об устойчивости верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса. Отметим, что все рассматриваемые уравнения являются векторными (т.е. представляют собой системы уравнений). В уравнениях (1)–(3) элементы всех матриц-функций являются тригонометрическими многочленами относительно обеих переменных. Кроме того, матрицы-функции в больших слагаемых (т.е. $B(t, \omega t)$ в (1), $H(t, \omega t)$ в (2), а также все $A_{q,\alpha}(t, \omega t)$ с положительными q в (3)) имеют нулевое среднее по второй переменной.

Методы данной работы базируются на алгоритме Штокало–Колесова (см. [8]), используемом при исследовании устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами, в сочетании с приемами теории усреднения (см. [9]–[11]).

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00287-а).

Отметим, что в [6] обоснована модификация алгоритма Штокало–Колесова для линейных абстрактных параболических уравнений вида (1). Таким образом, результат разд. 1 данной работы является следствием работы [6, теорема 2.1]. Для полноты изложения отдельно рассмотрим уравнения вида (1). Кроме того, мы считаем, что непосредственное изложение алгоритма и его обоснование для обыкновенных дифференциальных уравнений представляет самостоятельный интерес.

Содержание данной статьи более подробно изложено в депонированных работах [12], [13]. Здесь лишь добавлено замечание 1, а также предлагается менее громоздкий, чем в [12], способ обоснования в случае уравнений (1), (2).

1. УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

1.1. Формулировка результата

Пусть $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{|k| \leq k_0} A_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} \mathbf{x} + \sqrt{\omega} \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} B_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} \mathbf{x}. \quad (1.1)$$

Здесь $A_k(t)$ и $B_k(t)$ – квадратные матрицы порядка n , элементами которых являются комплексные тригонометрические многочлены, ω – большой положительный параметр, λ_k – вещественные числа. При этом $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{-k} = -\lambda_k \neq 0$ для $k = 1, 2, \dots, k_0$. Предполагается, что λ_k попарно различны.

Пусть матрица A составлена из чисел a_{jk} . Через \bar{A} обозначим матрицу, элементами которой являются \bar{a}_{jk} , где черта обозначает комплексное сопряжение. Будем считать, что коэффициент при \mathbf{x} в правой части (1.1) – вещественная матрица-функция, т.е. $A_k(t) = \bar{A}_{-k}(t)$, $B_k(t) = \bar{B}_{-k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, k_0$), а $A_0(t)$ – вещественная матрица-функция.

Введем в рассмотрение матрицу

$$C = A_0(t) + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{i}{\lambda_k} B_k(t) B_{-k}(t)$$

и потребуем, чтобы она не зависела от t (заметим, что если все матрицы-функции $B_k(t)$ вещественны или $n = 1$, то $C = A_0$).

Предположим, что спектр $\sigma(C)$ содержится в замкнутой левой полуплоскости, причем хотя бы одна его точка принадлежит мнимой оси:

$$\sigma(C) \cap \{z | \operatorname{Re} z > 0\} = \emptyset, \quad \sigma(C) \cap \{z | \operatorname{Re} z = 0\} \neq \emptyset.$$

Пусть R_-^0 – корневое подпространство матрицы C , отвечающее ее собственным значениям с нулевыми действительными частями, а m – его размерность.

Рассмотрим усредненное уравнение

$$\dot{\mathbf{y}} = C\mathbf{y}. \quad (1.2)$$

Обозначим через $X_0(t)$ матрицу порядка $n \times m$, вектор-столбцами которой является некоторый набор из линейно независимых решений уравнения (1.2) с начальными условиями из R_-^0 .

Представим $X_0(t)$ следующим образом:

$$X_0(t) = U_0(t) e^{D_0 t}.$$

Столбцы $\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_m(t)$ матрицы $U_0(t)$ принадлежат к классу вектор-функций, имеющих вид

$$\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\varepsilon} e^{i\mu t} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} e^{-i\mu t}, \quad (1.3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – постоянный комплексный вектор, а μ – некоторое вещественное число, D_0 – жорданова матрица порядка m с единственным собственным значением, равным нулю, причем кратности

его элементарных делителей совпадают с кратностями элементарных делителей тех собственных значений матрицы C , которые лежат на мнимой оси.

“Критическую часть” формального матричного решения уравнения (1.1) будем искать в виде

$$X(t, \tau; \omega) = \left\{ U_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega^{-j/2} [U_j(t) + V_j(t, \omega t)] \right\} \exp \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-j/2} D_j \right) (t - \tau) \right]. \quad (1.4)$$

Неизвестные матрицы U_j, V_j, D_j ($j = 1, 2, \dots$) подчиним следующим требованиям. Элементами матриц U_j, V_j являются некоторые тригонометрические многочлены, причем средние всех матриц-функций V_j по второй переменной равняются нулю:

$$\langle V_j(t, \cdot) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_j(t, s) ds = 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть нулевые строки матрицы D_0 имеют номера $k_1 < \dots < k_p$ ($1 \leq p \leq m$). Обозначим через $K(D_0)$ совокупность квадратных матриц порядка m , у которых ненулевые элементы могут находиться только в строках с номерами k_1, \dots, k_p , и будем считать, что $D_j \in K(D_0)$ ($j = 1, 2, \dots$).

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначения

$$D_j(\omega) = \sum_{k=0}^j \omega^{-k/2} D_k, \quad (1.5)$$

$$U_j(t, \omega) = U_0(t) + \sum_{k=1}^j \omega^{-k/2} [U_k(t) + V_k(t, \omega t)] + \omega^{-\frac{j+1}{2}} V_{j+1}(t, \omega t).$$

Дадим следующие определения (см. [8]).

Определение 1. Дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = D_j(\omega)\eta, \quad (1.6)$$

рассматриваемое в \mathbb{R}^m , будем называть сильно устойчивым (неустойчивым), если по каждому $r > 0$ можно указать такое $\omega(r) > 0$, что при любом $\omega \geq \omega(r)$ решения каждого из дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta} = D_j(\omega)\eta + \omega^{-\frac{j+1}{2}} D\eta$$

устойчивы (неустойчивы), какова бы ни была матрица D , норма которой не превосходит r .

Матрицу $D_j(\omega)$ будем называть сильно устойчивой (неустойчивой), если таковым является соответствующее дифференциальное уравнение.

В [14] установлено, что при проверке сильной устойчивости (неустойчивости) матрицы $D_j(\omega)$, когда D_1, \dots, D_j принадлежат $K(D_0)$, можно ограничиться возмущающими матрицами D из класса $K(D_0)$. (На этот факт автору указал С.А. Гуда, которому он выражает искреннюю благодарность за это.)

Определение 2. Будем говорить, что построение алгоритма может быть завершено, если существует такой номер j , для которого дифференциальное уравнение (1.6) является либо сильно устойчивым, либо неустойчивым.

Справедлива

Теорема 1. Для любого целого неотрицательного j эффективно находятся частичные суммы $U_j(t, \omega)$ и $D_j(\omega)$.

Пусть построение алгоритма может быть завершено и j_0 – первый номер, при котором дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = D_{j_0}(\omega)\eta \equiv \sum_{k=0}^{j_0} \omega^{-k/2} D_k \eta \quad (1.7)$$

сильно устойчиво или неустойчиво. Тогда существует такое положительное число ω_1 , что при $\omega \geq \omega_1$ решения дифференциального уравнения (1.1) равномерно экспоненциально устойчивы или неустойчивы в зависимости от аналогичных свойств решений дифференциального уравнения (1.7).

Эффективное нахождение частичных сумм $U_j(t, \omega)$ и $D_j(\omega)$ сводится к решению m_j задач о почти периодических решениях неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x} = Cx + f(t),$$

где $f(t)$ – известный векторный тригонометрический многочлен такой, что указанная задача разрешима.

1.2. Доказательство результата

Подставим правую часть равенства (1.4) в уравнение (1.1) вместо x и приравняем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях ω в правой и левой части. При этом для краткости будем использовать обозначения $s = \omega t$, $\dot{U}_j = \frac{d}{dt} U_j(t)$, $V'_j(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} V_j(t, s)$ ($j = 1, 2, \dots$).

Приравняв коэффициенты при $\omega^{1/2}$, получаем

$$V'_1(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} B_k(t) e^{i\lambda_k s} U_0(t),$$

откуда находим

$$V_1(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} B_k(t) e^{i\lambda_k s} U_0(t). \tag{1.8}$$

Если рассмотреть коэффициенты при ω^0 и взять среднее по s от обеих частей, то, с учетом (1.8), получится равенство

$$\dot{X}_0(t) = CX_0(t),$$

объясняющее вид усредненного уравнения (1.2).

Предположим теперь, что нам известны матрицы $U_k(t)$, $V_{k+1}(t, \omega t)$ и D_k при $k = 0, 1, \dots, j - 1$. Из (1.8) следует справедливость этих предположений при $j = 1$.

Покажем, как найти группу матриц $U_j(t)$, $V_{j+1}(t, \omega t)$ и D_j .

Рассмотрим слагаемые, стоящие при $\omega^{-(j-1)/2}$, и вычтем из этих слагаемых их средние по переменной s , оставив, таким образом, члены с нулевым средним по s . Таким образом, выводим соотношение

$$V_{j+1}(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} B_k(t) e^{i\lambda_k s} U_j(t) + F_j(t, s), \tag{1.9}$$

где в $F_j(t, s)$ собраны известные слагаемые.

Рассмотрим коэффициенты при $\omega^{-j/2}$, используем последнее равенство, а также применим операцию усреднения по переменной s . В результате получим

$$\dot{U}_j(t) + U_0(t)D_j + U_j(t)D_0 = \Phi_j(t) + CU_j(t), \tag{1.10}$$

где $\Phi_j(t)$ – известная матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены.

Отсюда, поступая так же, как в п. 2 работы [8], находим $U_j(t)$ в классе матриц, составленных из тригонометрических многочленов и $D_j \in K(D_0)$, после чего из равенства (1.9) определяем $V_{j+1}(t, s)$. Первая часть теоремы 1, таким образом, доказана.

Справедливость второй части теоремы 1, представляющей собой обоснование изложенного алгоритма, устанавливается аналогично доказательству теоремы из [8]. При этом в качестве матрицы $\Pi_0(t, \omega)$, фигурирующей в замене переменных, в данном случае выступает блочная матрица

$$\Pi(t, \omega) = (U_{n_0}(t, \omega)Y(t, \omega)),$$

где $U_{n_0}(t, \omega)$ определяется равенством (1.5),

$$Y(t, \omega) = \left(E + \omega^{-\frac{1}{2}} \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} B_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} + \omega^{-1} \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} A_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} - \right. \\ \left. - \omega^{-1} \sum_{\substack{1 \leq |k|, |l| \leq k_0 \\ k \neq -l}} \frac{1}{\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)} B_k(t) B_l(t) e^{i(\lambda_k + \lambda_l) \omega t} \right) R,$$

а матрица R размера $n \times (n - m)$ составлена из произвольных базисных векторов из корневого подпространства матрицы C , отвечающего ее собственным значениям с отрицательными действительными частями. Здесь через E обозначена единичная матрица.

Замечание 1. В скалярном случае ($n = 1$) данный алгоритм неприменим: все D_j получаются равными нулю. Сказанное остается в силе, если рассматривать уравнение (1.1) в \mathbb{C} и, соответственно, не считать коэффициенты в правой части вещественными.

Наметим доказательство этого факта. Если $n = 1$, то $C = A_0$ и критический случай возможен, только если $A_0 = i\mu$ чисто мнимое. Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения: $A_{2,k}(t) = A_k(t)$, $|k| \leq k_0$; $A_{1,k}(t) = B_k(t)$, $1 \leq |k| \leq k_0$.

Возьмем $U_0(t) = e^{i\mu t}$, $D_0 = 0$. Тогда, согласно (1.8), имеем

$$V_1(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} A_{1,k}(t) e^{i\lambda_k s} e^{i\mu t}.$$

Теперь предположим, что для некоторого $j \geq 0$ мы получили

$$U_l(t) = e^{i\mu t}, \quad D_l = 0, \tag{1.11}$$

$$V_{l+1}(t, s) = \sum_{q=1}^l \sum_{j_1, \dots, j_q=1, 2} \sum_{\substack{\delta_{1j_r} \leq |l_r| \leq k_0 \\ j_1 + \dots + j_q \leq l \\ \lambda_r + \lambda_{r+1} + \dots + \lambda_{l_q} \neq 0 \\ r = q, q-1, \dots, 1}} \frac{(-i)^q}{\lambda_{l_q}(\lambda_{l_{q-1}} + \lambda_{l_q}) \dots (\lambda_{l_1} + \lambda_{l_2} + \dots + \lambda_{l_q})} \times \\ \times A_{j_1, l_1}(t) A_{j_2, l_2}(t) \dots A_{j_q, l_q}(t) e^{i(\lambda_{l_1} + \lambda_{l_2} + \dots + \lambda_{l_q})s} e^{i\mu t}, \quad l = 1, 2, \dots, j-1, \tag{1.12}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Если $j = 1$, то это предположение справедливо. Докажем формулы (1.11), (1.12) для $l = j$.

Формула (1.9) переписывается в виде

$$V_{j+1}(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} A_{1,k}(t) e^{i\lambda_k s} U_j(t) + F_j(t, s),$$

где $F_j(t, s)$ таково, что последнее равенство перейдет в (1.12) при $l = j$, если $U_j(t) = e^{i\mu t}$.

Соотношение (1.10) можно представить в данном случае в виде

$$\dot{U}_j(t) + D_j e^{i\mu t} - i\mu U_j(t) = \sum_{q=2}^{j+2} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_q=1, 2 \\ j_1 + \dots + j_q \leq j+2}} \sum_{\substack{\delta_{1j_r} \leq |l_r| \leq k_0 \\ \lambda_r + \lambda_{r+1} + \dots + \lambda_{l_q} \neq 0 \\ r = q, q-1, \dots, 2}} \sum_{l_1 \in \{-(l_2 + \dots + l_q)\} \cap \{(-k_0, k_0) \setminus \{0\}\}} (-i)^{q-1} \times \\ \times \frac{1}{\lambda_{l_q}(\lambda_{l_{q-1}} + \lambda_{l_q}) \dots (\lambda_{l_2} + \dots + \lambda_{l_q})} A_{j_1, l_1}(t) A_{j_2, l_2}(t) \dots A_{j_q, l_q}(t) e^{i\mu t}.$$

Нам фактически осталось показать, что правая часть последнего равенства обращается в нуль. Для этого рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. Если $j_{q-1} = j_q$ и $l_{q-1} = l_q$, то соответствующее слагаемое можно переписать в виде

$$\frac{(-i)^{q-1}}{2\lambda_{l_q}\lambda_{l_{q-1}}(\lambda_{l_{q-2}} + \lambda_{l_{q-1}} + \lambda_{l_q})\dots(\lambda_{l_2} + \dots + \lambda_{l_q})} A_{j_1, l_1}(t)\dots A_{j_{q-1}, l_{q-1}}(t) A_{j_q, l_q}(t) e^{i\mu t}. \quad (1.13)$$

В противном случае соответствующее слагаемое объединим со слагаемым вида

$$\frac{(-i)^{q-1}}{\lambda_{l_{q-1}}(\lambda_{l_q} + \lambda_{l_{q-1}})\dots(\lambda_{l_2} + \dots + \lambda_{l_q})} A_{j_1, l_1}(t)\dots A_{j_{q-2}, l_{q-2}}(t) A_{j_q, l_q}(t) A_{j_{q-1}, l_{q-1}}(t) e^{i\mu t},$$

чтобы в сумме получить удвоенное выражение (1.13).

Продолжая аналогично, мы приходим к слагаемым типа

$$\frac{(-i)^{q-1}(\lambda_{l_1} + \dots + \lambda_{l_q})}{c\lambda_{l_q}\lambda_{l_{q-1}}\dots\lambda_{l_2}} A_{j_1, l_1}(t)\dots A_{j_q, l_q}(t) e^{i\mu t},$$

которые обращаются в нуль. Здесь c – константа, зависящая от l_r и j_r , $1 \leq r \leq q$.

2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

2.1. Формулировка результата

Пусть $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ переменных x, y систему уравнений вида

$$\dot{x} = \sum_{|k| \leq k_0} e^{i\lambda_k \omega t} (A_k(t)x + B_k(t)y), \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = \sum_{|k| \leq k_0} e^{i\lambda_k \omega t} (F_k(t)x + G_k(t)y) + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} e^{i\lambda_k \omega t} H_k(t)x.$$

Здесь $A_k(t), B_k(t), F_k(t), G_k(t), H_k(t)$ – матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены. Размерности этих матриц видны из системы уравнений (2.1) и не указываются, ω – большой положительный параметр. Также будем считать, что $\lambda_0 = 0, \lambda_k = -\lambda_{-k} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, k_0$), $\lambda_j \neq \lambda_k$ ($j \neq k$). Снова потребуем вещественности коэффициентов при x и y в правых частях (2.1).

В усредненной системе будет фигурировать блочная матрица

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$C_{11} = A_0(t) + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{i}{\lambda_k} B_k(t) H_{-k}(t), \quad C_{12} = B_0,$$

$$C_{21} = F_0(t) + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{i}{\lambda_k} (G_k(t) H_{-k}(t) + H_k(t) A_{-k}(t)) - \sum_{\substack{1 \leq |j|, |l| \leq k_0, |k| \leq k_0 \\ \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l = 0}} \frac{1}{\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)} H_j(t) B_k(t) H_l(t),$$

$$C_{22} = G_0(t) + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{i}{\lambda_k} H_k(t) B_{-k}(t).$$

Потребуем, чтобы матрица C не зависела от t , и будем интересоваться критическим случаем устойчивости

$$\sigma(C) \cap \{z | \operatorname{Re} z > 0\} = \emptyset, \quad \sigma(C) \cap \{z | \operatorname{Re} z = 0\} \neq \emptyset.$$

Пусть R_-^0 – корневое подпространство матрицы C , отвечающее ее собственным значениям с нулевыми действительными частями, а m – его размерность.

Рассмотрим усредненную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix},$$

введем матрицу $X_0(t)$ порядка $(n_1 + n_2) \times m$ и представим ее в виде

$$X_0(t) = V_0(t)e^{D_0 t}$$

аналогично тому, как это было сделано в разд. 1. Обозначим через $U_0(t)$ матрицу размера $n_1 \times m$, составленную из первых n_1 строк матрицы $V_0(t)$, а $(n_2 \times m)$ -матрицу, составленную из n_2 последних строк, – через $P_0(t)$.

Критическую часть формального матричного решения системы (2.1) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k} (U_k(t) + V_k(t, \omega t)) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k} (P_k(t) + Q_k(t, \omega t)) \end{pmatrix} e^{\sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-k} D_k(t-\tau)}. \quad (2.2)$$

При этом будем считать, что элементами матриц U_k , V_k , P_k , Q_0 и Q_k ($k \in \mathbb{N}$) являются тригонометрические многочлены, причем все $V_k(t, s)$ и $Q_k(t, s)$ имеют нулевые средние по второй переменной:

$$\langle V_k(t, \cdot) \rangle = \langle Q_0(t, \cdot) \rangle = \langle Q_k(t, \cdot) \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Матрицы D_k ($k \in \mathbb{N}$) ищутся в классе $K(D_0)$.

Справедлива

Теорема 2. Для любого $j \geq 0$ эффективно находятся частичные суммы

$$U_j(t, \omega) \equiv \sum_{k=0}^j [\omega^{-k} U_k(t) + \omega^{-(k+1)} V_{k+1}(t, \omega t)], \quad (2.3)$$

$$P_j(t, \omega) \equiv \sum_{k=0}^j \omega^{-k} (P_k(t) + Q_k(t, \omega t)), \quad (2.4)$$

$$D_j(\omega) \equiv \sum_{k=0}^j \omega^{-k} D_k.$$

Пусть построение алгоритма может быть завершено и j_0 – первый номер, при котором дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = D_{j_0}(\omega)\eta \quad (2.5)$$

сильно устойчиво или неустойчиво. Тогда существует такое положительное число ω_1 , что при $\omega \geq \omega_1$ решения дифференциального уравнения (2.1) равномерно экспоненциально устойчивы или неустойчивы в зависимости от аналогичных свойств решений дифференциального уравнения (2.5).

Эффективность здесь понимается аналогично разд. 1.

2.2. Доказательство результата

Подставим правую часть равенства (2.2) в систему уравнений (2.1) и приравняем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях ω в обеих частях.

Пусть нам известны матрицы $U_k(t), V_{k+1}(t, \omega t), P_k(t), Q_k(t, \omega t), D_k (k = 0, 1, \dots, j - 1)$. При $j = 0$ это предположение ничего не требует, а следовательно, выполняется. Покажем теперь, что мы сможем определить матрицы $U_j(t), V_{j+1}(t, \omega t), P_j(t), Q_j(t, \omega t)$ и D_j .

Собирая коэффициенты при $\omega^{-(j-1)}$ во втором уравнении (2.1) и оставляя лишь слагаемые с нулевым средним по s , находим

$$Q_j(t, s) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} H_k(t) U_j(t) e^{i\lambda_k s} + \Gamma_{j1}(t, s), \tag{2.6}$$

где в $\Gamma_{j1}(t, s)$ собраны известные слагаемые.

Рассматриваем далее коэффициенты при ω^j в первом уравнении (2.1) и полученное равенство разбиваем на два. Учитывая (2.6), получаем

$$\dot{U}_j(t) + U_j(t)D_0 + U_0(t)D_j = C_{11}U_j(t) + C_{12}P_j(t) + \Gamma_{j2}(t), \tag{2.7}$$

$$V_{j+1}(t, s) = \left(\sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} A_k(t) e^{i\lambda_k s} - \sum_{|k| \leq k_0} \sum_{\substack{1 \leq |l| \leq k_0 \\ l \neq -k}} \frac{1}{\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)} B_k(t) H_l(t) e^{i(\lambda_k + \lambda_l)s} \right) \times \\ \times U_j(t) + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} B_k(t) e^{i\lambda_k s} P_j(t) + \Gamma_{j3}(t, s). \tag{2.8}$$

Здесь через $\Gamma_{j2}(t)$ и $\Gamma_{j3}(t, s)$ обозначены известные слагаемые.

Теперь соберем коэффициенты при ω^j во втором уравнении системы (2.1), усредним полученное соотношение по s и учтем формулу (2.8). Имеем

$$\dot{P}_j(t) + P_j(t)D_0 + P_0(t)D_j = C_{21}U_j(t) + C_{22}P_j(t) + \Gamma_{j4}(t), \tag{2.9}$$

где $\Gamma_{j4}(t)$ – известная матрица-функция. Объединим равенства (2.7) и (2.9) в одно уравнение

$$\dot{\Psi}_j(t) + \Psi_j(t)D_0 + V_0(t)D_j = C\Psi_j(t) + \Gamma_j(t),$$

и также, как в п. 2 из [8], найдем матрицы $\Psi_j(t)$ (а значит, $U_j(t)$ и $P_j(t)$) и D_j в интересующих нас классах. Наконец, подставляя найденные выражения для $U_j(t)$ и $P_j(t)$ в (2.6), (2.8), находим $Q_j(t, s)$ и $V_{j+1}(t, s)$. Тем самым завершено доказательство первой части теоремы 2.

Обоснование изложенного алгоритма проводится аналогично доказательству теоремы из [8]. В качестве матрицы, фигурирующей в замене переменных, здесь выступает блочная матрица

$$\Pi(t, \omega) = \begin{pmatrix} U_{n_0}(t, \omega) & W(t, \omega) \\ P_{n_0}(t, \omega) & Z(t, \omega) \end{pmatrix},$$

где $U_{n_0}(t, \omega)$ и $P_{n_0}(t, \omega)$ определяются равенствами (2.3) и (2.4) соответственно:

$$W(t, \omega) = R_1 + \omega^{-1} \left(\sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} (A_k(t)R_1 + B_k(t)R_2) e^{i\lambda_k \omega t} - \sum_{|k| \leq k_0} \sum_{\substack{1 \leq |l| \leq k_0 \\ l \neq -k}} \frac{1}{\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)} B_k(t) H_l(t) e^{i(\lambda_k + \lambda_l)\omega t} R_1 \right),$$

$$\begin{aligned}
 Z(t, \omega) = & R_2 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} H_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} R_1 + \omega^{-1} \left(\sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{\lambda_k^2} H_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} R_1 C_0 + \right. \\
 & + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{\lambda_k^2} \dot{H}_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} R_1 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{i\lambda_k} (F_k(t) R_1 + G_k(t) R_2) e^{i\lambda_k \omega t} - \\
 & - \sum_{\substack{1 \leq |k|, |l| \leq k_0 \\ k \neq -l}} \frac{1}{\lambda_k(\lambda_k + \lambda_l)} H_k(t) (A_k(t) R_1 + B_k(t) R_2) e^{i(\lambda_k + \lambda_l) \omega t} - \\
 & \left. - \sum_{\substack{1 \leq |j| \leq k_0, |k| \leq k_0, 1 \leq |l| \leq k_0 \\ l \neq -k, \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l \neq 0}} \frac{H_j(t) B_k(t) H_l(t)}{i\lambda_l(\lambda_k + \lambda_l)(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l)} e^{i(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l) \omega t} R_1 \right),
 \end{aligned}$$

причем столбцами матрицы $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ размера $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2 - m)$ являются произвольные базисные векторы из корневого подпространства матрицы C , отвечающего ее собственным значениям с отрицательными действительными частями, а C_0 – квадратная матрица размерности $n_1 + n_2 - m$ такая, что справедливо равенство $CR = RC_0$.

3. УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА

3.1. Формулировка результата

Пусть k, m, n, p и l_0 – натуральные числа такие, что $k + p = n$, и $2p \leq n$.

Рассмотрим в евклидовом пространстве \mathbb{R}^m линейное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^{(n)} = L(t, \omega) \mathbf{x} \equiv & \sum_{\alpha=0}^{n-1} L_{\alpha}(t, \omega) \mathbf{x}^{(\alpha)} \equiv \sum_{\alpha=k+1}^{n-1} A_{0, \alpha, 0} \mathbf{x}^{(\alpha)} + \sum_{\alpha=0}^k \sum_{|l| \leq l_0} A_{0, \alpha, l}(t) e^{i\lambda_l \omega t} \mathbf{x}^{(\alpha)} + \\
 & + \sum_{q=1}^p \sum_{\alpha=0}^{k-q} \sum_{|l| \leq l_0} \omega^q A_{q, \alpha, l}(t) e^{i\lambda_l \omega t} \mathbf{x}^{(\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь все $A_{q, \alpha, l}(t)$, в том числе при $q = 0$, – квадратные матрицы порядка m , элементами которых являются тригонометрические многочлены, ω – большой положительный параметр, λ_l – такие попарно различные вещественные числа, что $\lambda_{-l} = -\lambda_l \neq 0$, $l = 1, 2, \dots, l_0$, а $\lambda_0 = 0$.

Будем считать, что коэффициенты при неизвестной вектор-функции \mathbf{x} и ее производных любого порядка в уравнении (3.1) вещественны.

Для $\alpha \in \mathbb{Z} \cap [0, n - 1]$ введем матрицы

$$B_{\alpha} = \begin{cases} A_{0, \alpha, 0}(t) + \sum_{q=0}^p \sum_{|l| \leq l_0} \frac{1}{(-i\lambda_l)^{p+q}} A_{q, k-q, l}(t) A_{p, \alpha, -l}(t), & \alpha \in [0, k - p], \\ A_{0, \alpha, 0}, & \alpha \in (k - p, n), \end{cases}$$

и потребуем, чтобы они не зависели от t . Рассмотрим теперь блочную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E \\ B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{n-2} & B_{n-1} \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица, и предположим, что спектр $\sigma(B)$ содержится в замкнутой левой полуплоскости, причем хотя бы одна его точка лежит на мнимой оси:

$$\sigma(B) \cap \{z | \operatorname{Re} z > 0\} = \emptyset, \quad \sigma_0(B) \equiv \sigma(B) \cap \{z | \operatorname{Re} z = 0\} \neq \emptyset.$$

Пусть η – вектор размерности $m \times n$. Вектор, составленный из его первых m компонент, договоримся обозначать через η^1 ; вектор, элементами которого являются следующие m компонент, – через η^2 , и т.д. Таким образом, η^n включает в себя последние m компонент вектора η .

Рассмотрим усредненное уравнение

$$y^{(n)} = L_0 y \equiv \sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha y^{(\alpha)}$$

и соответствующую систему

$$\dot{z} = Bz. \tag{3.2}$$

Пусть R_-^0 – корневое подпространство матрицы B , отвечающее ее собственным значениям с нулевыми действительными частями, а ν – его размерность. Обозначим через $Z_1(t)$ матрицу порядка $m \times \nu$, вектор-столбцами которой является некоторый набор из линейно независимых решений этой системы с начальными условиями из R_-^0 .

Запишем $Z_1(t)$ в виде

$$Z_1(t) = Z_0(t) e^{D_0 t},$$

где вектор-столбцы $e_1(t), \dots, e_\nu(t)$ матрицы $Z_0(t)$ имеют вид (1.3), а D_0 – жорданова матрица порядка ν с единственным собственным значением, равным нулю. При этом кратности его элементарных делителей совпадают с кратностями элементарных делителей тех собственных значений матрицы B , которые лежат на мнимой оси.

Обозначим через $U_0(t)$ матрицу, образованную из первых m строк $Z_0(t)$. Критическую часть формального матричного решения уравнения (3.1) будем искать в виде

$$X(t, \tau; \omega) = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-j} U_j(t) + \sum_{j=k}^{\infty} \omega^{-j} V_j(t, \omega t) \right\} \exp \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-j} D_j \right) (t - \tau) \right]. \tag{3.3}$$

Неизвестные матрицы $U_j, D_j, j = 1, 2, \dots$, и $V_j, j = k, k + 1, \dots$, подчиним следующим требованиям. Матрицы D_j находятся в классе $K(D_0)$ ($j = 1, 2, \dots$), а элементами матриц U_j и V_j являются некоторые тригонометрические многочлены, причем средние всех матриц-функций V_j по второй переменной равняются нулю:

$$\langle V_j(t, \cdot) \rangle = 0, \quad j = k, k + 1, \dots$$

Теорема 3. Для любого целого неотрицательного j эффективно находятся частичные суммы

$$U_j(t, \omega) \equiv \sum_{l=0}^j [\omega^{-l} U_l(t) + \omega^{-(l+k)} V_{l+k}(t, \omega t)], \quad D_j(\omega) \equiv \sum_{l=0}^j \omega^{-l} D_l.$$

Пусть построение алгоритма может быть завершено и j_0 – первый номер, при котором дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = D_{j_0}(\omega)\eta \equiv \sum_{k=0}^{j_0} \omega^{-k} D_k \eta \tag{3.4}$$

сильно устойчиво или неустойчиво. Тогда существует такое положительное число ω_1 , что при $\omega \geq \omega_1$ решения дифференциального уравнения (3.1) равномерно экспоненциально устойчивы или неустойчивы в зависимости от аналогичных свойств решений дифференциального уравнения (3.4).

Эффективное нахождение частичных сумм $U_j(t, \omega)$ и $D_j(\omega)$ сводится к решению v_j задач о почти периодических решениях неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$x^{(n)} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha x^{(\alpha)} + f(t)$$

с единой линейной частью. Здесь $f(t)$ – известный векторный тригонометрический многочлен такой, что указанная задача разрешима.

3.2. Доказательство результата

Подставим правую часть равенства (3.3) в (3.1) вместо x и приравняем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях ω в правой и левой части.

Предположим, что нам известны матрицы $U_r(t)$, $V_{k+r}(t, s)$ и D_r , $r = 0, 1, \dots, j - 1$, где $j \in \mathbb{N}$. Заметим, что при $j = 0$ эти предположения справедливы. Покажем, что можно найти следующую группу матриц $U_j(t)$, $V_{k+j}(t, s)$ и D_j в указанных выше классах.

Вычтем из коэффициентов, стоящих при ω^{p-j} , их среднее по s . В результате получим

$$V_{k+j}(t, s) = \sum_{\alpha=0}^{k-p} \sum_{1 \leq l \leq l_0} \frac{1}{(i\lambda_l)^n} A_{p, \alpha, l}(t) e^{i\lambda_l s} W_{j, \alpha}(t) + F_j(t, s), \tag{3.5}$$

где $F_j(t, s)$ – известная матрица, составленная из тригонометрических многочленов с нулевыми средними по s . Здесь также использовано обозначение

$$W_{j, \alpha}(t) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} C_\alpha^\beta U_j^{(\beta)}(t) D_0^{\alpha-\beta} + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\beta U_0^{(\beta)} \sum_{\rho=0}^{\alpha-\beta-1} D_0^\rho D_j D_0^{\alpha-\beta-1-\rho},$$

$$j = 1, 2, \dots, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n.$$

Теперь применим к коэффициентам, стоящим при ω^j , операцию усреднения по s . Учитывая (3.5), получаем уравнение

$$W_{j, n} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha W_{j, \alpha} + \Phi_j(t), \tag{3.6}$$

где $\Phi_j(t)$ – известная матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены. Это уравнение является дифференциальным относительно U_j , так как агрегаты $W_{j, \alpha}$ содержат производные U_j до порядка α включительно.

Через u_{bj} , $b = 1, 2, \dots, v$, обозначим столбцы матрицы U_j , а через d_j^{ri} – элементы матрицы D_j . Уравнение (3.6) перепишем в виде

$$u_{bj}^{(n)}(t) + \sum_{\beta=0}^{n-1} C_n^\beta \sum_{\rho=n-\beta}^v \Theta_{\rho, n-1-\beta} d_j^{\gamma b} \frac{d^\beta}{dt^\beta} e^{\gamma-(n-1-\beta)t} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha u_{bj}^{(\alpha)}(t) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n-1} B_\alpha \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\beta \sum_{\gamma=\alpha-\beta}^v \Theta_{\gamma, \alpha-1-\beta} d_j^{\gamma b} \frac{d^\beta}{dt^\beta} e^{\gamma-(\alpha-1-\beta)t} + \psi_{bj}(t), \quad b = 1, 2, \dots, v, \tag{3.7}$$

где вектор-функции $\Psi_{bj}(t)$ зависят только от первых $(b - 1)$ столбцов матриц $U_j(t)$ и D_j ; $\Theta_{\rho,l}$ равно нулю, если столбец матрицы D_0 с номером ρ находится в числе первых l столбцов своей жордановой клетки, и единице в противном случае.

Для упрощения дальнейших рассуждений мы будем считать, что индексы суммирования ρ в (3.7) пробегает значения от 1 до ν . Для этого определим функции $e_\rho(t)$ при $\rho \in \mathbb{Z}_-$ равными, например, нулю.

Критерием разрешимости уравнений (3.7) в классе векторных тригонометрических многочленов является (см. [15, с. 229–231]) выполнение соотношения

$$\left\langle \left(\sum_{\alpha=0}^{n-1} B_\alpha \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\beta \sum_{\rho=1}^{\nu} \Theta_{\rho, \alpha-1-\beta} d_j^{\rho\beta} \frac{d^\beta}{dt^\beta} e_{\rho-(\alpha-1-\beta)}^1(t) + \Psi_{bj}(t) - \sum_{\beta=0}^{n-1} C_n^\beta \sum_{\rho=1}^{\nu} \Theta_{\rho, n-1-\beta} d_j^{\rho\beta} \frac{d^\beta}{dt^\beta} e_{\rho-(n-1-\beta)}^1(t), \mathbf{h}^n(t) \right) \right\rangle = 0, \quad b = 1, 2, \dots, \nu, \tag{3.8}$$

где вектор-функция $\mathbf{h}(t)$ – произвольное периодическое решение присоединенной к (3.2) системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = -B'\mathbf{y}. \tag{3.9}$$

Количество линейно-независимых периодических решений системы (3.9) равно κ – числу жордановых клеток матрицы D_0 . Эти решения можно выбрать так, чтобы для вектор-функций $\mathbf{h}_1(t), \mathbf{h}_2(t), \dots, \mathbf{h}_\kappa(t)$, составленных из их последних m компонент, выполнялись соотношения

$$\left\langle \left(\sum_{\alpha=1}^{n-1} B_\alpha \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\beta \Theta_{\rho, \alpha-1-\beta} \frac{d^\beta}{dt^\beta} e_{\rho-(\alpha-1-\beta)}^1(t) - \sum_{\beta=0}^{n-1} C_n^\beta \Theta_{\rho, n-1-\beta} \frac{d^\beta}{dt^\beta} e_{\rho-(n-1-\beta)}^1(t), \mathbf{h}_l(t) \right) \right\rangle = \delta_{\rho k_l},$$

$$\rho = 1, 2, \dots, \nu, \quad l = 1, 2, \dots, \kappa.$$

Заменяя функцию $\mathbf{h}(t)$ по очереди каждой из функций $\mathbf{h}_l(t), 1 \leq l \leq \kappa$, в (3.8) при $b = 1$, получаем значения $d_j^{\rho_1}, \rho = k_1, k_2, \dots, k_p$ (остальные $d_j^{\rho_1}$ – нулевые, поскольку матрица D_j ищется в классе $K(D_0)$). Далее, подставляя эти значения в (3.7), находим $\mathbf{u}_{1j}(t)$ в классе векторных тригонометрических многочленов. Теперь, когда Ψ_{2j} не содержит неизвестных вектор-функций, можно определить $d_j^{\rho_2}$ из уравнения (3.8) при $b = 2$. Продолжая аналогично, мы получаем полностью матрицы $U_j(t)$ и D_j в соответствующих классах. А затем из (3.5) определяется $V_{k+j}(t, s)$.

Таким образом, мы доказали первую часть теоремы 3.

Как и ранее, идея обоснования состоит в проведении замены переменных, позволяющей перейти к системе уравнений, о свойствах устойчивости которой можно судить, применяя методы из [8]. При этом предварительно совершается переход от (3.1) к соответствующей системе уравнений первого порядка.

Замечания. 2. Не меняя по существу этих рассуждений, удается получить аналогичный результат для уравнений вида

$$\mathbf{x}^{(n)} = \sum_{\alpha=k}^{n-1} A_{\alpha,0} \mathbf{x}^{(\alpha)} + \theta \sum_{q=0}^p \sum_{01 \leq |l| \leq l_0} \omega^q A_{2q, k-q, l}(t) e^{i\lambda_l \omega t} \mathbf{x}^{(k-q)} + \sum_{q=0}^p \sum_{\alpha=0}^{k-1-q} \sum_{1-\delta_{0q} \leq |l| \leq l_0} \omega^q \left[A_{2q, \alpha, l}(t) + \omega^{\frac{1}{2}} A_{2q+1, \alpha, l}(t) \right] e^{i\lambda_l \omega t} \mathbf{x}^{(\alpha)}, \tag{3.10}$$

где

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{если все } A_{2p+1, \alpha, l} \text{ равны нулю,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Кроме того, в случае $p = n/2$ требуется, чтобы все $A_{2p+1, \alpha, l}$ обращались в нуль.

3. Теория, изложенная в данной работе, без труда переносится на уравнения типа (3.1) и (3.0), содержащие вместо матриц-функций $A_{0,\alpha,l}(t)$ коэффициенты вида $\sum_{0 \leq j < +\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} A_{-j,\alpha,l}(t)$, которые представляют собой ряды, сходящиеся равномерно относительно вещественных t и больших значений ω . Аналогичное замечание справедливо для уравнений (1.1) и (2.1).

3.3. Линеаризованная задача об устойчивости верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса

Рассмотрим маятник длины l , который вращается в вертикальной плоскости около точки подвеса, совершающей вертикальные колебания по закону

$$y(t) = l\omega^{-1} \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} a_k(t) e^{i\lambda_k \omega t},$$

где $a_k(t) = \bar{a}_{-k}(t)$ ($1 \leq |k| \leq k_0$) – комплексные тригонометрические полиномы, $\lambda_k = -\lambda_{-k} \neq 0$ ($1 \leq |k| \leq k_0$), ω – большой положительный параметр. Предполагается, что ось y направлена вверх.

Введем следующие обозначения: $\lambda \geq 0$ – коэффициент затухания, g – ускорение свободного падения, θ – угол отклонения в положительном направлении от нижнего положения равновесия. Тогда уравнение колебаний маятника имеет вид

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \frac{g - \ddot{y}(t)}{l} \sin \theta = 0.$$

Линеаризуя его в точке $\theta = \pi$, переходим к соотношению

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \frac{-g + \ddot{y}(t)}{l} \theta = 0.$$

Полагая $\kappa^2 = g/l$, получаем

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega^{-1} \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \ddot{a}_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} \theta + \left(-\kappa^2 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} 2i\lambda_k \dot{a}_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} \right) \theta - \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \lambda_k^2 a_k(t) e^{i\lambda_k \omega t} \theta = 0. \quad (3.11)$$

Эта система не имеет вида (3.1), но, в силу замечания 3, к ней применима теория, изложенная в данном пункте. Выпишем матрицу усреднения

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa^2 - \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \lambda_k^2 |a_k(t)|^2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы выражение

$$b_{21} = \kappa^2 - \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \lambda_k^2 |a_k(t)|^2$$

не зависело от t . (Разумеется, отсюда вовсе не следует, что функции a_k не могут зависеть от t .)

Возможны следующие критические случаи:

- 1) $b_{21} < 0$, $\lambda = 0$ – случай пары чисто мнимых собственных значений;
- 2) $b_{21} = 0$, $\lambda > 0$ – случай простого нулевого собственного значения;
- 3) $b_{21} = 0$, $\lambda = 0$ – случай двукратного нулевого собственного значения, а именно жордановой клетки размера 2.

Для каждого случая приведем вид матрицы D_1 . При этом важную роль будет играть функция

$$f(t) = 2 \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} i\lambda_k \dot{a}_k(t) a_{-k}(t) + \sum_{\substack{1 \leq |j|, |k|, |l| \leq k_0 \\ \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l = 0}} \lambda_k^2 a_j(t) a_k(t) a_l(t).$$

Случай 1: $b_{21} < 0$, $\lambda = 0$. Здесь

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \frac{1}{\beta} \left\langle f(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin(2\beta t) & -\sin^2(\beta t) \\ \cos^2(\beta t) & \frac{1}{2} \sin(2\beta t) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $\beta = \sqrt{-b_{21}}$.

След матрицы $D_1(\omega)$ равен нулю. Поэтому либо оба собственных значения лежат на мнимой оси, либо они вещественны и имеют разные знаки. В первом случае нужно перейти к поиску D_2 . Во втором имеет место неустойчивость нулевого решения уравнения (3.11).

Случай 2: $b_{21} = 0, \lambda > 0$. Получаем, что $D_0 = 0$ – одномерная матрица, $D_1 = \langle f(t) \rangle$. Если $D_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (3.11) экспоненциально устойчиво, а если $D_1 > 0$ – неустойчиво.

Случай 3: $b_{21} = 0, \lambda = 0$. Здесь

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \langle f(t) \rangle & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^{-1} \langle f(t) \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

При положительном $\langle f(t) \rangle$ решение $\theta = 0$ уравнения (3.11) неустойчиво, а при неотрицательном $\langle f(t) \rangle$ используемая теория не позволяет сделать никаких выводов об устойчивости. Заметим, что если $d_1^{21} < 0$, то наличие сильной устойчивости (неустойчивости) матрицы $D_2(\omega)$ будет зависеть лишь от d_2^{22} .

Автор выражает глубокую благодарность В.Б. Левенштаму за постановку задачи и полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдович В.И. Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 5. С. 622–624.
2. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями: Деп. в ВИНТИ. № 1407-B2003 Деп.
3. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями. Ч. 2: Деп. в ВИНТИ. № 1408-B2003 Деп.
4. Басистая Д.А., Левенштам В.Б. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Матем. и механ. сплошной среды. 2004. С. 46–48.
5. Левенштам В.Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. I // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. № 6. С. 761–770; II // № 8. С. 1084–1091.
6. Левенштам В.Б. Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70. № 2. С. 174–205.
7. Левенштам В.Б., Хатламаджиян Г.Л. Распространение теории усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Задача о периодических решениях // Изв. вузов. Математика. 2006. № 6. С. 35–47.
8. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
10. Стрыгин В.В. Об одной модификации метода усреднения при отыскании высших приближений // Прикл. матем. и механ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1042–1045.
11. Стрыгин В.В. Об асимптотическом интегрировании уравнений движения механических систем, находящихся под воздействием быстро осциллирующих сил // Прикл. матем. и механ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 845–853.
12. Хатламаджиян Г.Л. Исследование устойчивости решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае: Деп. в ВИНТИ. №15-B2006 Деп.
13. Хатламаджиян Г.Л. Об устойчивости решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Деп. в ВИНТИ. № 636-B2006 Деп.
14. Майоров В.В. К объему понятий сильной устойчивости и неустойчивости // Вестн. Яросл. ун-та. 1975. Вып. 13. С. 146–152.
15. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеориздат, 1956.