Б. М. Соломяк, Циклические семейства функций для аналитических операторов Теплица, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 88–102

Б.М.Соломяк

ЦИКЛИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ТЁПЛИЦА

Множество U называется **циклическим** для оператора T в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, если наименьшее замкнутое T-инвариантное подпространство, содержащее U, совпадает со всем $\mathfrak{X}$. Вопрос об описании всех циклических множеств данного оператора T занимает промежуточное положение между задачами вычисления кратности спектра $\mu_T = \inf\{\operatorname{card} U : U$ – циклическое множество$\}$ и описания инвариантных подпространств. В настоящей работе этот вопрос изучается для аналитических операторов Тёплица (АОТ), т.е. операторов $T_\varphi : f \mapsto \varphi f$, $\varphi \in H^\infty$, в пространстве Харди H^2. Ранее был известен, по-видимому, лишь случай $\varphi(z) = \omega(z^n)$, где ω – $*$-слабый генератор алгебры H^∞ (подробнее об этом см.ниже, в п.I.2).

Мы будем предполагать, что символ φ является весьма гладким. Даже и при таком ограничении задача выглядит необозримой. Полное описание циклических множеств удалось получить при некоторых условиях на геометрию кривой $t \mapsto \varphi(e^{it})$.

Эта работа возникла при исследовании кратности оператора АОТ; некоторые результаты были анонсированы в [I]. Я благодарен Н.К.Никольскому за постоянное внимание, А.Л.Вольбергу и Д.В.Якубовичу за полезные обсуждения.

Некоторые обозначения. Символ $\mathbb{D}$ обозначает единичный круг; $\operatorname{clos}, \partial$ – операции взятия замыкания и границы; $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$;

$\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ – алгебра непрерывных операторов в пространстве $\mathfrak{X}$;

$\operatorname{Cyc} T$ – семейство циклических множеств оператора T;

$E_T(U)$ – замкнутое T-инвариантное подпространство, натянутое на U; $U^\perp$ аннулятор множества U в банаховом пространстве (БП); C_A – диск-алгебра; $N(G) \overset{def}{=} \{ g_1/g_2 :$ $g_i \in H^\infty(G)\}$ – класс Неванлинны в области G;

$\operatorname{HOD}(f^{in} : f \in \mathcal{F})$ – наибольший общий делитель внутренних частей функций семейства $\mathcal{F}$; id – тождественное отображение;

● – конец доказательства.

§ I. Предварительные сведения; формировки результатов

I.I. Пусть $\mathfrak{X}$ – БП. Очевидным необходимым условием цикличности множества U для оператора $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, является следующее:

$$U^{\perp} \cap \mathrm{Ker}(T^* - \lambda I) = \{0\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (I)$$

В конечномерном случае ($\dim \mathfrak{X} < \infty$) условие (I) является и достаточным для цикличности. Нам понадобится чуть более общее утверждение.

ЛЕММА I. Пусть $\mathfrak{X}$ - БП, $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $U \subset \mathfrak{X}$. Предположим, что подпространство $E_T(U)$ имеет конечную коразмерность и выполнено условие (I). Тогда $E_T(U) = \mathfrak{X}$, т.е. $U \in \mathrm{Cyc}\, T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Y = E_T(U)$ и пусть $Y \neq \mathfrak{X}$. Имеем $T^* Y^{\perp} \subset Y^{\perp}$ и $1 \leqslant \dim Y^{\perp} < \infty$. Следовательно, оператор $T^* | Y^{\perp}$ имеет собственный вектор, что противоречит (I). ◍

В случае АОТ с символом φ базисом подпространства $\mathrm{Ker}(T_\varphi^* - \lambda I)$ служат функционалы вычисления значения функции и производных в точках ζ таких, что $\varphi(\zeta) = \lambda$. При этом производные берутся вплоть до порядка, равного кратности нуля φ' в точке ζ. Необходимое условие цикличности (I) для множества $U \subset H^2$ переписывается так:

(УI) Для любых точек $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D}$ таких, что $\varphi(\zeta_1) = \dots = \varphi(\zeta_m) = a$, причем значение a принимается в точке ζ_j с кратностью K_j, имеет место соотношение:

$$\mathrm{rank}\left[\dots; u(\zeta_j), u'(\zeta_j), \dots, u^{(K_j-1)}(\zeta_j); \dots\right]_{u \in U}^{j \leqslant m} = \sum_{j=1}^{m} K_j .$$

Здесь rank обозначает размерность линейной оболочки множества строк, быть может, бесконечного.

Поясним это условие в случае, когда $\varphi'(\zeta_j) \neq 0$, $j \leqslant m$. Сопоставим функции u m-мерный вектор $\mathcal{F}(u) = [u(\zeta_1), \dots, u(\zeta_m)]$ Тогда условие (УI) означает, что векторы $\mathcal{F}(u)$, $u \in U$, порождают пространство $\mathbb{C}^m$.

Чтобы проследить бесконечномерные эффекты, напомним классические результаты.

I.2. Теорема Бёрлинга об операторе сдвига $T_z : f \mapsto zf$ дает первый очень важный пример описания циклических множеств:

$$U \in \mathrm{Cyc}\, T_z \Longleftrightarrow \mathrm{HOD}(u^{in} : u \in U) = \mathbb{1} .$$

В [3] показано, что приведенное описание циклических множеств сохраняется для оператора T_ω, где ω – $*$-слабый генератор алгебры H^∞, и это характеризует генераторы. Вообще описание циклических множеств (как и инвариантных подпространств) совпадает для операторов T_φ и $T_{\omega\circ\varphi}$, где ω – $*$-слабый генератор алгебры $H^\infty(\Omega)$, $\Omega \supset \varphi(\mathbb{D})$. Это позволяет охватить некоторые негладкие символы.

Случай $\varphi(z) = z^n$ сводится к теореме Хелсона – Лауденслегера об операторе кратного сдвига. Чтобы сформулировать результат, для функции $f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ положим $f_{j,n}(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_{j+kn} z^k$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Напомним, что матрица-функция (м.-ф.) размера $n\times p$ называется внешней, если $p \geqslant n$ и наибольший общий делитель внутренних частей ее миноров порядка n равен единичной функции. При этом допускается $p = \infty$.

ТЕОРЕМА А. (см. [2], стр.38). Множество $U \subset H^2$ является циклическим для оператора T_{z^n} в том и только том случае, когда м.-ф.

$$\zeta \mapsto \left[u_{j,n}(\zeta) \right]_{u\in U}^{0\leqslant j\leqslant n-1}$$

является внешней в круге $\mathbb{D}$.

Оператор сопряженного сдвига $T_z^* : f \mapsto (f - f(0))/z$ является антианалитическим оператором Тёплица, однако, термины, возникающие при описании его циклических векторов (Дуглас, Шапиро, Шилдс) оказываются полезными и в случае АОТ.

ТЕОРЕМА В (см. [2], стр.48). Множество $U \subset H^2$, $\operatorname{card} U < \infty$, является циклическим для оператора T_z^* в том и только том случае, когда найдется функция $u \in U$, не имеющая псевдопродолжения в $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$, или эквивалентно,

$$\bar{u}\,\big|\,\mathbb{T} \notin N(\mathbb{D}).$$

I.3. <u>Основные результаты</u>. Ограничимся не более чем счетными циклическими множествами U, элементы которых будем нумеровать $u^{[i]}$. Следующая теорема служит непосредственным обобщением теоремы А.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\varphi \in C_A$, причем множество $\varphi(\mathbb{T})$ есть конечное объединение C^2-гладких жордановых дуг. Предположим также, что φ обладает свойством (CI):

(CI) Функция $t \mapsto \arg \varphi(e^{it})$ строго возрастает при $t \in [0, 2\pi]$ (имеется в виду какая-либо непрерывная ветвь аргумента).

Тогда множество $\{u^{[i]}\}_{i=1}^{m} \subset H^2$, $m \leqslant \infty$, является циклическим для оператора T_φ в том и только том случае, когда выполнены два условия: условие (УI) из п.I.I и следующее условие (У2):

(У2) Для любой точки $z \in \mathbb{T}$ и ее круговой окрестности V_z такой, что в области $V_z \cap \mathbb{D}$ определены k однозначных ветвей $\psi_1 \equiv id$, $\psi_2, \dots, \psi_k$ функции $\varphi^{-1} \circ \varphi$, матрица-функция $[(u^{[i]} \circ \psi_j)(\zeta)]_{i \leqslant m}^{j \leqslant k}$ является внешней в $V_z \cap \mathbb{D}$.

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуются некоторые обозначения. Пусть функция φ аналитична в $clos\, \mathbb{D}$. Тогда множество $\Gamma = \varphi(\mathbb{T})$ разбивает плоскость на конечное число компонент. Символом $\Omega^{(k)}$ обозначим объединение компонент, в которых число φ-прообразов равно k (с учетом кратности). "Дырами" будем называть ограниченные компоненты множества $\mathbb{C} \setminus \varphi(clos\, \mathbb{D}) = \Omega^{(0)}$.

Будем говорить, что φ есть функция общего положения, если она аналитична в $clos\, \mathbb{D}$, кривая $t \mapsto \varphi(e^{it})$ не имеет "дуг наложения", все точки ее самопересечения просты и трансверсальны, и $\varphi' | \mathbb{T} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция общего положения φ обладает свойством (C2):

(C2) Для любой компоненты $G \subset \Omega^{(k)}$, $k \geqslant 1$, найдется цепочка компонент $G_k = G$, $G_{k-1}, \dots, G_1$ таких, что $G_i \subset \Omega^{(i)}$, области G_i, G_{i-1} имеют общую дугу границы, а G_1 имеет общую дугу с неограниченной компонентой множества $\Omega^{(0)}$.

Тогда множество $U = \{u^{[i]}\}_{i=1}^{m}$, $m < \infty$, является циклическим для оператора T_φ в том и только том случае, когда выполнены три условия: (УI),(У2) и (У3):

(У3) Для любой "дыры" $G \subset \Omega^{(0)}$ найдутся $i, j \leqslant m$ такие, что

$$u^{[i]} \circ \vartheta^{-1} / u^{[j]} \circ \vartheta^{-1} \,|\, \partial G \notin N(G); \quad \vartheta \stackrel{def}{=} \varphi | \mathbb{T} .$$

Примеры и замечания. I. На рис.Iа) приведен пример функции φ , для которой условие (C2) выполнено, на рис.Iб) – не выполнено.

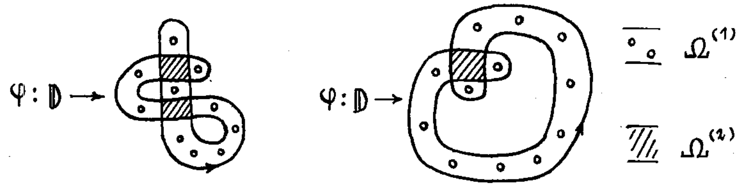

Рис.I. а) б)

2. Легко видеть, что из свойства (CI) следует свойство (C2) и отсутствие "дыр".

3. В теоремах I и 2 кратность спектра оператора T_φ равна листности символа $n(\varphi) = \max\{k : \Omega^{(k)} \neq \emptyset\}$, как следует из [I] . В качестве циклического множества наименьшей мощности можно взять $U = \{1, u, \ldots, u^{n(\varphi)-1}\}$, где u – любая аналитическая и однолистная в $\mathrm{clos}\,\mathbb{D}$ функция. Условия (УI),(У2) почти очевидны, а условие (У3) вытекает из того, что функция $u \circ \vartheta^{-1}$ имеет разрыв первого рода на ∂G .

4. Условия (УI)–(У3) являются необходимыми для цикличности множества U безо всяких ограничений на геометрию $\varphi(\mathbb{T})$. Простые примеры показывают, что если в образе $\varphi(\mathbb{D})$ есть "дыры", то условий (УI),(У2), а если нарушается свойство (C2), то условий (УI),(У2),(У3), недостаточно для цикличности.

I.4. Теорема 2 автоматически переносится на случай оператора умножения $T_\varphi : f \mapsto \varphi f$, действующего в пространстве Смирнова $E^2(R)$ на открытом множестве R (не обязательно односвязном) с кусочно-гладкой границей. Рассмотрение несвязного множества R равносильно рассмотрению прямой суммы операторов умножения. В частности, сюда включаются диагональные векторные АОТ. Мы не будем детально формулировать "обобщенный" вариант теоремы 2, а приведем одно его следствие. Другое следствие, относящееся к оператору умножения на z в конечносвязной области, приведено в [I] .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G_i , $i = 1, \ldots, N$, – жордановы области с кусочно C^2-гладкой границей такие, что различные множества ∂G_i , ∂G_j попарно пересекаются лишь в конечном числе точек и никакие три из них не пересекаются. Пусть $V^{(k)}$ есть множество точек $z \in \mathbb{C}$, принадлежащих не менее, чем k областям G_i. Предположим, что выполнено свойство (С3): множества $\mathbb{C} \setminus \operatorname{clos} V^{(k)}$ связны при $k=1,\dots,N$. Пусть T_i – оператор умножения на z в $E^2(G_i)$, $T = \sum_{i=1}^{N} \oplus T_i$. Тогда множество $U = \{u^{[j]}\}_{j=1}^{m}$, $u^{[j]} = (u_1^{[j]},\dots,u_n^{[j]})$, является циклическим для оператора T в том и только том случае, когда для любого подмножества $J \subset \{1,\dots,N\}$ такого, что $G_J = \bigcap_{i\in J} G_i \neq \emptyset$, матрица-функция $[u_i^{[j]}(\zeta)]_{i\in J}^{j\leq m}$ является внешней в G_J.

I.5. В следующих двух параграфах доказана теорема 2; теорема I доказывается так же, с точностью до некоторых деталей. Систематически используется теория классов Харди-Смирнова $E^p(\Omega)$ в областях с кусочно-гладкой границей (см. [4],[5]), в частности, внешне-внутренняя факторизация, аналоги теоремы Бёрлинга и теоремы вложения Карлесона. Нужные факты легко переносятся из круга конформным отображением.

§ 2. Необходимость условий цикличности

Проверим, что если множество $U = \{u^{[j]}\}_{j=1}^{m} \subset H^2$ является циклическим для оператора $T = T_\varphi$, то выполняются условия (У2),(У3). Необходимость условия (УI) очевидна для любой функции $\varphi \in H^\infty$; это обсуждалось в п.I.I.

Необходимость условия (У2) проверим для функции φ, аналитической в $\operatorname{clos} \mathbb{D}$. Пусть $z \in \mathbb{T}$, V_z – круг с центром в точке z такой, что в области $\Omega_z = V_z \cap \mathbb{D}$ определены k однозначных ветвей $\psi_1 = id, \psi_2,\dots,\psi_k$ функции $\varphi^{-1}\circ\varphi$. Отсюда следует, что области $\psi_j(\Omega_z)$ попарно не пересекаются. Легко видеть, что функции $\psi_i - \psi_j$, $i\neq j$ и ψ_i' являются внешними в Ω_z. Рассмотрим отображение

$$\alpha : (f_1,\dots,f_k) \mapsto \det\left[(f_i\circ\psi_j)(\psi_j')^{1/2}\right]_{i\leq k}^{j\leq k} .$$

Оно непрерывно действует из прямой суммы k экземпляров пространства H^2 в пространство $E^{2/k}(\Omega_z)$. Допустим, что все старшие миноры матрицы $[u^{[j]}\circ\psi_i]_{i\leq k}^{j\leq m}$, $k\leq m$, имеют общий внутренний делитель χ в области Ω_z. Если $f_j = \sum_{j\leq m} p_j(\varphi)\, u^{[j]}$, где p_j – полиномы, то функция $\alpha(f_1,\dots,f_k)$, очевидно, делится на χ. Значит, образ при отображении α прямой суммы пространств $E_T(U)$ содержится в $\chi E^{2/k}(\Omega_z)$. В то же время, $\alpha(1,z,\dots,z^{k-1}) = \prod_{i\leq k}(\psi_i')^{1/2}\prod_{i<j\leq k}(\psi_i-\psi_j)$ – внешняя функция. Следовательно, $E_T(U) \neq H^2$. ▨

Необходимость условия (У3) проверим для функции общего положения. Пусть G – ограниченная компонента множества $\mathbb{C}\setminus\varphi(\operatorname{clos}\mathbb{D})$. Предположим, что условие (У3) нарушается. Тогда для некоторой функции $\chi\in H^\infty(G)$

$$\chi\cdot(u^{[j]}\circ\vartheta^{-1})/(u^{[1]}\circ\vartheta^{-1})\,|\,\partial G\in H^\infty(G),\quad j\leqslant m.$$

Построим функционал, аннулирующий пространство $E_T(U)$. Рассмотрим функцию $\mu(\zeta)=\log|(u^{[1]}\circ\vartheta^{-1})(\zeta)(\vartheta^{-1})'(\zeta)|$. Очевидно, $\mu\in L^1(\partial G,|dz|)$. Кривая $t\mapsto\varphi(e^{it})$ в случае общего положения не может образовывать углов, больших π. Следовательно, μ суммируема по гармонической мере области G и найдется функция $h\in E^1(G)$ такая, что $|h|=\exp\mu$ п.в. на ∂G. Положим $\lambda=(h\circ\varphi)\varphi'\cdot(\chi\circ\varphi)/u^{[1]}$,

$$\tau(f)\stackrel{def}{=}\int_{\vartheta^{-1}(\partial G)} f\lambda\,dz=\int_{\partial G}(f\circ\vartheta^{-1})\frac{h}{u^{[1]}\circ\vartheta^{-1}}\cdot\chi\,dz.\qquad(2)$$

Ясно, что τ есть линейный непрерывный функционал в H^2. При этом $\tau(u^{[j]}\varphi^{r})=0$, $j\leqslant m$, $r\geqslant0$. Следовательно, $\tau|E_T(U)\equiv0$. Остается показать, что $\tau|H^2\not\equiv0$. Заметим, что компакт $K=\vartheta^{-1}(\partial G)$ есть объединение конечного числа (может быть, одной) дуг окружности $\mathbb{T}$, но не совпадает с $\mathbb{T}$. Поэтому полиномы плотны в $C(K)$. Формула (2) определяет непрерывный функционал в $C(K)$, и если $\tau|H^2\equiv0$, то и $\tau|C(K)\equiv0$. Но это противоречит тому, что $\lambda(z)\neq0$ п.в. на K. ▨

§ 3. Достаточность условий цикличности

3.1. Пусть множество $U=\{u^{[j]}\}_{j\leqslant m}$ удовлетворяет условиям (У1),(У2),(У3). Для проверки цикличности надо показать, что всякая функция $f\in L^2(\mathbb{T})$ такая, что

$$\int_{\mathbb{T}}u^{[j]}\varphi^k f\,dz=0,\quad j\leqslant m,\quad k\geqslant0,\qquad(3)$$

принадлежит пространству H^2. Пользуясь тем, что функция $\vartheta=\varphi|\mathbb{T}$ взаимно-однозначна в дополнении конечного подмножества $\mathbb{T}$, сделаем замену переменной в (3). Полагая $g=(f\circ\vartheta^{-1})(\vartheta^{-1})'$, $v^{[j]}=u^{[j]}\circ\vartheta^{-1}$, получим, что $\int_\Gamma v^{[j]}g\zeta^k\,d\zeta=0$, где $\Gamma=\varphi(\mathbb{T})$. Заметим, что $v^{[j]}g\in L^1(\Gamma,|d\zeta|)$, и рассмотрим интегралы Коши

$$K_{v^{[j]}g}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(v^{[j]}g)(\zeta)(\zeta-z)^{-1}d\zeta.$$

Функции $K_v[j]_q(z)$ принадлежат классам Смирнова E^p, $p<1$, в каждой из компонент дополнения кривой Γ. Окончательно условие (3) переписывается так:

$$K_v[j]_q(z) \equiv 0\,, \quad z\in\Omega_1^{(0)},\ j\leqslant m\,, \tag{4}$$

где $\Omega_1^{(0)}$ – неограниченная компонента множества $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Сначала будет показано, что функция f, удовлетворяющая (3), продолжается с окружности до мероморфной функции класса N в $\mathbb{D}\setminus\varphi^{-1}(\Gamma)$. Затем мы проверим, что куски продолжения "склеиваются" по-настоящему и дают функцию из пространства H^2. Следующая лемма является основной для реализации первой части программы.

Положим $Z=\varphi(\{\zeta\in\mathbb{D}:\varphi'(\zeta)=0\})$. Напомним, что $\Omega^{(k)}$ – объединение компонент множества $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, в которых имеется ровно k φ-прообразов с учетом кратности. По принципу аргумента, число k равно индексу кривой Γ относительно точек компоненты. На множестве $\Omega^{(k)}\setminus Z$ определены (локально) аналитические ветви обратной к φ функции $\varphi^{-1}_{(1)},\dots,\varphi^{-1}_{(k)}$. Положим $v^{[j]}_{(k)}=u^{[j]}\circ\varphi^{-1}_{(k)}$.

ЛЕММА 2. Пусть множество U удовлетворяет условиям (У1), (У3) и функция q удовлетворяет (4). Тогда при всех $k\geqslant 0$

$$\mathrm{rank}\left[K_v[j]_q,\ v^{[j]}_{(1)},\dots,v^{[j]}_{(k)}\right]^{j\leqslant m}=k \quad \text{в } \Omega^{(k)}\setminus Z. \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. То, что интересующий нас ранг всюду не меньше, чем k, следует из условия (У1). Проверим противоположное неравенство. Условие (5) выполнено в неограниченной компоненте $\Omega_1^{(0)}$, т.к. в ней оно равносильно (4). Пусть H_1, H_2 – компоненты множества $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, имеющие общую дугу границы α. Из условий на кривую Γ в теореме 2 следует, что индекс в областях H_1 и H_2 отличается на единицу, поэтому можно считать, что $H_1\subset\Omega^{(k)}$, $H_2\subset\Omega^{(k+1)}$. Покажем, что если соотношение (5) выполнено в H_1, то оно выполнено и в H_2. Проверим это п.в. на α, а дальше воспользуемся теоремой единственности. Как известно, скачок интеграла Коши равен $v^{[j]}q$ п.в. на α. При согласованном выборе ветвей обратной функции в H_1 и в H_2 будем иметь $\varphi^{-1}_{(k+1)}|\alpha=\vartheta^{-1}|\alpha$, $v^{[j]}|\alpha=v^{[j]}_{(k+1)}$. Отсюда и следует требуемая оценка.

Так, переходя от компоненты к соседней с бо́льшим индексом и пользуясь свойством (С2), получим, что соотношение (5) имеет место в $\Omega^{(k)} \setminus Z$, $k \geqslant 1$. Остается проверить, что для любой "дыры" $G \subset \Omega^{(0)}$, выполнено равенство: $K_{v^{[j]}g}(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in G$. Поскольку (5) уже проверено в компонентах, соседних с G, из "формулы скачка" получим, что

$$K_{v^{[j]}g}(\zeta)\, v^{[i]}(\zeta) = K_{v^{[i]}g}(\zeta)\, v^{[j]}(\zeta), \quad \zeta \in \partial G, \quad i, j \leqslant m.$$

Нужное равенство теперь немедленно вытекает из условия (У3); надо лишь учесть, что $E^p(G) \subset N(G)$, $p > 0$. ▨

Из соотношения (5) вытекает существование и единственность в каждой компоненте $H \subset \Omega^{(k)}$ функций $g^H_{(i)}$, $i \leqslant k$, таких, что

$$K_{v^{[j]}g}(\zeta) = \sum_{i=1}^{k} v^{[j]}_{(i)}(\zeta)\, g^H_{(i)}(\zeta), \quad \zeta \in H \setminus Z. \tag{6}$$

Пусть $H \subset \Omega^{(k)}$, $G \subset \Omega^{(k+1)}$ – соседние компоненты, имеющие общую дугу границы α. Для точки $z \in \alpha \setminus Z$ рассмотрим окрестность V_z такую, что $V_z \subset \mathrm{int}(\mathrm{clos}(G \cup H)) \setminus Z$. В этой окрестности можно зафиксировать нумерацию ветвей обратной функции: будем считать, что ветви $\varphi^{-1}_{(1)}, \dots, \varphi^{-1}_{(k)}$ определены во всей V_z, а в области $V_z \cap G$ к ним добавляется ветвь $\varphi^{-1}_{(k+1)}$, совпадающая на α с ϑ^{-1}.

ЛЕММА 3. Почти всюду на $\alpha \cap V_z$ имеют место равенства

$$g^H_{(i)} = g^G_{(i)}, \quad i \leqslant k; \qquad g^G_{(k+1)} = g.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из формулы скачка и единственности представления (6). ▨

Рассмотрим теперь разбиение круга $\mathbb{D}$ с помощью множества $\varphi^{-1}(\Gamma)$. Компоненты множества $\mathbb{D} \setminus \varphi^{-1}(\Gamma)$ будем называть клетками. Множество $\varphi^{-1}(\Gamma)$ является объединением конечного числа дуг, гомеоморфных открытому отрезку, и их концов – вершин. Положим $\Xi = \varphi^{-1}(Z)$ и будем относить к числу вершин точки множества $\Xi \cap \varphi^{-1}(\Gamma)$. Для любой клетки R ее образ $\varphi(R)$ – некоторая компонента множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Пусть $\varphi(R) = G \subset \Omega^{(k)}$. Зафиксируем в области G ветвь обратной к φ функции $\varphi^{-1}_{(s)}$ такую, что $\varphi^{-1}_{(s)} \circ \varphi = id \mid R$. Положим

$$F^R(z) = g_{(s)}(\varphi(z)), \qquad z \in R \setminus \Xi. \tag{7}$$

Введем обозначение: $u^{[j]}_{(i)}(z) = v^{[j]}_{(i)}(\varphi(z))$; тем самым, $u^{[j]}|R = u^{[j]}_{(s)}|R$. Пусть $J \subset \{1,\dots,m\}, \operatorname{card} J = k$. Положим $h^R_J(z) = \det\left[u^{[j]}_{(i)}(z)\right]^{j\in J}_{i\leq k}$. Из равенства (6) следует

$$F^R h^R_J = \det\left[K_{v^{[j]}g}\circ\varphi,\ u^{[j]}_{(i)}\right]^{j\in J}_{i\leq k,\ i\neq s} . \tag{8}$$

Ввиду условия (УI), для любой точки $z\in R\setminus\Xi$ найдется J такое, что $h^R_J(z)\neq 0$. Поскольку ветвь $\varphi^{-1}_{(s)}$ определена в области $G=\varphi(R)$ однозначно, отсюда и из (8) получим, что F^R есть мероморфная (однозначная) функция класса $N(R)$. Из леммы 3 немедленно вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 4. I) Если R, S – соседние клетки, то $F^R = F^S$ п.в. на $\partial R\cap\partial S$

2) $\varphi' F^R = f$ п.в. на $\partial R \cap \mathbb{T}$. ∅

Итак, мы получили продолжение "ортогональной" функции f до функции класса $N(\mathbb{D}\setminus\varphi^{-1}(\Gamma))$, граничные значения которой согласованы на дугах $\varphi^{-1}(\Gamma)\cap\mathbb{D}$. Чтобы завершить доказательство, надо произвести "склейку" и показать, что $f\in H^2$.

3.2. Для "склейки" потребуются дополнительные технические средства. В технических леммах ниже требования гладкости могут быть существенно ослаблены, но это не входило в наши цели.

Пусть Ω – жорданова область со спрямляемой границей. Пространство слабого типа $E_0^{1,+\infty}(\Omega)$ можно определить так:

$$f\in E_0^{1,-\infty}(\Omega) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(f\in E^p(\Omega), p<1;\ \lim_{p\to 1-0}(p-1)\|f\|_p = 0\right) .$$

Хорошо известно [6] , что если граница $\partial\Omega$ кусочно C^2-гладкая и $g\in L^1(\partial\Omega, |dz|)$, то интеграл Коши K_g принадлежит классу $E_0^{1,+\infty}(\Omega)$.

ЛЕММА 5 (А.Б.Александров). Пусть область Ω разбита в объединение двух областей Ω_1 , Ω_2 , все области – жордановы с кусочно C^2-гладкой границей. Пусть $f_i\in E_0^{1,+\infty}(\Omega_i)$, $i=1,2$, и пусть $f_1=f_2$ п.в. на $\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$. Тогда существует функция $f\in E_0^{1,+\infty}(\Omega)$ такая, что $f|\Omega_i = f_i$.

Доказательство приведено в [7] для частного случая; общий случай получается аналогично. ◍

Из внешне-внутренней факторизации легко вытекает, что если $f\in L^p(\mathbb{T})$, $g_j\in H^q$, $fg_j\in H^r$ и у функций g_j отсутствует общий внутренний сомножитель, т.е. $\mathrm{HO\mathfrak{D}}(g_j^{in})=\mathbb{1}$, то $f\in H^p$. Утверждения такого рода представляют собой варианты абстрактного принципа Фрагмена – Линделёфа в форме В.И.Смирнова (см. [2], стр.25,42). Следующая лемма выводится отсюда стандартными приемами.

ЛЕММА 6. Пусть Ω, W – области с кусочно C^2-гладкой границей, $W\subset\Omega$ и пересечение $\partial W\cap\partial\Omega$ есть жорданова дуга α. Пусть $\beta\subset\partial\Omega$ – дуга, содержащая дугу α строго внутри себя. Тогда имеет место импликация

$$\Big[f|\beta\in L_0^{1,+\infty}(\beta,|dz|),\quad g_j\in E^p(\Omega),\quad \mathrm{HO\mathfrak{D}}(g_j^{in})=\mathbb{1},$$

$$fg_j\in E^q(\Omega),\forall j\Big]\Longrightarrow f\in E_0^{1,\infty}(W).\ ◍$$

ЛЕММА 7. Пусть область Ω разбита в объединение областей $\Omega_1,\dots,\Omega_N$; все области имеют кусочно C^2-гладкую границу. Если функция f аналитична в Ω и $f|\Omega_i\in E^p(\Omega_i)$, $p>0$, $\forall i$, то $f\in E^p(\Omega)$.

Для доказательства достаточно взять "хорошее" семейство контуров $\gamma_j\uparrow\partial\Omega$ и воспользоваться теоремой вложения Карлесона для множеств $\gamma_j\cap\Omega_i$ в областях Ω_i. ◍

3.3. Склейка. Стирание особенностей на границе. Здесь мы покажем, что продолженная функция f принадлежит классу E^2 в окрестности окружности $\mathbb{T}$.

Пусть $z\in\mathbb{T}$. Поскольку кривая Γ общего положения, точка z может лежать на границе одной или двух клеток. Если точка z лежит на границе единственной клетки R, то $F^R\varphi'\in E^2(\mathbb{D}\cap V_z)$, где V_z – достаточно малая окрестность точки z. Это вытекает из формулы (8) и условия (У2) с помощью леммы 6.

Предположим, что точка z лежит на границе клеток R и S. Пусть $\varphi(R)\subset\Omega^{(k)}$, $\varphi(S)\subset\Omega^{(k+1)}$, α – общая дуга границы этих клеток с концом в точке z. Выберем круг V_z такой, что $V_z\cap\Xi\setminus\{z\}=\emptyset$ и дуга α разбивает область $\Omega_z\stackrel{def}{=}$ $=V_z\cap\mathbb{D}$ на два криволинейных сектора (см.рис.2). В области Ω_z определено k однозначных ветвей $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ функции $\varphi^{-1} \circ \varphi$; в области $\Omega_z \cap S$ к ним добавляется еще одна ветвь ψ_{k+1}. Имеем $u^{[j]}_{(i)} = u^{[j]} \circ \psi_i$, причем индекс s из формулы (8) можно считать равным единице; $\psi_1 = id \mid \Omega_z$. Заметим еще,

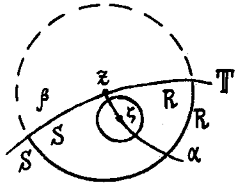

Рис.2.

что все функции ψ_i' и $u^{[j]}_{(i)} \psi_i'$ принадлежат классу E^1 в своей области определения и что ψ_i' – внешние. Для любого старшего минора h^S_I м.-ф. $\left[u^{[j]}_{(i)}\right]^{j \le m}_{i \le k+1}$ из (8) имеем

$$F^S h^S_I \prod_{i=1}^{k+1} \psi_i' \in E^p(\Omega_z \cap S), \quad p < 1/(k+1). \tag{9}$$

Аналогично, для любого старшего минора h^R_J м.-ф. $\left[u^{[j]}_{(i)}\right]^{j \le m}_{i \le k}$ полагая $\nu_J = h^R_J \prod_{i=1}^{k} \psi_i'$, имеем

$$F^R \nu_J \in E^p(\Omega_z \cap R), \quad p < 1/k. \tag{10}$$

Положим $\beta = \partial\Omega_z \cap \partial S$ (см.рис.2). Поскольку $F^S = F^R$ п.в. на α, а $\varphi' F^S \mid \beta = f \mid \beta \in L^2(\beta)$, получим

$$\varphi' F^S \nu_J \in L^p(\alpha \cup \beta), \quad p < 1/(k+1). \tag{11}$$

Пользуясь условием (У2), из (9),(II) по лемме 6 заключаем, что при некотором $p > 0$,

$$\varphi' F^S \nu_J \in E^p(\Omega_z' \cap S), \tag{12}$$

где Ω_z' – относительная окрестность точки z, меньшая, чем Ω_z. Заметим, что функция из (I0) принадлежит классу $E_0^{1,+\infty}$ в области $U_\zeta \cap R$, где U_ζ – любой круг с центром $\zeta \in \alpha \cap \Omega_z$, содержащийся в области Ω_z вместе с замыканием (см.рис.2). Значит, для меньшего круга U_ζ' имеем:

$$\varphi' F^S \nu_J \in E_0^{1,+\infty}(U_\zeta' \cap S), \quad \varphi' F^R \nu_J \in E_0^{1,+\infty}(U_\zeta' \cap R).$$

Согласно лемме 5, функции F^S и F^R аналитически "склеиваются" в круге U_ζ', а поскольку точка ζ выбиралась произвольно, то во всей области Ω_z. "Склеенную" функцию обозначим через F. Теперь из (I0) и (I2), применяя лемму 7, видим, что при некотором $p > 0$,

$$\varphi' F \nu_J \in E^p(\Omega'_z).$$

Условие (У2) обеспечивает равенство $HO\mathscr{Z}(\nu_J^{in}) = \mathbb{1}$, где J пробегает подмножества $\{1, \ldots, m\}$ из k элементов. Снова применяя принцип Фрагмена – Линделёфа (лемму 6) получаем, что $f = \varphi' F \in E^2(\Omega''_z)$ для меньшей области Ω''_z. ⊘

3.4. <u>Стирание дуг</u>. Точно так же, как в п.3.3 для дуги α , доказывается, что функции F^R аналитически продолжаются через все дуги множества $\varphi^{-1}(\Gamma) \cap \mathbb{D}$. В результате получаем функцию F , мероморфную в круге $\mathbb{D}$ за исключением, быть может, конечного числа точек – вершин $\varphi^{-1}(\Gamma)$.

<u>Стирание особенностей внутри круга</u>. Покажем, что все особые точки функции F являются полюсами. Пусть z – вершина множества $\varphi^{-1}(\Gamma)$. Рассмотрим ее круговую окрестность V_z столь малую, что она разбивается дугами множества $\varphi^{-1}(\Gamma)$ на криволинейные секторы и $V_z \cap \Xi \setminus \{z\} = \emptyset$. Пусть $\psi_1 = id$, $\psi_2, \ldots, \psi_k$ – ветви функции $\varphi^{-1} \circ \varphi$, определенные во всем круге V_z , т.е. такие, что $\psi_i(z) \in \mathbb{D}$. Некоторые из них могут переставляться при обходе точки z . Рассмотрим функции

$$G_j = \sum_{i=1}^{k} u^{[j]}_{(i)} \cdot (F \circ \psi_i), \quad j \leq m, \tag{13}$$

аналитические и однозначно определенные в $V_z \setminus \{z\}$, поскольку ветви ψ_i , $i \leq k$, входят в формулу симметрично. Пусть

R – любая из клеток, на границе которой лежит точка z . В ней определены ветви $\psi_1, \ldots, \psi_r$, $r \geq k$, функции $\varphi^{-1} \circ \varphi$. Из равенства (6) следует, что

$$K_{v^{[j]}} g \circ \varphi = \sum_{i=1}^{r} u^{[j]}_{(i)} \cdot (F \circ \psi_i) \qquad \text{в} \quad R.$$

При $i > k$, $\psi_i(z) \in \mathbb{T}$, и значит, области $R_i = \psi_i(R \cap V_z)$ граничат с окружностью. Уменьшая, если нужно, круг V_z , можно считать, пользуясь доказанным в п.3.3, что $\varphi' F \in E^2(R_i)$. Тогда при $i > k$,

$$(F \circ \psi_i) \cdot \varphi' \cdot (\psi_i')^{-1/2} = (\varphi' F \circ \psi_i)(\psi_i')^{1/2} \in E^2(R \cap V_z),$$

откуда $u^{[j]}_{(i)} \cdot (F \circ \psi_i) \varphi' \in E^1(R \cap V_z)$. С другой стороны,

$$(K_v[\vartheta]_g \circ \varphi)(\varphi')^2 \in E^{1/2}(\mathbb{R} \cap V_z) .$$

Таким образом, мы видим, что $(\varphi')^2 G_j \,|\, \mathbb{R} \cap V_z \in E^{1/2}(\mathbb{R} \cap V_z)$. По лемме 7, $(\varphi')^2 G_j \in E^{1/2}(V_z \setminus \{z\})$, откуда вытекает, что функции G_j могут иметь в точке z лишь полюс. Матрица системы (I3) имеет максимальный ранг в $V_z \setminus \{z\}$ по условию (УI), и решая эту систему относительно $(F \circ \psi_1) = F$, получим, что функция F также имеет в точке z полюс, причем его кратность оценивается константой, зависящей от U , но не от f . ◍

3.5. <u>Завершение доказательства</u>. Итак, показано, что произвольная функция $f \in L^2(\mathbb{T})$, "ортогональная" пространству $E_T(U)$, $T = T_\varphi$, продолжается до функции класса H^2 с точностью до конечного числа полюсов в фиксированных точках с фиксированной оценкой кратности. Это значит, что $E_T(U)$ – подпространство H^2 конечной коразмерности. Остается воспользоваться леммой I и тем, что условия (УI) и (I) в нашем случае равносильны. ◍

Литература

I. С о л о м я к Б.М. О кратности спектра аналитических операторов Тёплица. – Докл.АН СССР, 1986, т.286, № 6, с.1308–1311.
2. Н и к о л ь с к и й Н.К. Лекции об операторе сдвига. М., 1980.
3. Н и к о л ь с к и й Н.К. Наброски к вычислению кратности спектра ортогональных сумм. – В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. XII. Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.126, с.150–159.
4. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.
5. D u r e n P.L. Theory of H^p-spaces. N.-Y., L.: Academic Press, 1970.
6. D a v i d G. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe. – Ann.sci. Ec.Norm. Sup., 4-e série, 1984, v.17, p.157–189.
7. А л е к с а н д р о в А.Б. Об A-интегрируемости граничных значений гармонических функций. – Матем.заметки, 1981, т.30, № I, с.59–73.

B.M.Solomjak. Cyclic sets for analytic Toeplitz operators.

Summary

Analytic Toeplitz operators $T_\varphi : f \mapsto \varphi f$, $\varphi \in H^\infty$, in the space H^2 are considered. In the case of smooth symbol and under some hypotheses of geometric nature on the curve $t \mapsto \varphi(e^{it})$, a full description of cyclic families is obtained. This description is based on the notions of an outer function and pseudocontinuation, which are employed to characterize cyclic vectors for the shift operator and its adjoint.