A. M. Elizarov, N. B. Il'inskii, A. V. Potashev, Quasi solutions of an inverse boundary value problem of hydroaerodynamics, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985, Volume 284, Number 2, 319–322

А.М. ЕЛИЗАРОВ, Н.Б. ИЛЬИНСКИЙ, А.В. ПОТАШЕВ

КВАЗИРЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОАЭРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком Л.И. Седовым 10 I 1985)

Рассмотрим обратную краевую задачу гидроаэродинамики в следующей постановке [1–3]: определить форму замкнутого крылового профиля с одной острой кромкой в точке B, обтекаемого плоским потенциальным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости, по заданному вдоль его поверхности L_z распределению скорости $v = f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ (s – дуговая абсцисса L_z, отсчитываемая от $s = 0$ на острой кромке B до $s = L$ на ней же, L – заданный периметр). Функция $f(s)$ гёльдеровская, величина скорости на бесконечности равна v_∞.

При обтекании крылового профиля с закругленной передней и острой задней кромками точка B, в силу гипотезы Жуковского – Чаплыгина, является точкой схода потока, а на передней кромке имеется точка A ($s = s_A$) разветвления потока, в которой скорость обращается в нуль первого порядка (при $0 < s < s_A$ направление скорости противоположно направлению обхода контура, а при $s_A < s < L$ совпадает с ним). Величина скорости $v = v_B$ в точке B ограничена и отлична от нуля, если задняя кромка является бесконечно тонкой ($\epsilon = 2$, где $\epsilon\pi$ – внутренний к области течения угол в точке B). При $1 < \epsilon < 2$ величина $v_B = 0$. Таким образом, чтобы функция $f(s)$ характеризовала скорость на поверхности крылового профиля, она должна удовлетворять следующим условиям: $f(s) < 0$ при $0 < s < s_A$, $f(s) > 0$ при $s_A < s < L$; $f(s) \sim c_1(s - s_A)$ в окрестности s_A, $f(L) = -f(0) = v_B > 0$ при $\epsilon = 2$; $f(s) \sim -c_2 s^{2/\epsilon - 1}$ и $f(s) \sim c_2(L - s)^{2/\epsilon - 1}$ соответственно в окрестностях точек $s = 0$ и $s = L$ при $1 < \epsilon < 2$, $c_j = \mathrm{const} > 0$, $j = 1, 2$.

Пусть при конформном отображении $z = z(\zeta)$ внешности искомого профиля соответствует область $E^- = \{\zeta = re^{i\theta}, r > 1\}$ в плоскости ζ, причем $z(\infty) = \infty$, а $\zeta_B = 1$ является прообразом точки B. Решив систему для определения неизвестных параметров, найдем $\zeta_A = e^{i(\pi + 2\alpha)}$, где аргумент скорости на бесконечности α ($|\alpha| < \pi/2$) однозначно определяется из уравнения $\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \pi\varphi_\text{в}/\Gamma - \pi/2$ ($\Gamma = \int_0^L f(s)ds$ – циркуляция скорости, $\varphi_\text{в} = \int_{s_A}^L f(s)ds$). Интегральное представление решения определяется единственным образом и имеет вид

$$z(\zeta) = (\mathfrak{A}p)(\zeta) \equiv \int_1^\zeta (\zeta - \zeta^{-1})^{\epsilon - 1} \exp[(\mathfrak{S}p)(\zeta)]d\zeta, \quad \zeta \in E^-,$$

где $(\mathfrak{S}p)(\zeta) = -(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} p(\theta)[(e^{i\theta} + \zeta)/(e^{i\theta} - \zeta)]d\theta$, а гёльдеровская функция $p(\theta) = \ln|s'(\theta)| - (\epsilon - 1)\ln[2\sin(\theta/2)]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, причем $s(\theta) \in C^1$ является решением дифференциального уравнения $f[s(\theta)] \cdot s'(\theta) = \varphi'(\theta)$, $\zeta(2\pi) = 0$, а $\varphi(\theta) = -\Gamma[\theta - 2\sin(\theta/2)\sin(\theta/2 - \alpha)/\sin\alpha](2\pi)^{-1}$ – потенциал скорости на ∂E^-. Условиями разрешимости задачи будут (ср. с [3]):

$$(1) \qquad A_1 + iA_2 \equiv \int_0^{2\pi} p(\theta)e^{i\theta}d\theta = \pi(\epsilon - 1), \quad A_3 \equiv \int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta = -2\pi\ln(4\pi v_\infty \sin\alpha/\Gamma),$$

первое из которых выражает требования замкнутости L_z. Таким образом, однозначное решение задачи существует при выполнении условий (1).

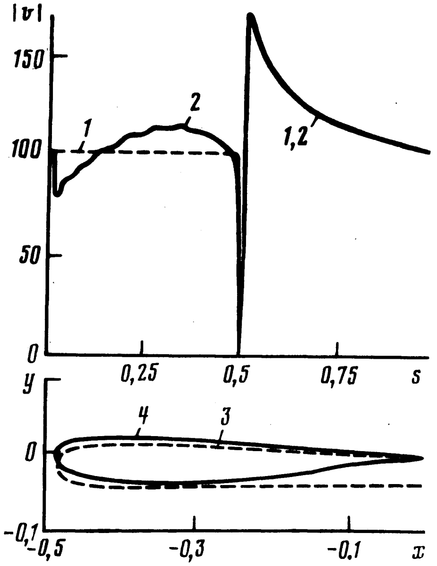

Рис. 1

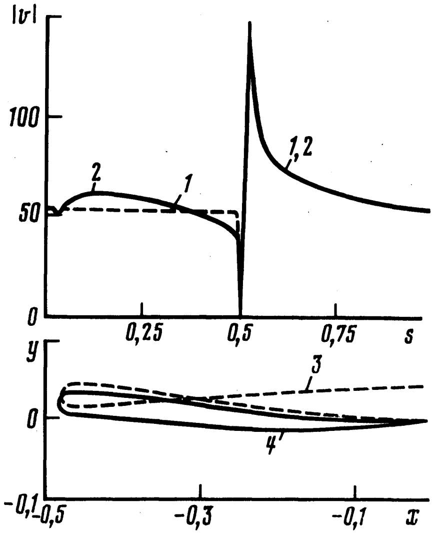

Рис. 2

Если функция $p(\theta)$ лежит в фиксированном шаре банахова пространства C_β, $0 < \beta \leqslant 1$, 2π-периодических гёльдеровских функций, то из точных оценок нормы преобразования Гильберта [4, 5] следует непрерывность оператора $(\mathfrak{S}p)(\zeta)$, $\zeta \in \bar{E}^-$ в топологии равномерной сходимости. Из последнего свойства в предположении выполнения (1) вытекает непрерывность оператора $\mathfrak{A}$ в той же топологии, что означает устойчивость решения задачи.

Получающийся при выполнении (1) замкнутый контур может оказаться неоднолистным, что означает физическую нереализуемость решения задачи. Наличие угловой точки контура L_z ограничивает возможность выбора достаточных условий однолистности из имеющихся. Такие условия известны лишь при $\epsilon < 2$, в частности, условие [6]

$$
|p'(\theta_1) - p'(\theta_2)| \leqslant \frac{3-\epsilon}{M(\gamma)} \left|\theta_1 - \theta_2\right|^\gamma, \quad M(\gamma) = \frac{2^\gamma}{\pi} \int_0^{\pi/2} t^\gamma \operatorname{csec} t\,dt, \tag{2}
$$
$$
0 < \gamma \leqslant 1.
$$

Если найденная функция $p(\theta)$ не удовлетворяет (1), то ее надо "подправить" так, чтобы эти условия были выполнены, а новая функция возможно меньше отличалась от исходной в некотором смысле, например, по норме некоторого пространства, элементами которого являются обе эти функции. Для этого введем обобщение понятия квазирешения некорректных задач [7] на случай обратной задачи гидроаэродинамики.

Определение. *Квазирешением обратной краевой задачи гидроаэродинамики на множестве корректности U из нормированного пространства P называется элемент $p_* \in U$, минимизирующий функционал $J(q) = \| q(\theta) - p(\theta) \|_P$ на U.*

Отметим, что множество корректности U определяется, помимо условий (1), требованиями физической реализуемости решения обратной задачи и, в частности, достаточными условиями однолистности.

Теорема 1. *Пусть $U \subset C^{1+\gamma}$ и определяется условиями* (1), (2), $P = L_2\,[0,2\pi]$. *Тогда задача нахождения квазирешения корректна по Адамару* (*квази-*

решение $p_*(\theta)$ существует, единственно и устойчиво), причем $p_*(\theta)$ является Ω-нормальным решением задачи минимизации $J(q)$ на U при $\Omega(q) = \| q(\theta) - p(\theta)\|_{C_\mu}$ с любым $0 < \mu \leqslant 1$.

Аэродинамика предъявляет к крыловым профилям требование безотрывности обтекания. Критерии безотрывности достаточно сложны даже в самых простых моделях обтекания (см., например, [8]). Предположим, что $f(s)$ имеет на верхней поверхности L_z два участка монотонности: участок разгона $[s_A, s_0]$ и участок торможения $[s_0, L]$, $s_0 \in (s_A, L)$, на котором пограничный слой считаем турбулентным. Из результатов [9], § 54, следует, что распределение скорости на $[s_0, L]$ для профиля с бесконечно тонкой задней кромкой ($\epsilon = 2$), удовлетворяющее условию безотрывности, должно иметь вид

$$f = f_1(s) \equiv v_{\max}[1 + 0{,}7R^{1/5}(s - s_0)/(s_0 - s_A)]^{-1/5}, \tag{3}$$

где $v_{\max} = f_1(s_0)$, $R = v_{\max}(s_0 - s_A)/\nu$, ν — кинематический коэффициент вязкости. Распределение (3) близко по форме к распределению Стрэтфорда [10], использованному ранее при аэродинамическом проектировании безотрывных профилей [11], но значительно проще последнего.

Пусть $f(s)$ на фиксированном участке $[s_A, s_1]$ линейна, на участке $[s_1, s_0]$ с некоторым $s_0 \in [s_1, L]$ принимает постоянное значение $v_{\max}$, а на $[s_0, L]$ имеет вид (3). Свободные параметры s_0 и $v_{\max}$ выберем так, чтобы максимизировать площадь эпюры $f(s)$ на $[s_1, L]$ для увеличения подъемной силы. В частности, при фиксированном значении R решение этой экстремальной задачи нетрудно получить в явном виде. Теперь распределение скорости по верхней поверхности полностью задано. Далее нетрудно найти в явном виде соответствующее ему выражение $p_1(\theta) = p(\theta)$ при $\theta \in [0, \pi + 2\alpha]$. Для обеспечения безотрывности обтекания на нижней поверхности можно взять в качестве $f(s)$ неубывающую функцию $f_2(s)$, $f_2(0) = -v_B$, $f_2(s_A) = 0$. Обозначим соответствующую ей функцию $p(\theta)$ при $\theta \in [\pi + 2\alpha, 2\pi]$ через $p_2(\theta)$. Условия разрешимости (1) для $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$, вообще говоря, выполняться не будут. Поэтому вновь приходим к задаче отыскания квазирешения. Отметим, что условие монотонности $f_2(s)$ эквивалентно требованию (при условии $p_2(\theta) \in C^1$)

$$p_2'(\theta) \leqslant -0{,}5\,\mathrm{tg}\,(\theta/2 - \alpha), \quad \pi + 2\alpha \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть множество U имеет вид*

$$U = \{q(\theta) \in C^1, \quad \theta \in [\pi + 2\alpha, 2\pi]\colon\ q(\pi + 2\alpha) = p_1(\pi + 2\alpha), \quad q(2\pi) = p_1(0),$$

$$\int\limits_{\pi+2\alpha}^{2\pi} [p_2(\theta) - q(\theta)] e^{i\theta} d\theta = A_1 + iA_2 - \pi(\epsilon - 1), \tag{5}$$

$$\int\limits_{\pi+2\alpha}^{2\pi} [p_2(\theta) - q(\theta)] d\theta = A_3 + 2\pi \ln(4\pi v_\infty \sin\alpha/\Gamma),$$

$$q'(\theta) \leqslant -0{,}5\,\mathrm{tg}\,(\theta/2 - \alpha)\}, \quad P = L_2[\pi + 2\alpha, 2\pi].$$

Тогда остаются в силе все утверждения теоремы 1.

З а м е ч а н и е. При задании $f(s)$ на нижней поверхности можно использовать распределение вида (3) на участке торможения и монотонно возрастающее распределение на участке разгона. При отыскании квазирешения необходимо варьировать с учетом (4) функцию $p(\theta)$ на интервале, соответствующем участку разгона.

Пусть $p_*(\theta)$ — квазирешение задачи на множестве (5), $T(\theta) = p_*(\theta) - p_2(\theta)$. В силу (5) $T(\pi + 2\alpha) = T(2\pi) = 0$, $T'(\theta) \leqslant -p_2'(\theta) - 0{,}5\,\mathrm{tg}(\theta/2 - \alpha)$, $\int\limits_{\pi+2\alpha}^{2\pi} T(\theta) e^{i\theta} d\theta =$

$$= \pi(\epsilon - 1) - A_1 - iA_2, \int_{\pi+2\alpha}^{2\pi} T(\theta)d\theta = 2\pi \ln(4\pi v_\infty \sin\alpha/\Gamma) - A_3 \text{ и } \| T(\theta) \|_{L_2}$$ минимальна. Разлагая $T(\theta)$ в ряд Фурье, приходим к задаче минимизации суммы квадратов его коэффициентов при указанных дополнительных условиях. Решив эту экстремальную задачу для отрезка ряда с достаточно большим числом M членов и увеличивая M, получим элементы минимизирующей последовательности, равномерно сходящейся к квазирешению задачи.

На рис. 1, 2 приведены примеры конкретных числовых расчетов, основанных на методе квазирешений (при $\epsilon = 2$, $s_0 = s_1$ и распределении $f_1(s)$ вида (3) с выбором параметров из условия максимума площади его эпюры), при следующих исходных данных: v_∞ = 104,2 58,05 м/с; α = 0,053, 0,07; v_{max} = 173, 150 м/с; v_B = = 102,4, 53,77 м/с; Γ = 9,26, 6,73 м^2/с; L = 1 м. Кривые *1, 3* – исходная эпюра скоростей и соответствующий ей разомкнутый контур, *2, 4* – измененная эпюра скоростей и соответствующий ей замкнутый контур для M = 10.

Авторы благодарят Г.Ю. Степанова за полезные советы и замечания.

Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н.Г. Чеботарева
при Казанском государственном университете
им. В.И. Ульянова-Ленина

Поступило
10 I 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mangler W.* Jahrbuch der Deutschen Luftfahrforschung, 1938. 2. *Тумашев Г.Г.* – Уч. зап. Казанск. ун-та, 1952, т. 112, № 3, с. 3–24. 3. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, 1965. 336 с. 4. *Аксентьев Л.А.* – Изв. вузов. Математика, 1968, № 3, с. 3–8. 5. *Александров А.Б.* – Функц. анал. и его прилож., 1975, 9, № 2, с. 1–4. 6. *Аксентьев Л.А.* Докт. дис., Казань, 1971. 320 с. 7. *Иванов В.К.*–Матем. сб., 1963, т. 61, № 2, с. 211–224. 8. *Степанов Г.Ю.* Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 5–28. 9. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с. 10. *Stratford B.S.* – J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, p. 1–16. 11. *Либек Х.* Ракетн. техн. и космонавтика, 1978, т. 16, № 12, с. 122–143.