Е. Е. Скурихин, А. Г. Сухонос, Когомологии и размерность пространств Чу, *Дальневост. матем. журн.*, 2005, том 6, номер 1, 14–22

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2005. Том 6. № 1–2. С. 14–22
УДК 512.667.5, 512.737
MSC2000 18F10, 18F20

© Е.Е. Скурихин, А.Г. Сухонос*

Когомологии и размерность пространств Чу

На пространствах Чу задаются топологии Гротендика и на этой основе определяются их размерности, пучковые когомологии и когомологические размерности. Устанавливаются взаимосвязи между различными размерностями.

Ключевые слова: *пространства Чу, топология Гротендика, пучковые когомологии, размерность,*

Введение

Категорию пространств Чу ввел (под другим названием) в своей магистерской диссертации Po-Hsiang Chu. Она была опубликована в 1979 г. в качестве приложения к работе [1], а название "пространство Чу" для введенных в ней объектов предложено в 1993 г. Барром. Пространства Чу оказались связанными со многими важными объектами и понятиями, в том числе и в компьютерной науке. Активно изучались и изучаются общие свойства пространств Чу [2–5].

В данной работе с пространствами Чу ассоциируются топологии Гротендика и на этой основе определяются их размерности, пучковые когомологии и когомологические размерности. Устанавливаются взаимосвязи между различными размерностями. В частности, дается когомологическая характеристика размерности для пространств Чу, принадлежащих некоторому классу, включающему пространства произвольной размерности.

1. Размерность пространств Чу.

Тройка (A, r, X), где $r : A \times X \longrightarrow \Sigma$ и Σ содержит больше одного элемента, называется *пространством Чу над алфавитом* Σ (или просто *пространством Чу*). В данной работе рассматриваются пространства Чу над алфавитом Σ из двух элементов $\Sigma = \{0, 1\}$; мы будем писать $\Sigma = 2$. Каждому пространству Чу (A, r, X) сопоставляется пара $F(A, r, X) = (P, 2^X)$, а именно $B \in P$ тогда и только тогда, когда существует $a \in A$ такой, что $B = \{x \in X \mid r(a, x) \neq 0\}$. Такие пары тесно связаны с соответствующими пространствами Чу; в частности, F продолжается до функтора из категории пространств Чу в категорию пар, который во многих важных случаях является полным и строгим, или даже эквивалентностью категорий [4–6]. Пространство Чу $(X, r^\perp, A)$ называется *дуальным* к (A, r, X), если $r^\perp(x, a) = r(a, x)$.

Если $F(A, r, X) = (P, 2^X)$, то при некоторых ограничениях на пространство Чу можно положить $F(X, r^\perp, A) = (Q, 2^P)$, где $q = \{q_x \in 2^P \mid x \in X\}$ и $q_x(p) = p(x)$ для любого $p \in P$. Пару $(Q, 2^P)$ будем называть *дуальной* к $(P, 2^X)$ и обозначать $(Q, 2^P) = (P, 2^X)^\perp$.

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения Российской Академии наук, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: eesku@iam.dvo.ru

В дальнейшем мы будем отождествлять 2^X с множеством подмножеств X, сопоставляя каждому отображению из X в $\{0,1\}$ множество точек, в которых оно принимает значение, отличное от нуля.

Будем предполагать также, чтобы не вдаваться в теоретико-множественные тонкости, что мощности всех элементов P конечны и ограничены сверху.

Введем понятие размерности пространства Чу, используя общее определение размерности элемента частично упорядоченного множества, снабженного топологией Гротендика [7, 8]. Напомним определение топологии Гротендика [9].

Пусть K — нижняя полурешетка. Говорят, что на K задана *топология Гротендика*, если для любого $a \in K$ зафиксирован класс $\tau(a)$ семейств вида $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\}$ таких, что выполнены 4 условия:

τ1) $\{a\} \in \tau(a)$;

τ2) если $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ и $b \leq a$, то $\alpha \wedge b = \{a_i \wedge b \in K | i \in I\} \in \tau(b)$;

τ3) если $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ и $\alpha_i = \{a_{ij} \in K | j \in J\} \in \tau(a_i)$ $(i \in I)$, то $\beta = \{a_{ij} \in K | i \in I, j \in J\} \in \tau(a)$;

τ4) если $\beta = \{b_j \leq a | j \in J\}$ и существует $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ такое, что $\alpha \prec \beta$, то $\beta \in \tau(a)$.

Для изучения пространства Чу (A, r, X) введем топологию Гротендика τ на частично упорядоченном множестве 2^X, где порядок — это включение подмножеств, следующим образом. Пусть $(P, 2^X)$ — пара (т. е. $P \subset 2^X$), $a \in 2^X$. Определим класс $\tau(a)$, полагая $\alpha = \{a_i \in 2^X | i \in I\} \in \tau(a)$ в том и только том случае, когда

$$\bigcup_{i \in I} a_i = a; \tag{1}$$

$$P_a \prec \alpha, \tag{2}$$

где $P_a = \{p \in P | p \subseteq a\}$, т. е. для любого $p \in P$ такого, что $p \subseteq a$ существует $i \in I$ такой, что $p \subseteq a_i$.

Нетрудно видеть, что это топология Гротендика. Она определяется множеством $P \subset 2^X$, и поэтому будем называть ее *P-топологией.*

Лемма 1.1. *Класс $\{\tau(a) | a \in 2^X\}$ является топологией Гротендика на 2^X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аксиомы τ1) и τ4) очевидно выполняются.

τ2) Пусть $\alpha = \{a_i \in 2^X | i \in I\} \in \tau(a)$ и $b \subseteq a$. Надо показать, что $\beta = \{a_i \cap b \mid i \in I\} \in \tau(b)$. Так как $\bigcup\limits_{i \in I}(a_i \cap b) = (\bigcup\limits_{i \in I} a_i) \cap b = a \cap b = b$, то условие (1) выполняется. Если $p \subseteq b$, то $p \subseteq a$. Значит, существует $i \in i$ такой, что $p \subseteq a_i$, откуда $p \subseteq a_i \cap b$. Проверено условие (2).

τ3) Пусть $\alpha = \{a_i \in 2^X | i \in I\} \in \tau(a)$, $\alpha_i = \{a_{ij} \in 2^X | j \in J_i\} \in \tau(a_i)$, $\gamma = \{a_{ij} | i \in I, j \in J_i\}$. Если $p \subseteq a$, то поскольку $\alpha \in \tau(a)$, значит, существует $i \in I$ такое, что $p \subseteq a_i$, а так как $\alpha_i \in \tau(a_i)$, то существует $j \in J$ такое, что $p \subseteq a_{ij}$. Равенство $\bigcup\limits_{i \in I, j \in J} a_{ij} = a$ очевидно, поэтому $\gamma \in \tau(a)$.

Данная топология Гротендика определяется множеством $P \subset 2^X$, и поэтому будем называть ее *P-топологией.*

Пусть $(P, 2^X)$ — пара и $a \in 2^X$. Через $P_a^{\#}$ будем обозначать множество *всех максимальных по включению подмножеств* P_a. Через β_a будем обозначать *семейство* $\beta_a = P_a^{\#} \cup \{\{x\} \mid x \in a,\ \{x\} \notin P_a\}$.

Лемма 1.2. *Пусть $(P, 2^X)$ — пара, τ — P-топология Гротендика на 2^X, $a \in 2^X$. Тогда $\beta_a \in \tau(a)$ и покрытие β_a вписано в любое покрытие $\alpha \in \tau(a)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha = \{a_i \in 2^X | i \in I\} \in \tau(a)$, $\beta_a = \{b_j \mid j \in J\}$. Если $b_j \in P_a^{\#}$, то $b_j \in P_a$ и, значит, по условию существует $i \in I$ такое, что $b_j \subseteq a_i$. Если $b_j \notin P_a^{\#}$, то $b_j = \{x\}$, $x \in a$. Тогда существует $i \in I$ такой, что $x \in a_i$. Таким образом, $\beta_a \prec \alpha$.

Покажем, что $\beta_a \in \tau(a)$. По построению $\bigcup\limits_{j \in J} b_j = a$. Пусть $p \in P_a$. Тогда существует $q \in P_a^{\#}$ такое, что $p \subseteq q$, и так как $q = b_j$ для некоторого $j \in J$, то $p \subseteq b_j$.

Пусть K — нижняя полурешетка с нулем, τ — топология Гротендика на K. *Кратностью* крα семейства $\alpha = \{a_i \in \ K | i \in I\}$ называется минимальное целое число n такое, что если мощность множества $\sigma \subseteq I$ больше n, то $\cap\{a_i \mid i \in \sigma\} = 0$. Число n называется *τ-размерностью* a [7–8], если в каждое τ-покрытие можно вписать τ-покрытие a кратности $\leq n+1$, и имеется τ-покрытие a кратности $n+1$, в которое нельзя вписать τ-покрытие a меньшей кратности.

Определение 1.1. Если $(P, 2^X)$ — пара, τ — P-топология Гротендика на 2^X, $a \in 2^X$, то *τ-размерность элемента* a будем обозначать через $\tau Dim\, a$. Число $\tau Dim\, X$ называется *τ-размерностью пары* $(P, 2^X)$.

Пусть $\alpha = \{a_i \in 2^X | i \in I\} \in \tau(a)$. *Кратностью кр$_x\alpha$ семейства α в точке $x \in X$* назовем мощность множества $\{i \in I \mid x \in a_i\}$. Ясно, что если кратность α конечна, то она совпадает с максимумом кратностей кр$_x\alpha$ по всем точкам $x \in X$.

Теорема 1.1. *Пусть $(P, 2^X)$ — пара, τ — P-топология Гротендика на 2^X, $a \in 2^X$ и $P_a \neq \emptyset$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\tau Dim\, a = n$;

2) кр$\beta_a = n+1$;

3) кр$P_a^{\#} = n+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $2 \Leftrightarrow 1$. Пусть кр$\beta_a = n+1$. Так как для любого $\alpha \in \tau(a)$ $\beta_a \prec \alpha$, то $\tau Dim\, a \leq \ n$. Поэтому для равенства $\tau Dim\, a = n$ достаточно доказать, что в β_a нельзя вписать покрытие кратности меньшей, чем $n+1$. Для этого убедимся, что для любого $\alpha \in \tau(a)$ выполняется кр$_x\alpha \geq$ кр$_x\beta_a$. Заметим, что если $x \in a$, то все элементы $P_a^{\#}$, содержащие точку x, принадлежат покрытию α. В самом деле, если $x \in b \in P_a^{\#}$, то, так как $\beta_a \prec \alpha$, то существует $c \in \alpha$ такое, что $b \subseteq c$, и так как $\alpha \prec \beta$, то существует $p \in P_a^{\#}$ такое, что $c \subseteq p$, т. е. $b \in P$, где $b, p \in P_a^{\#}$, откуда $b = p$ и $c = b$. Таким образом, в такой точке $x \in X$, кр$_x\alpha \geq$ кр$_x\beta_a$. Если же x не содержится ни в каком $p \in P_a^{\#}$, то кр$_x\beta_a = 1$ и тем более кр$_x\alpha \leq$ кр$_x\beta_a$.

$2 \Leftrightarrow 3$. Если точка $x \in a$ принадлежит хотя бы одному $b \in P_a$, то ясно, что кр$_x\beta_a =$ кр$_x\bar{P}_a$, откуда и следует доказательство.

Заметим, что пункт 3 в теореме 1.1 эквивалентен следующим двум условиям:

$$\forall p_0, \ldots, p_{n+1} \text{ попарно различных из } P_a^{\#},\ p_0 \cap \ldots \cap p_{n+1} = \emptyset; \tag{3}$$

$$\exists p_0, \ldots, p_n \text{ попарно различных из } P_a^{\#} \text{ такие, что } p_0 \cap \ldots \cap p_n \neq \emptyset. \tag{4}$$

Отметим случаи, в которых размерность τDim монотонна.

Лемма 1.3. *Пусть $(P, 2^X)$ — пара, τ — P-топология Гротендика на 2^X.*

1) *Если $a \in P$, то $\tau Dim\, a = 0$.*

2) *Если P такое, что вместе с любым элементом содержит все его подмножества, то для любых $a \subset b$, $\tau Dim\, a \leq \tau Dim\, b$.*

Пусть $(P, 2^X)$ — пара. Введем обозначения:

$$q_x = \{p \in P \mid x \in p\}, \qquad \bar{P} = \{p \setminus \{x\} \mid p \in P^{\#}, x \in X\} \cup P^{\#}.$$

Определение 1.2. Пусть $(P, 2^X)$ — пара, $(\bar{P}, 2^X)^{\perp} = (Q, 2^{\bar{P}})$ и $\bar{\tau}$ — Q-топология Гротендика на $2^{\bar{P}}$. Тогда число $\bar{\tau} Dim\, \bar{P}$ будем называть *дуальной размерностью* X и обозначать $\tau Dim^{\perp} X$.

Лемма 1.4. *Пусть $(P, 2^X)$ — пара такая, что $\bar{P} \subset P$ и $(P, 2^X)^{\perp} = (Q, 2^P)$. Тогда*
1) $Q \setminus \{\emptyset\} = Q^{\#}$;
2) из условия $q_{x_0} \cap \ldots \cap q_{x_n} = \{p\}$ следует $q_{x_0} \cap \ldots \cap q_{x_{n-1}} \neq \{p\}$ для любого $p \in P^{\#}$.

Доказательство. 1) Предположим, что существуют $x', x'' \in X$ такие, что $q_{x'} \subseteq q_{x''}$ и $q_{x'} \neq q_{x''}$. Тогда $x' \neq x''$. Пусть $p \in q_{x'}$. Так как существует $p^* \in P^{\#}$ такой, что $p \subseteq p^*$ и $\bar{P} \subset P$, то $p' = p^* \setminus \{x''\}$ принадлежит P. Так как $x' \in p'$ и $x'' \notin p'$, то $p' \in q_{x'}$ и $p' \notin q_{x''}$. Это противоречит включению $q_{x'} \subseteq q_{x''}$. Таким образом, $Q \setminus \{\emptyset\} = Q^{\#}$.

2) Пусть $p \in P^{\#}$ такое, что $q_{x_0} \cap \ldots \cap q_{x_n} = \{p\}$. Так как $\bar{P} \subset P$, то $p \setminus \{x_n\} \in P$, т. е. $r = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ принадлежит P . Таким образом, $\{r\} \subseteq q_{x_1} \cap \ldots \cap q_{x_{n-1}}$ и $r \neq p$, и, значит, $q_{x_0} \cap \ldots \cap q_{x_{n-1}} \neq \{p\}$.

Теорема 1.2. *Пусть $(P, 2^X)$ — пара, $(Q, 2^P) = (P, 2^X)^{\perp}$, $Q \setminus \{\emptyset\} = Q^{\#}$ и τ — Q-топология Гротендика на 2^p. Тогда $\tau Dim\, P = n$ в том и только том случае, если для любого $p \in P^{\#}$ имеет место $|p| \leq n+1$, и существует $p \in P^{\#}$ такой, что $|p| = n+1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\tau Dim\, P = n$. Из (4) следует, что существуют различные $q_{x_0}, \ldots, q_{x_n} \in Q^{\#}$ такие, что $q_{x_0} \cap \cdots \cap q_{x_n} \neq \emptyset$, следовательно, существует $p \in P$ такой, что $p \subseteq q_{x_0} \cap \cdots \cap q_{x_n}$. Покажем, что $\{x_0, \ldots, x_n\} = p$. Включение $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq p$ очевидно. Пусть $y \in Y$ такой, что $y \in p$. Тогда $p \in q_y$. Так как по условию теоремы $q_y \in Q^{\#}$, то $q_{x_0} \cap \cdots \cap q_{x_n} \cap q_y \neq \emptyset$. Тогда из (4) следует, что существует i, $0 \leq i \leq n$, такое, что $q_{x_i} = q_y$. Таким образом, $\{x_0, \ldots, x_n\} = p$ и $p \in P^{\#}$.

Из $\tau Dim\, P = n$ и условия (3) следует, что для любого $p \in P_a^{\#}$ имеет место $|p| \leq n+1$.

Достаточность. Так как кр$Q^{\#} = n+1$, то по теореме 1.1 $\bar{\tau} Dim\, \bar{P} = n$, где τ — Q-топология Гротендика на $2^{\bar{P}}$. Таким образом, $\tau Dim^{\perp} X = n$.

Следующий результат является следствием теоремы 1.2 с учетом леммы 1.4.

Теорема 1.3. *Пусть $(P, 2^X)$ — пара. Тогда $\tau Dim^{\perp} X = n$ в том и только том случае, если для любого $p \in P^{\#}$ имеет место $|p| \leq n+1$, и существует $p \in P^{\#}$ такой, что $|p| = n+1$.*

Пусть $(P, 2^X)$ — пара. Обозначим, через $\check{P}$ *нижнюю полурешетку, порожденную* P, т. е. $c \in \check{P}$ в том и только том случае, если $c = b_0 \cap \ldots \cap b_k$ для некоторых $b_0, \ldots, b_k \in P$. $\check{P}$-топологию Гротендика на 2^X будем обозначать через $\check{\tau}$.

Лемма 1.5 *Пусть $(P, 2^X)$ — пара. Тогда $\tau(X) = \bar{\tau}(X) = \check{\tau}(X)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \tau(X)$. Так как $\bar{P} \subset P$, то $\bar{P} \prec \alpha$. Пусть $\alpha \in \bar{\tau}(X)$. Поскольку $P \prec \bar{P}$, то $P \prec \alpha$. Таким образом, $\tau(X) = \bar{\tau}(X)$. Аналогично $\tau(X) = \check{\tau}(X)$.

2. Пучковые когомологии пространств Чу

Пусть K — нижняя полурешетка. Предположим, что для всякого a из K задана абелева группа $\mathcal{A}(a)$, для любых $a, b \in K$, таких, что $b \leq a$, задан гомоморфизм $\rho_b^a : \mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{A}(b)$, и при этом выполняются следующие условия:

$(pF1)$ если $a, b, c \in K$ такие, что $c \leq b \leq a$, то $\rho_c^a = \rho_c^b \circ \rho_b^a$;

$(pF2)$ $\rho_a^a = id_{\mathcal{A}}(a) : \mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{A}(a)$ — тождественное отображение.

Тогда говорят, что на K задан абелев предпучок $\mathcal{A}$. В дальнейшем, слово “абелев” будет опускаться, так как в данной работе рассматриваются только абелевы предпучки. Гомоморфизм ρ_b^a называется *гомоморфизмом ограничения*. Элемент $\rho_b^a(s) \in \mathcal{A}(b)$, где $s \in \mathcal{A}(a)$, будем обозначать $s|b$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — предпучки на K, тогда $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ называются *гомоморфизмом предпучков*, если для любых $a, b \in K$ таких, что $b \leq a$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(a) & \xrightarrow{u(a)} & \mathcal{B}(a) \\ \downarrow \rho_b^a & & \downarrow \rho_b^a \\ \mathcal{A}(b) & \xrightarrow{u(b)} & \mathcal{B}(b), \end{array}$$

где $u(a) : \mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{B}(a)$ — гомоморфизм абелевых групп для любого $a \in K$.

Совокупность подгрупп $\mathcal{B}(k) \subset \mathcal{A}(k)$ $(k \in K)$ называется подпредпучком $\mathcal{A}$, если для любых $a \leq b$ $(a, b \in K)$, $s \in \mathcal{B}(a)$ имеет место $s|b \in \mathcal{B}(b)$. Таким образом, подпредпучок также является предпучком, а отображения ограничений в нем определяются так, чтобы включения $\mathcal{B}(k) \longrightarrow \mathcal{A}(k)$ задавали гомоморфизм предпучков.

Пусть $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ — гомоморфизм предпучков, тогда подпредпучок $keru$ предпучка $\mathcal{A}$ называются ядром гомоморфизма предпучков, если $(keru)(a) = ker(u(a)) : \mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{B}(a)$, и подпредпучок imu предпучка $\mathcal{B}$ называется образом гомоморфизма предпучков, если $(imu)(a) = im(u(a)) : \mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{B}(a)$.

Говорят, что последовательность предпучков $\mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C}$ *точна*, если для любого $a \in K$ последовательность абелевых групп $\mathcal{A}(a) \xrightarrow{u(a)} \mathcal{B}(a) \xrightarrow{v(a)} \mathcal{C}(a)$ точна.

Напомним некоторые определения, связанные с топологиями Гротендика [7–9].

Пусть $\mathcal{A}$ — предпучок на K, $a \in K$ и $s \in \mathcal{A}(a)$. Если существует $\alpha=\{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ такое, что для любого $i \in I$ имеет место $s|a_i = 0$, то s называется *τ-нулевым.* Если для любого $a \in K$ все $s \in \mathcal{A}(a)$ являются τ-нулевыми, то *предпучок* $\mathcal{A}$ называется *τ-нулевым.*

Подпредпучок $\mathcal{A}$ предпучка $\mathcal{B}$ называется *τ-плотным* в предпучке $\mathcal{B}$, если для любых $a \in K$, $s \in B(a)$ существует покрытие $\alpha=\{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ и семейство $\{t_i \in \mathcal{A}(a_i) | i \in I\}$ такое, что $t_i = s|a_i$ для любого $i \in I$.

Говорят, что последовательность предпучков $\mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C}$ *τ-точна*, если для любого $a \in K$ выполняются следующие условия:

1) для любого $s \in \mathcal{A}(a)$ элемент $(v \circ u)(s) \in \mathcal{C}(a)$ является τ-нулевым;

2) для любого $t \in \mathcal{B}(a)$ такого, что $v(t) = 0$, существует $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ и $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) | i \in I\}$ такое, что для любого $i \in I$ имеет место $u(s_i) = t|a_i$.

Семейство $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) | i \in I\}$ называется *согласованным*, если $s_i|a_i \wedge a_j = s_j|a_i \wedge a_j$ для любых $i, j \in I$.

Пусть τ — P-топология Гротендика на K. Предпучок $\mathcal{A}$ на K называется *τ-пучком*, если для любого $a \in K$ выполняются следующие условия:

$(\tau F1)$ для любых $s, t \in \mathcal{A}(a)$ и для любого $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ из того, что $s|a_i = t|a_i$ $(i \in I)$, следует, что $s = t$;

$(\tau F2)$ для любого $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ и для любого согласованного семейства $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) | i \in I\}$ существует $s \in \mathcal{A}(a)$ такое, что $s|a_i = s_i$ для любого $i \in I$.

Под категорией пучков понимается полная подкатегория категории предпучков, состоящая из пучков.

Категория абелевых пучков является абелевой и содержит достаточно много инъективных объектов.

При этом последовательность τ-пучков $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ точна тогда и только тогда, когда она τ-точна, как последовательность предпучков, ядро $Keru$ гомоморфизма пучков $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ совпадает с $keru$ - ядром u в категории предпучков, а Imu определяется так: $s \in (Imu)(a)$ в том и только том случае, когда существует $\{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ такое, что $s|a_i \in (imu)(a_i)$ для любого $i \in I$.

Известно, что для любого предпучка $\mathcal{A}$ существует такой гомоморфизм $u : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$, что $keru$ — τ-нулевой предпучок, imu — τ-плотен в $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ — τ-пучок. Такой пучок $\tilde{\mathcal{A}}$ определен с точностью до изоморфизма и называется τ-пучком, порожденным предпучком $\mathcal{A}$.

Пусть $a \in K$, $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\}$ — семейство элементов и $\mathcal{A}$ — предпучок на K. Стандартным образом строится цепной комплекс $C^*(\alpha, \mathcal{A})$, т. е. последовательность вида $0 \longrightarrow C^0(\alpha, \mathcal{A}) \xrightarrow{d^0} C^1(\alpha, \mathcal{A}) \xrightarrow{d^1} C^2(\alpha, \mathcal{A}) \longrightarrow \ldots$, где $d^k \circ d^{k-1} = 0$. А именно, для любого $p \geq 0$ полагаем $C^p(\alpha, \mathcal{A}) = \prod\{\mathcal{A}(a_s) \mid s \in I^{n+1}\}$, где $a_s = a_{i_0} \cap \ldots \cap a_{i_n}$, если $s = (i_0, \ldots, i_n)$. Таким образом, $\delta \in C^p(\alpha, \mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $\delta = \{\delta_s \in \mathcal{A}(a_s) \mid s \in I^{n+1}\}$. Последовательность отображений $d^p : C^p(\alpha, \mathcal{A}) \longrightarrow C^{p+1}(\alpha, \mathcal{A})$ задаваемых формулой $(d^p\delta)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k \delta_{i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{p+1}}|a_{i_0,\ldots,i_{p+1}}$, превращает $\{C^p(\alpha, \mathcal{A}) \mid p \in Z\}$ в комплекс.

Через $H^p(\alpha, \mathcal{A}) = H^p(C^*(\alpha, \mathcal{A}))$ обозначим *p-ю группу когомологий цепного комплекса* $C^*(\alpha, \mathcal{A})$. Тогда *когомологии Александрова-Чеха элемента a с коэффициентами в τ-пучке* $\mathcal{A}$ определяются равенством $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = \varinjlim_{\tau(a)} H^n(\alpha, \mathcal{A})$.

Группа *когомологий Гротендика* $H^n_\tau(a, \mathcal{A})$ — это $R^n\Gamma_a(\mathcal{A})$, где $R^n\Gamma_a$ — n-й правый производный функтор, Γ_a — функтор из категории τ-пучков в категорию абелевых групп, который задается формулой $\Gamma_a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$.

Пусть $a \in K$. Покрытие $\beta \in \tau(a)$ такое, что его можно вписать в любое покрытие $\alpha \in \tau(a)$, назовем минимальным покрытием элемента a. Заметим, что если β — минимальное покрытие, то для любого предпучка $\mathcal{A}$ выполняется равенство $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = H^n_\tau(\beta, \mathcal{A})$.

Лемма 2.1. *Пусть K — нижняя полурешетка, τ — топология Гротендика на K и каждый $a \in K$ обладает минимальным τ-покрытием β_a. Предпучок $\mathcal{A}$ на K — τ-нулевой в том и только том случае, если для любых $a \in K$, $s \in \mathcal{A}(a)$ и элемента b покрытия β_a $s|b = 0$.*

В частности, если $\{b\}$ является минимальным покрытием b, то $\mathcal{A}(b) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $a \in K$, $s \in \mathcal{A}(a)$. Так как предпучок $\mathcal{A}$ — τ-нулевой, то существует $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$ такое, что для любого $i \in I$ имеет место $s|a_i = 0$. Поскольку $\beta_a \prec \alpha$, то для любого $b \in \beta_a$ существует $i \in I$ такой, что $b \leq a_i$. Следовательно, для любого $b \in \beta_a$ имеет место $s|b = s|a_i|b = 0$.

Достаточность. Очевидно.

Лемма 2.2. *Пусть $(P, 2^X)$ — пара, τ — P-топология Гротендика на 2^X. Если $\mathcal{A}$ — τ-нулевой предпучок, P — нижняя полурешетка, то $\check{H}^n_\tau(X, \mathcal{A}) = 0$ для любого $n \geq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.2 β_X — минимальное покрытие X, так что достаточно показать, что $C^n(\beta_X, \mathcal{A}) = 0$. Пусть $\delta \in C^n(\beta_X, \mathcal{A}) = 0$, $s = (i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$ и $\delta_s \in \mathcal{A}(b_s)$. Если $b_{i_0}, \ldots, b_{i_n} \in P^\#$, то $b = b_{i_0} \cap \ldots \cap b_{i_n} \in P$, так что $\{b\}$ — минимальное τ-покрытие b, и по лемме 2.1 $\mathcal{A}(b) = 0$. Таким образом, $\delta_s = 0$.

Теорема 2.1. *Пусть $(P, 2^X)$ — пара, $\tilde{\mathcal{A}}$ — τ-пучок, порожденный $\mathcal{A}$. Тогда*

1) *$\check{H}^n_{\check{\tau}}(a, \mathcal{A}) = H^n_{\check{\tau}}(a, \tilde{\mathcal{A}})$ для любого $a \in 2^X$;*

2) *для любого предпучка $\mathcal{A}$ на 2^X $\check{H}^n_{\check{\tau}}(X, \mathcal{A}) = \check{H}^n_\tau(X, \mathcal{A}) = H^n(\beta_X, \mathcal{A})$. Если же $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$, то все эти группы равны $H^n_{\check{\tau}}(X, \tilde{\mathcal{A}})$;*

3) *$\tau Dim\, X = \check{\tau} Dim\, X$;*

4) *если $n = \tau Dim\, X$, то для любого $m > n$ и для любого абелева предпучка $\mathcal{A}$ с условием $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$ $\check{H}^m_{\check{\tau}}(X, \mathcal{A}) = \check{H}^m_\tau(X, \mathcal{A}) = H^m(\beta_X, \mathcal{A}) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Равенство $H^n_{\check{\tau}}(a, \tilde{\mathcal{A}}) = \check{H}^n_{\check{\tau}}(a, \mathcal{A})$ можно вывести из леммы 2.2 и спектральной последовательности, связывающей когомологии Чеха и Гротендика [9]. Необходимые детали имеются, например, в [7, 8].

2) Первые два равенства следуют из соотношения $\tau(x) = \check{\tau}(x)$ и того факта, что β_X — минимальное τ-покрытие X. Равенство $H^n_{\check{\tau}}(X, \tilde{\mathcal{A}}) = \check{H}^n_{\check{\tau}}(X, \mathcal{A})$ следует из 1).

3) Следует из соотношения $\tau(X) = \check{\tau}(X)$.

4) Следует из п. 2 и того известного факта, что когомологии семейства элементов нижней полурешетки с коэффициентами в любом предпучке с условием $\mathcal{A}(0) = 0$ равны нулю, если m — число, большее, чем кратность этого семейства (необходимые ссылки имеются в [7, 8]).

Определение 2.1 Пусть $(P, 2^X)$ — пара. Определим когомологические размерности элемента $a \in 2^X$ следующим образом:

$$c\tau D_{\mathcal{A}} a \le n \Leftrightarrow \check{H}^{n+k}_\tau(a, \mathcal{A}) = 0 \ \ \forall k > 0,$$
$$c\tau D a \le n \Leftrightarrow \check{H}^{n+k}_\tau(a, \mathcal{A}) = 0 \ \ \forall \mathcal{A} - \text{абелева предпучка и } \forall k > 0.$$

Лемма 2.3 *Пусть* $(P, 2^X)$ *— пара. Тогда* $c\tau D_{\mathcal{A}} X = c\check{\tau} D_{\mathcal{A}} X = c\bar{\tau} D_{\mathcal{A}} X \le c\tau D X = = c\check{\tau} D X = c\bar{\tau} D X \le \tau Dim\, X = \check{\tau} Dim\, X = \bar{\tau} Dim\, X$.

Доказательство. Равенства $c\tau D_{\mathcal{A}} X = c\check{\tau} D_{\mathcal{A}} X = c\bar{\tau} D_{\mathcal{A}} X$, $c\tau D X = c\check{\tau} D X = c\bar{\tau} D X$ и $\tau Dim\, X = \check{\tau} Dim\, X = \bar{\tau} Dim\, X$ следуют из соотношения $\tau(x) = \check{\tau}(x) = \bar{\tau}(x)$. Очевидно, $c\tau D_{\mathcal{A}} X \le c\tau D X$. Из теоремы 2.1, п. 4, следует, что $c\tau D X \le \tau Dim\, X$.

Теперь мы покажем, что для достаточно широкого класса пространств Чу, содержащего, в частности, пространства любой наперед заданной размерности, имеет место равенство $c\tau D X = \tau Dim\, X$, т. е. размерность характеризуется когомологически.

Лемма 2.4. *Пусть* $(P, 2^X)$ *— пара, Если существует такой набор* $\{p_0, \ldots, p_n\} \subseteq P^\#$, *что* $p_0 \cap \ldots \cap p_n$ *не пусто, и пересечение любого набора из* k *элементов* $P^\#$ *при* $k < n$ *и* $k > n$ *не равно* $p_0 \cap \ldots \cap p_n$, *то существует предпучок* $\mathcal{A}$ *на* 2^X *такой, что* $H^n(\beta_X, \mathcal{A}) \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим предпучок $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}(b) = 0$ для любого $b \in 2^X$, кроме $\mathcal{A}(p_0 \cap \ldots \cap p_n) = Z$, и $\rho^c_d = 0$ при $c \neq d$. Как известно, когомологии Чеха можно вычислять по кососимметрическим коцепям, т. е. по коцепному комплексу $C^*_a(\beta_X, \mathcal{A}) \subset C^*(\beta_X, \mathcal{A})$, так, что если $\delta \in C^*(\beta_X, \mathcal{A})$, то $\delta_s = 0$ для любого $s \in I^{n+1}$, содержащего повторяющиеся индексы. В силу определения предпучка $\mathcal{A}$ и условия данной леммы $C^{n-1}_a(\beta_X, \mathcal{A})$ и $C^{n+1}_a(\beta_X, \mathcal{A})$ — нулевые группы, а $C^n_a(\beta_X, \mathcal{A}) \neq 0$. Поэтому $H^n(\beta_X, \mathcal{A}) \neq 0$.

Лемма 2.5 *Пусть* $(P, 2^X)$ *— пара такая, что* $\bar{P} \subset P$, $(P, 2^X)^\perp = (Q, 2^P)$ *и* $\tau Dim\, P = n$, *где* τ *—* Q*-топология Гротендика на* 2^P. *Тогда существует предпучок* $\mathcal{A}$ *на* 2^P *такой, что* $H^n(\beta_P, \mathcal{A}) \neq 0$.

Доказательство. Так как $\bar{P} \subset P$, то согласно лемме 1.4 $Q \setminus \{\emptyset\} = Q^\#$. Поскольку $\tau Dim\, P = n$, то по теореме 1.2 существуют $p \in P^\#$ и попарно различные точки $x_0, \ldots, x_n \in X$ такие, что $\{x_0, \ldots, x_n\} = p$ и $q_{x_0} \cap \ldots \cap q_{x_n} = \{p\}$. Из леммы 1.4 и условия (3) следует, что для любого $k < n$ и $k > n$ имеет место $q_{x_{i_0}} \cap \ldots \cap q_{x_{i_k}} \neq \{p\}$. Поэтому по лемме 2.4 существует предпучок $\mathcal{A}$ на 2^P такой, что $H^n(\beta_P, \mathcal{A}) \neq 0$.

Следующие результаты вытекают теперь из теоремы 2.1.

Теорема 2.2 *Пусть* $(P, 2^X)$ *— пара,* $(Q, 2^{\bar{P}}) = (\bar{P}, 2^X)^\perp$, $\tau Dim^\perp X = n$, $\bar{\tau}$ *—* Q*-топология Гротендика на* $2^{\bar{P}}$. *Тогда существует* $\bar{\tau}$*-пучок* $\mathcal{A}$ *на* $2^{\bar{P}}$, *такой, что* $\check{H}^n_{\bar{\tau}}(\bar{P}, \mathcal{A}) \neq 0$.

Теорема 2.3 *Пусть* $(P, 2^X)$ *— пара такая, что* $\bar{P} \subset P$ *и* $(P, 2^X)^\perp = (Q, 2^P)$. *Тогда* $\check{\tau} Dim\, P = c\check{\tau} D P$, *где* $\check{\tau}$ *—* $\check{Q}$*-топология Гротендика на* 2^P.

Как показывают примеры, равенство $\tau Dim\, X = c\tau D X$ выполняется не всегда. Поэтому полезным является такое следствие теоремы 2.3.

Теорема 2.4 *Пусть* $(P, 2^X)$ *— пара, удовлетворяющая следующему условию:*

$$\forall x \in X, \forall p \in P \ \exists y \in Y : q_x \setminus \{p\} = q_y.$$

Предположим также, что $(P, 2^X)^{\perp\perp} = (P, 2^X)$ *(достаточные условия этого легко сформулировать). Тогда* $\tau Dim\, X = c\tau DX$, *где* τ — P*-топология Гротендика на* 2^X.

Доказательство. Пусть $(Q, 2^P) = (P, 2^X)^{\perp}$. Тогда $(Q, 2^P)^{\perp} = (P, 2^X)$. Поскольку из условия теоремы следует, что $\bar{Q} \subseteq Q$, то по теореме 2.3 $\check{\tau} Dim\, X = c\check{\tau} DX$, где $\check{\tau}$ — $\check{P}$-топология Гротендика на 2^X. Из леммы 2.3 следует, что $\tau Dim\, X = c\tau DX$, где τ — P-топология Гротендика на 2^X.

3. Вялая размерность

Определим по аналогии с соответствующими топологическими понятиями вялую размерность и размерность Бредона пространств Чу.

Определение 3.1. Пусть $\mathcal{A}$ — τ-пучок на паре $(P, 2^X)$, где τ — $P^{\#}$-топология Гротендика на 2^X, $a \in 2^X$. Пучок $\mathcal{A}$ назовем *a-вялым*, если отображение ограничения $\mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{A}(b)$ является эпиморфизмом для любого $b \subset a$.

Резольвентой τ-пучка $\mathcal{A}$ на K называют точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{A}^2 \longrightarrow \ldots,$$

где $\mathcal{A}^k$ — τ-пучки на K для любого $k \geq 0$.

Если τ-пучок $\mathcal{A}$ обладает a-вялой резольвентой длины n и не обладает резольвентой меньшей длины, то говорят, что его *вялая размерность* равна n и обозначают $Bd_{\mathcal{A}}a = n$. Максимум $Bd_{\mathcal{A}}a$ по всем τ-пучкам A называется *размерностью Бредона Bda* элемента a.

Напомним определение когомологий пары [7, 8]. Если K — нижняя полурешетка, $a, b \in K$, $b \leq a$, $\mathcal{A}$ — τ-пучок, то имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Gamma_{a,b}(\mathcal{A}) \longrightarrow \Gamma_a(\mathcal{A}) \longrightarrow \Gamma_b(\mathcal{A}),$$

где $\Gamma_a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$, $\Gamma_{a,b}(\mathcal{A}) = ker(\mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{A}(b))$. $(R^n\Gamma_{a,b})(\mathcal{A})$ обозначается через $H^n(a, b, \mathcal{A})$, где R^n — n-й правый производный функтор. Известно, [7, 8] имеется точная последовательность пары (a, b):

$$\ldots \longrightarrow H^k(a, b, \mathcal{A}) \longrightarrow H^k(a, \mathcal{A}) \longrightarrow H^k(b, \mathcal{A}) \longrightarrow H^{k+1}(a, b, \mathcal{A}) \longrightarrow \ldots$$

В работах [4, 5] доказаны характеристики вялой размерности, относящиеся к произвольным сайтам Гротендика, которые для случая пространств Чу могут быть сформулированы так:

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — τ-пучок на паре $(P, 2^X)$ и a — фиксированный элемент 2^X, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $Bd_{\mathcal{A}}a \leq n$;

2) *для любой резольвенты $\mathcal{A}$ длины n:* $0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{A}^n \longrightarrow 0$ *из того, что для любого* $0 \leq i \leq n-1$ *τ-пучки $\mathcal{A}^i$– a-вялые, следует, что τ-пучок $\mathcal{A}^n$ — a-вялый;*

3) $H^{n+1}(a, b, \mathcal{A}) = 0$ *для любого* $b \leq a$;

4) $H^k(a, b, \mathcal{A}) = 0$ *для любого* $b \leq a$, *при* $k > n$;

5) $H^n(a, \mathcal{A}) \longrightarrow H^n(b, \mathcal{A})$ — *эпиморфизм для любого* $b \leq a$;

6) $H^{n+1}(a, b, \mathcal{A}) \longrightarrow H^{n+1}(a, \mathcal{A})$ — *мономорфизм, для любого* $b \leq a$.

Отсюда следует такой результат о связях вялых размерностей с размерностью пространств Чу.

Теорема 3.2. *Пусть* $(P, 2^X)$ *— пара, где* P *вместе с каждым своим элементом содержит все его подмножества,* $a \in 2^X$, τ *—* P*-топология гротендика на* 2^X. *Тогда*

1) $Bd_{\mathcal{A}} a \leq c\tau D_{\mathcal{A}} a + 1$

2) $Bd_X \leq \tau Dim\, X + 1$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) По теореме 2.5 $\tau Dim\, b \leq \tau Dim\, a$. Поэтому, если $\tau Dim\, a = n$, то $H_\tau^{n+k}(a, \mathcal{A}) = H_\tau^{n+k}(b, \mathcal{A})$ для любого $\mathcal{A}$ и $k \geq 1$. Из точной последовательности пары (a, b) получаем $H_\tau^{n+k}(a, b, \mathcal{A}) = 0$ при $k \geq 2$. По теореме 3.1 это влечет $Bd_{\mathcal{A}} a \leq n+1 \leq c\tau D_{\mathcal{A}} a + 1$.

2) прямо следует из 1).

Список литературы

1. *Barr M.* $*$-Autonomous categories // Lecture Notes in Mathematics. Heidelberg: Springer, 1979. V. 752.

2. *Pratt V.R.* Chu spaces from the Representational Viewpoint. Preprint. 2005.

3. *Zang G.-Q.* Chu spaces, concept lattices, and domain // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 2004. V. 83.

4. *Gupta V., Pratt V.R.* Gates Accept Concurrent Behavior // Proc. 34^{th} Ann. IEEE Symp. on Foundations of Comp. Sci. 1993. P. 62–71.

5. *Pratt V.R.* Chu spaces, Notes for school on category theory and applications. Technical report, University of Coimbra, Portual, 1999.

6. *Сухонос А.Г.* Эквивалентность категорий chu_Σ и ps_Σ. Владивосток: Дальнаука, 2004. 20 с. (Препринт / ДВО РАН, Институт прикладной математики. № 19)

7. *Скурихин Е.Е.* Пучковые когомологии и размерность частично упорядоченных множеств // Тр. Мат. ин-та В.А. Стеклова РАН. 2002. Т 239. С. 289–317.

8. *Скурихин Е.Е.* Пучковые когомологии и размерность частично упорядоченных множеств. Владивосток: Дальнаука, 2004. 194 с.

9. *Artin M.* Grothendieck topologies. Harvard Math. Dept. Lecture Notes, 1962.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 ноября 2005 г.

Skurikhin E.E., Sukhonos A.G. Cohomologies and dimensions of Chu spaces. Far Eastern Mathematical Journal. 2005. V. 6. № 1–2. P. 14–22.

ABSTRACT

We define Grothendieck topologies on Chu spaces and consider sheaf cohomologies, dimensions and cohomological dimensions of Chu spaces.

Key words: *Chu spaces, Grothendieck topologies, sheaf cohomology, dimension.*