ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПА НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

М. Г. Крейн

Обозначим через E_n n-мерное пространство векторов $x=\{\xi_j\}_1^n$ с комплексными координатами ξ_j $(j=1, 2, \ldots, n)$.

Всякой матрице $A=\|a_{jk}\|_1^n$ соответствует некоторое линейное преобразование

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k \quad (j=1, 2, \ldots, n),$$

которое мы будем рассматривать, как отображение E_n в себя, и будем сокращённо записывать в виде:

$$y=Ax.$$

Пусть

$$J(x, y)=\sum_{j, k=1}^{n} g_{jk}\xi_k\bar{\eta}_j$$

— некоторая невырождающаяся «билинейная» эрмитова форма:

$$g_{jk}=\bar{g}_{kj} \quad (j, k=1, 2, \ldots, n), \quad \det(g_{jk})\neq 0.$$

Преобразование $y=Ax$ называется *J-унитарным* (*автомоторным*), если

$$J(Ax, Ax)=J(x, x) \quad (x\in E_n)$$

и *J-эрмитовым*, если

$$J(Ax, y)=J(x, Ay) \quad (x, y\in E_n).$$

Эту терминологию мы распространяем и на матрицу A.

J-унитарные и J-эрмитовы матрицы преобразуются друг в друга с помощью так называемого преобразования Кэли (см., например, [1,2]).

Если число α $(|\alpha|=1)$ не является характеристическим числом J-унитарной матрицы U, то матрица

$$H=\mu i(\alpha I+U)(\alpha I-U)^{-1} \quad (\mu>0)$$

будет J-эрмитовой.

Обратное преобразование имеет вид

$$U=\alpha(\mu iI-H)(\mu iI+H)^{-1};$$

оно имеет смысл, если $-\mu i$ не является характеристическим числом матрицы H, и преобразует всякую J-эрмитову матрицу в J-унитарную.

J-унитарные и J-эрмитовы матрицы, как ещё было выяснено Фробениусом [3] (см., например, [1, 2]), обладают рядом замечательных свойств, среди них отметим следующее:

I_U. *Если форма $J(x, x)$ имеет точно p положительных квадратов, то у J-унитарного преобразования $y = Ux$ имеется p-мерное инвариантное подпространство L, на котором форма $J(x, x)$ неотрицательна и в котором все собственные числа преобразования $y = Ux$ по модулю не меньше* 1.

В силу указанной ранее зависимости между двумя классами преобразований всякому предложению о структуре одного класса соответствует некоторое предложение о структуре другого.

В частности, предложению I_U соответствует некоторое предложение I_H, получаемое из I_U заменой в нём J-унитарного преобразования $y = Ux$ J-эрмитовым $y = Hx$ и слов «по модулю не меньше 1» словами «имеют неотрицательную мнимую часть».

Пусть теперь E означает гильбертово пространство, составленное из последовательностей комплексных чисел $x = \{\xi_j\}_1^\infty$ со сходящейся суммой квадратов модулей. Положим для любых $x, y \in E$

$$J_p(x, y) = \sum_1^p \xi_j \bar{\eta}_j - \sum_{p+1}^\infty \xi_j \bar{\eta}_j.$$

Соответствующим образом определив J_p-эрмитовы операторы H в E, Л. С. Понтрягин [4] обобщил предложение I_H на преобразования $y = Hx$ в бесконечномерном пространстве E. Это обобщение Л. С. Понтрягин получил в результате длинной цепи рассуждений, весьма непростых, в особенности в их аналитической части. После того как предложение I_H обобщено, перенос ряда других свойств J-эрмитовых операторов с конечномерного случая на бесконечномерный осуществляется сравнительно просто.

Построив преобразования типа Кэли-Неймана для J-операторов в E, аспирант Иохвидов И. С. весьма просто показал (см. [5]), что из обобщения Л. С. Понтрягина предложения I_H вытекает соответствующее обобщение предложения I_U (как и наоборот).

С другой стороны, автору этой заметки удалось найти (см. [6], § 5) для случая $p = 1$ операторно-топологическое доказательство обобщённого предложения I_U.

Возник вопрос: нельзя ли, привлекая топологические средства, достаточно просто установить это предложение для случая любого целого p?

Ответ оказывается положительным!

Более того, как мы покажем, применение брауэровского принципа неподвижной точки позволяет обнаружить, что свойство J-унитарных операторов, утверждаемое в I_U, присуще более широкому классу линейных преобразований, а именно всем преобразованиям $y = Ax$, для которых

$$J(Ax, Ax) \geqslant J(x, x)$$

при всяком x, для которого $J(x, x) \geqslant 0$.

Преобразования, обладающие этим свойством, мы будем называть *J-увеличивающими*.

После того как будет доказана наша теорема о J-увеличивающих преобразованиях в конечномерном пространстве, её обобщение на случай бесконечномерного пространства не представит никаких трудностей и будет протекать совершенно элементарно.

Это происходит благодаря тому, что в отличие от J-унитарных матриц [1]), которые при *усечении*, вообще говоря, перестают быть унитарными по отношению к соответствующей усечённой форме J_p, матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^\infty$, *увеличивающие* J_p, сохраняют это свойство, если их *усекать* до матрицы $A_n = \| a_{ik} \|_1^n$ любого порядка $n > p$.

Любопытно, что топологическая точка зрения позволила усмотреть наиболее общее предложение, имеющее простую алгебраическую формулировку и которое вместе с тем непрозрачно с алгебраических позиций.

Впрочем, это не первый случай такого рода!

§ 1. ТЕОРЕМА О J-УВЕЛИЧИВАЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КОНЕЧНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Сформулируем её аналогично предложению I_U.

Теорема. *Если эрмитова форма $J(x, x)$ имеет точно p положительных квадратов, то у преобразования $y = Ax$, обладающего свойством*

$$J(Ax, Ax) \geqslant J(x, x) \text{ при } J(x, x) \geqslant 0, \tag{1}$$

имеется инвариантное p-мерное подпространство L, на котором форма $J(x, x)$ неотрицательна и в котором все собственные числа преобразования $y = Ax$ по модулю не меньше 1.

Доказательство. Без ограничения общности можно принять, что форма $J(x, x)$ имеет вид:

$$J(x, x) = |\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_p|^2 - |\xi_{p+1}|^2 - \ldots - |\xi_n|^2. \tag{2}$$

В самом деле, в противном случае мы придали бы форме J вид (2), выбрав в качестве ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ координаты вектора x не в базисе $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$, а в некотором другом базисе, и соответственно этому выбору переписали бы в другом виде матрицу A нашего преобразования $x \to y$.

---

[1]) Приведём для ясности следующие определения.

Взаимнооднозначное отображение $x = Ux$ пространства E на самое себя называется *J_p-унитарным*, если для любых $x, y \in E$: $J_p(Ux, Uy) = J_p(x, y)$. Такое отображение всегда линейно (см. [5, 6]) и непрерывно.

Возможны ещё линейные непрерывные отображения $y = Ux$ всего E в свою правильную часть, такие, что

$$J_p(Ux, Uy) = J_p(x, y) \quad (x, y \in E).$$

Эти отображения называются *J_p-полуунитарными*.

Матрицам отображений этих двух классов присваиваются те же эпитеты (J_p-унитарная, J_p-полуунитарная), что и самим отображениям. Один и другой классы содержатся в классе J_p-увеличивающих преобразований.

Докажем сперва теорему в усиленном предположении, а именно, что

$$J(Ax,\ Ax) > J(x,\ x) \text{ при } J(x,\ x) \geqslant 0,\ x \neq 0. \tag{3}$$

Всякому n-мерному вектору $x = \{\xi_i\}_1^n$ будем относить p-мерный вектор x_+ и q-мерный вектор x_- $(q = n - p)$, полагая

$$x_+ = \{\xi_j\}_1^p,\quad x_- = \{\xi_j\}_{p+1}^n.$$

Разложение x на x_+ и x_- будем записывать в виде:

$$x = x_+ \oplus x_-.$$

Введём в рассмотрение упорядоченные комплексы $X = (\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots, \overset{p}{x})$ по p n-мерных векторов. Если каждый вектор представлять себе как матрицу, состоящую из одного столбца, то X можно будет представить себе, как прямоугольную матрицу, имеющую p столбцов и n строк.

С матрицей $X = (\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots, \overset{p}{x})$ будем ассоциировать квадратную матрицу p-го порядка

$$X_+ = (\overset{1}{x}_+, \overset{2}{x}_+, \ldots, \overset{p}{x}_+)$$

и прямоугольную матрицу с p столбцами и q строками

$$X_- = (\overset{1}{x}_-, \overset{2}{x}_-, \ldots, \overset{p}{x}_-).$$

Тогда, если

$$Y = (\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \ldots, \overset{p}{y}),\ \text{где}\ \overset{k}{y} = A\overset{k}{x}\ \ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

то согласно правилам перемножения прямоугольных матриц

$$Y = AX.$$

Согласно тем же правилам [1])

$$J(\overset{i}{x},\ \overset{k}{x}) = \overset{k}{x}{}_+^* \overset{i}{x}_+ - \overset{k}{x}{}_-^* \overset{i}{x}_-\quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

и для любого $a = \{\alpha_i\}_1^p$:

$$J(\alpha_1 \overset{1}{x} + \ldots + \alpha_p \overset{p}{x},\ \alpha_1 \overset{1}{x} + \ldots + \alpha_p \overset{p}{x}) = a^*(X_+^* X_+ - X_-^* X_-)\, a. \tag{4}$$

Поэтому неравенство (1) означает, что

$$Y_+^* Y_+ - Y_-^* Y_- \geqslant X_+^* X_+ - X_-^* X_-, \tag{5}$$

всякий раз, когда

$$X_+^* X_+ - X_-^* X_- \geqslant 0.$$

Поясним, что для двух эрмитовых матриц H_1 и H_2 p-го порядка мы пишем $H_1 \geqslant H_2$, если для любого $a = \{\alpha_i\}_1^p$:

$$a^* H_1 a \geqslant a^* H_2 a.$$

Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество матриц X таких, что

$$X_+ = I_p,\ X_- = Z,$$

где

$$I_p - Z^* Z \geqslant 0, \tag{6}$$

причём I_p есть единичная матрица p-го порядка.

---

[1]) Если Z — некоторая прямоугольная матрица, то через Z^* обозначается матрица, получаемая из Z путём транспонирования и замены всех её элементов на комплексно сопряжённые.

Матрица Z имеет q строчек и p столбцов и она порождает линейное преобразование

$$b = Za$$

p-мерного векторного пространства E_p в q-мерное E_q.

Неравенство (6), как легко видеть, означает, что

$$(Za,\ Za) \leqslant (a,\ a), \tag{7}$$

т. е., что норма вектора $b = Za$ не больше нормы вектора [1]).

Отсюда явствует, что матрицы Z, удовлетворяющие условию (6), образуют замкнутое выпуклое и притом ограниченное тело (с внутренней точкой 0) в pq-мерном пространстве E_{pq}. Ограниченность этого тела следует хотя бы из того, что неравенство (7) для $Z = \|\zeta_{ik}\|$ при подстановке вместо a векторов $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ даёт

$$\sum_{i=1}^{q} |\zeta_{ik}|^2 \leqslant 1 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Таким образом, $\mathfrak{K}$ есть ограниченное выпуклое замкнутое тело в E_{pq}.

Покажем теперь, что всякая матрица $X \in \mathfrak{K}$ переходит в матрицу $Y = AX$ с неособенной матрицей Y_+.

В самом деле, для $X \in \mathfrak{K}$, $Y = AX$ согласно (5):

$$Y_+^* Y_+ - Y_-^* Y_- \geqslant I - Z^* Z \geqslant 0. \tag{8}$$

Если теперь допустить, что для некоторого $X \in \mathfrak{K}$ и $a = \{\alpha_j\}_1^p \neq 0$ имеет место $Y_+ a = 0$, то тогда

$$a^* (Y_+^* Y_+ - Y_-^* Y_-)\, a = -(Y_- a,\ Y_- a) \leqslant 0. \tag{9}$$

С другой стороны, полагая

$$x_0 = Xa = a \oplus Za,$$

будем иметь $x_0 \neq 0$ и

$$J(x_0,\ x_0) = (a,\ a) - (Za,\ Za) \geqslant 0,$$

а следовательно, для

$$Ax_0 = AXa = Ya = Y_+ a \oplus Y_- a$$

согласно (3):

$$a^* (Y_+^* Y_+ - Y_-^* Y_-)\, a = J(Ax_0,\ Ax_0) > 0.$$

Мы пришли к противоречию с (9).

Итак,

$$\det(Y_+) \neq 0, \text{ если } Y = AX,\ X \in \mathfrak{K}.$$

Построим тогда по A непрерывное отображение $X \to F(X)$ тела $\mathfrak{K}$ в себя, полагая

$$F(X) = YY_+^{-1} \quad (Y = AX).$$

---

[1]) Если $x = \{\xi_j\}_1^m$, $y = \{\eta_j\}_1^m$ — векторы из E_m $(m = 1, 2, \ldots)$, то (x, y) обозначает скалярное произведение $\sum_1^m \xi_j \bar{\eta}_j$. Нормой вектора x служит величина $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

По теореме Брауэра это отображение имеет неподвижную точку X_0: $F(X_0)=X_0$. Это означает, что

$$AX_0\cdot\Lambda^{-1}=X_0,\ \text{где}\ \Lambda=(AX_0)_+,$$

или

$$AX_0=X_0\Lambda. \tag{10}$$

Пусть

$$X_0=(\overset{1}{x_0},\overset{2}{x_0},\ldots,\overset{p}{x_0}),\ \Lambda=\|\lambda_{jk}\|_1^p.$$

Соотношение (10) можно тогда переписать ещё так:

$$A\overset{k}{x_0}=\sum_{s=1}^{p}\lambda_{sk}\overset{s}{x_0}\quad(k=1,2,\ldots,p).$$

Таким образом, линейная оболочка L векторов $\overset{k}{x_0}$ $(k=1,\ 2,\ldots,p)$ инвариантна по отношению к преобразованию A.

Размерность L равна p, ибо векторы $\overset{k}{x_0}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$, будучи столбцами матрицы X_0, имеющей вид

$$X=\left\|\begin{matrix}I_p\\Z\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&\ldots&1*&*&\ldots&*\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot*&*&\ldots&*\end{matrix}\right\|,$$

линейно независимы.

Легко также видеть, что

$$J(x,x)\geqslant 0\quad\text{при}\quad x\in L.$$

Действительно, согласно (4):

$$J(\alpha_1\overset{1}{x_0}+\ldots+\alpha_p\overset{p}{x_0},\ \alpha_1\overset{1}{x_0}+\ldots+\alpha_p\overset{p}{x_0})=a^*(I-Z_0^*Z_0)\,a\geqslant 0$$

Пусть теперь $u\in L$ есть собственный вектор преобразования A:

$$Au=\lambda u.$$

Так как $J(u,u)\geqslant 0$, то в (3) можно положить $x=u$, тогда найдём:

$$|\lambda|^2J(u,u)>J(u,u)\geqslant 0,$$

откуда

$$|\lambda|>1.$$

Итак, в предположении (3) теорема доказана.

Покажем теперь, как её получить в более слабом предположении (1). Определим для $\varepsilon>0$ преобразование S_ε, полагая

$$S_\varepsilon x=\sqrt{1+\varepsilon}\,x_+\oplus x_-.$$

Таким образом,

$$J(S_\varepsilon x,S_\varepsilon x)=(1+\varepsilon)(x_+,x_+)-(x_-,x_-)\geqslant J(x,x)\quad(x\in E_n), \tag{11}$$

причем знак равенства исключается, если $J(x,x)\geqslant 0$, $x\neq 0$. Поэтому, если положить

$$A_\varepsilon=S_\varepsilon A,$$

то согласно (11) будем иметь:

$$J(A_\varepsilon x,\ A_\varepsilon x) \geqslant J(Ax, Ax) \geqslant J(x, x), \tag{12}$$

при этом при $J(x, x) \geqslant 0$, $x \neq 0$ знак равенства в первом из соотношений (12) исключается.

Таким образом, преобразование $y = A_\varepsilon x$ $(\varepsilon > 0)$ удовлетворяет уже условию (3) и к нему применимо всё доказанное выше.

Следовательно, у A_ε существует инвариантное подпространство L_ε, обладающее следующими свойствами:

1) $J(x, x) \geqslant 0$ при $x \in L_\varepsilon$; (13)

2) в L_ε существует базис $\overset{1}{x}_\varepsilon, \overset{2}{x}_\varepsilon, \ldots, \overset{p}{x}_\varepsilon$:

$$\overset{k}{x}_\varepsilon = \{\overset{k}{\xi}_j(\varepsilon)\}_{j=1}^{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{14}$$

такой, что

$$\overset{k}{\xi}_j = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, p);$$

3) все характеристические числа A_ε в L_ε по модулю больше 1.

Так как при $\varepsilon \to 0$ матрица $S_\varepsilon \to I_n$, то

$$A_\varepsilon \to A \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

С другой стороны, в силу (13) и (14) у любого вектора $\overset{k}{x}_\varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ все координаты по модулю $\leqslant 1$.

Таким образом, можно выбрать последовательность $\varepsilon_n \to 0$ $(\varepsilon_n > 0)$ так, чтобы существовали пределы

$$\overset{k}{x}_0 = \lim_{\varepsilon_n \to 0} \overset{k}{x}_{\varepsilon_n} \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Очевидно, что пространство L с базисом $(\overset{1}{x}_0, \overset{2}{x}_0, \ldots, \overset{p}{x}_0)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы по отношению к $A = \lim A_\varepsilon$.

Теорема доказана.

§ 2. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НА СЛУЧАЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Пусть теперь E обозначает гильбертово пространство, векторами которого являются бесконечные последовательности $x = \{\xi_k\}_1^\infty$ со сходящейся суммой квадратов модулей с обычным определением скалярного произведения:

$$(x, y) = \sum_1^\infty \xi_k \bar{\eta}_k.$$

Положим

$$J_p(x, y) = \sum_1^p \xi_k \bar{\eta}_k - \sum_{p+1}^\infty \xi_k \bar{\eta}_k \qquad (x, y \in E).$$

Пусть A — ограниченный линейный оператор в E.

Оператор A будет J_p-увеличивающим, если

$$J_p(Ax, Ax) \geqslant J_p(x, x) \text{ при } J_p(x, x) \geqslant 0 \quad (x \in E). \tag{1}$$

Покажем, что основная теорема сохраняет силу и для J_p-увеличивающих операторов A в E.

В координатах преобразование $y = Ax$ запишется в виде:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Условие (1), таким образом, будет означать:

$$\sum_{1}^{p} \eta_k{}^2 - \sum_{p+1}^{\infty} |\eta_k|^2 \geqslant \sum_{1}^{p} |\xi_k|^2 - \sum_{p+1}^{\infty} |\xi_k|^2,$$

коль скоро

$$\sum_{1}^{p} |\xi_k|^2 - \sum_{p+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \geqslant 0. \tag{3}$$

Применяя это неравенство к вектору x вида $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$, найдём, что

$$\sum_{1}^{p} |\eta_k|^2 - \sum_{p+1}^{n} |\eta_k|^2 \geqslant \sum_{1}^{p} |\eta_k|^2 - \sum_{p+1}^{\infty} |\eta_k|^2 \geqslant \sum_{1}^{p} |\xi_k|^2 - \sum_{p+1}^{n} |\xi_k|^2,$$

коль скоро

$$\sum_{1}^{p} |\xi_k|^2 - \sum_{p+1}^{n} |\xi_k|^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, если преобразование (2) является J_p-увеличивающим, то при любом $n > p$ преобразование в E_n:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

будет $J_p^{(n)}$-увеличивающим [1]), где

$$J_p^{(n)}(x, x) = \sum_{1}^{p} |\xi_k{}^2 - \sum_{p+1}^{n} |\xi_k|^2.$$

Пусть

$$\overset{k}{x}_n = (\overset{k}{\xi}_1(n), \overset{k}{\xi}_2(n), \ldots, \overset{k}{\xi}_n(n)) \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

базис инвариантного p-мерного подпространства L_n, обладающего известными свойствами по отношению к преобразованию (3). Как мы знаем, базис $(\overset{1}{x}_n, \overset{2}{x}_n, \ldots, \overset{p}{x}_n)$ может быть выбран так, что

$$\overset{k}{\xi}_j(n) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, p). \tag{5}$$

Так как $J_p^{(n)}(x, x) \geqslant 0$ при $x \in L_n$, то при указанном выборе базиса

$$\sum_{j=p+1}^{n} |\overset{k}{\xi}_j(n)|^2 \leqslant 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{6}$$

---

[1]) Легко видеть, что, и обратно, при выполнении этих условий при любом $n > p$ преобразование (2) будет J_p-увеличивающим.

Инвариантность L_n по отношению к преобразованию (4) будет означать существование такой матрицы

$$\Lambda_n = \| \lambda_{jk}(n) \| \quad (j, k = 1, 2, \ldots, p),$$

что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overset{k}{\xi}_j(n) = \sum_{s=1}^{p} \overset{s}{\xi}_i(n) \lambda_{sk}(n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, p). \tag{7}$$

В силу (5) и (6) найдётся последовательность натуральных чисел n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, таких, что будут существовать все пределы

$$\overset{k}{\xi}_j = \lim_{\nu \to \infty} \overset{k}{\xi}_j(n_\nu) \quad (k = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, 3, \ldots),$$

при этом

$$\overset{k}{\xi}_j = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, p)$$

и

$$\sum_{j=p+1}^{\infty} |\overset{k}{\xi}_j|^2 \leqslant 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Таким образом:

$$\overset{k}{x} = (\overset{k}{\xi}_1, \overset{k}{\xi}_2, \ldots) \in E \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Но если оператор A ограничен, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

поэтому, как легко видеть, можно утверждать, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{j=1}^{n_\nu} a_{ij} \overset{k}{\xi}_j(n_\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \overset{k}{\xi}_j \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

С другой стороны, первые p равенств (7) в силу (5) дают:

$$\lambda_{ik}(n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overset{k}{\xi}_j(n) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, существуют пределы

$$\lambda_{ik} = \lim_{\nu \to \infty} \lambda_{ik}(n_\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \overset{k}{\xi}_j \quad (i, k = 1, 2, \ldots, p).$$

Полагая в (7): $n = n_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ и переходя к пределу при $\nu \to \infty$ и произвольно фиксированных i, k $(i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, p)$, найдём, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \overset{k}{\xi}_j = \sum_{s=1}^{p} \overset{s}{\xi}_i(n) \lambda_{sk} \quad (i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, p),$$

или, что одно и то же:

$$A\overset{k}{x} = \sum_{s=1}^{p} \lambda_{sk} \overset{s}{x} \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Таким образом векторы $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots, \overset{p}{x}$ образуют базис некоторого p-мерного инвариантного по отношению к A подпространства $L \subset E$.

Собственными числами оператора A в L будут характеристические числа матрицы

$$\Lambda = \| \lambda_{jk} \|_1^p .$$

А так как

$$\Lambda = \lim_{\nu \to \infty} \Lambda_{n_\nu}$$

и все характеристические числа матриц Λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ по модулю не меньше 1, то и матрица Λ будет обладать этим свойством.

Чтобы закончить доказательство обобщённой теоремы, остаётся заметить, что из неравенства

$$J_p^{(n)} (\alpha_1 \overset{1}{x}(n) + \ldots + \alpha_p \overset{p}{x}(n),\ \alpha_1 \overset{1}{x}(n) + \ldots + \alpha_p \overset{p}{x}(n)) \geqslant 0,$$

предельным переходом по $n = n_\nu$ $(\nu \to \infty)$ получается неравенство

$$J_p (\alpha_1 \overset{1}{x} + \ldots + \alpha_p \overset{p}{x},\ \alpha_1 \overset{1}{x} + \ldots + \alpha_p \overset{p}{x}) \geqslant 0,$$

которое и означает, что

$$J_p (x, x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in L.$$

Замечание 1. При анализе предыдущих рассуждений на первый взгляд может показаться, что мы доказали больше, нежели утверждали.

В самом деле, мы как будто бы нигде не использовали того, что преобразование (2) ограничено, а использовали лишь условия (8). Определение J_p-увеличивающего преобразования можно так расширить, чтобы оно было приложимо к формальному преобразованию (2) с любой бесконечной матрицей $\| a_{ik} \|_1^\infty$, а именно, можно условиться называть такое преобразование J_p-увеличивающим, если при любом $n > p$ укороченные преобразования (4) $J_p^{(n)}$-увеличивающие.

Однако несложный анализ обнаруживает, что при таком определении J_p-увеличивающих преобразований они в силу самого определения окажутся ограниченными преобразованиями, так что никакого расширения рассматриваемого класса преобразований на этом пути получить нельзя.

Замечание 2. Нашу теорему для бесконечномерных пространств мы получили путём предельного перехода от конечномерного случая к бесконечномерному. Можно было бы доказать теорему для бесконечномерного пространства, так же как для конечномерного, если заметить, что единичная сфера в E компактна в слабой топологии, и воспользоваться вместо принципа Брауэра принципом Шаудера. Мы избрали другой путь ввиду его большей элементарности.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. А. Широков, Тензорное исчисление, ч. I, ОНТИ, М.—Л., 1934.
[2] Мальцев, Основы линейной алгебры, Гостехиздат, М.—Л., 1948, стр. 405—417.
[3] G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journ. f. Math. **84** (1878).
[4] Л. С. Понтрягин, Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Изв. АН СССР, сер. матем. **VIII**, № **6** (1944), 243—280.
[5] И. С. Иохвидов, Унитарные операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Зап. Харьк. матем. о-ва, **XXI**, сер. 4, (1949), 79—86.
[6] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, т. **III**, вып. **1** (23) (1948), 3—95.