Б. М. Миллер, Об устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений с мерой, *УМН*, 1978, том 33, выпуск 2, 198

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОЙ

Б. М. Миллер

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с мерой:

$$dx(t) = f(x(t))\,dt + \xi(x(t))\,da^c(t) + \sum_{\tau_i \leqslant t} \psi(x(\tau_i -), \Delta a(\tau_i))\,\delta(t-\tau_i)\,dt. \tag{1}$$

Здесь $x \in R^N$, $a(\cdot) \in BV_m^+[0, T]$, $a^c(t)$ — непрерывная компонента в разложении функции $a(t)$, $\delta(t-\tau)$ — скалярная δ-функция, сосредоточенная в точке τ. Если функция f, ξ липшицевы по x, а функция $\psi(x, u)$ удовлетворяет условиям

$$\|\psi(x, u) - \psi(y, u)\| \leqslant K\|u\|\,\|x-y\|, \tag{2}$$

$$\|\psi(x, u)\| \leqslant K\|u\|(\|x\|+1) \tag{3}$$

при любых $x, y \in R^N$ и $u \in R^m$, то решение уравнения (1) существует и единственно для любого начального условия $x(0-) = x_0 \in R^N$ и произвольной функции $a(\cdot) \in BV_m^+[0, T]$ [1].

Определение 1. Последовательность функций $a^n(\cdot) \in BV_m^+[0, T]$ будем называть сходящейся к функции $a(\cdot)$ того же пространства, если: $a^n(t)$ сходится к $a(t)$ в слабой [1]) топологии пространства

$$BV_m^+[0, T], \quad \sup_n \operatorname*{var}_{[0,T]} a^n(t) < \infty, \quad a^n(0-) = a(0-).$$

Аналогично определим сходимость в пространстве функций $BV_N^+[0, T]$, которому принадлежат решения уравнения (1).

Определение 2. Решение уравнения (1) будем называть устойчивым по отношению к малым вариациям $a(t)$, если из сходимости $a^n(t)$ к $a(t)$ следует сходимость $x^n(t)$ к $x(t)$.

Такого рода устойчивость аналогична понятию виброустойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений [2].

Теорема 1. *Для того чтобы решение уравнения* (1) *было устойчиво по отношению к малым вариациям* $a(t)$, *необходимо, чтобы функция* $\psi(x, u)$ *для любых* $x \in R^N$ *и* $u_1, u_2 \in R^m$ *удовлетворяла условию*

$$\psi(x, u_1+u_2) = \psi(x, u_1) + \psi(x+\psi(x, u_1), u_2). \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $\psi(x, u)$ *удовлетворяет условию* (4) *и дифференцируема по* u *при* $u = 0$. *Тогда для устойчивости решения уравнения* (1) *необходимо, чтобы*

$$\xi(x) = \left.\frac{\partial\psi(x, u)}{\partial u}\right|_{u=0}. \tag{5}$$

Можно показать, что условия (4), (5) являются также близкими к достаточным для устойчивости решений уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть функции* ψ *и* ξ *удовлетворяют* (4), (5), *функция* $\xi(x)$ *дифференцируема и ее производная локально липшицева по* x; *тогда решение уравнения* (1) *устойчиво по отношению к малым вариациям* $a(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. 3, М., «Наука», 1976.

[2] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, Труды ММО **27** (1972), 94—112.

Поступило в Правление общества 22 апреля 1977 г.

[1]) $BV_m^+[0, T]$ — пространство функций ограниченной вариации, непрерывных справа со значениями в R^m.