А. Ю. Жиров, О минимуме дилатации псевдоаносовских диффеоморфизмов кренделя, *УМН*, 1995, том 50, выпуск 1, 197–198

О МИНИМУМЕ ДИЛАТАЦИИ ПСЕВДОАНОСОВСКИХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КРЕНДЕЛЯ

А. Ю. Жиров

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f замкнутой ориентируемой поверхности M^g рода $g \geqslant 2$ называется *псевдоаносовским диффеоморфизмом* (pA-*диффеоморфизмом*), если на M^g существует пара инвариантных относительно f трансверсальных друг другу транзитивных измеренных слоений с общими особенностями и константа $\lambda > 1$ такие, что f с коэффициентом λ сжимает слои одного и растягивает слои другого (в смысле соответствующих трансверсальных мер, см. [1]). В окрестностях особых точек слоения предполагаются топологически эквивалентными семейству горизонтальных траекторий квадратичного дифференциала $z^n\,dz$, где $n \geqslant 1$, т.е. из особой точки выходит $d = n + 2 \geqslant 3$ особых слоев. Гомеоморфизм f предполагается гладким всюду за исключением особых точек слоений, чем и оправдывается общепринятое употребление по отношению к нему термина “диффеоморфизм”. Число λ называется *дилатацией* pA-диффеоморфизма, оно есть топологический инвариант, причем $\log\lambda$ есть топологическая энтропия f.

Известно, что множество значений дилатации всех pA-диффеоморфизмов поверхности фиксированного рода дискретно (см. [2]). Тем самым для каждого $g \geqslant 2$ корректно определено число λ_g, равное минимальному значению дилатации pA-диффеоморфизмов поверхности рода g, и возникает естественный вопрос о его определении. В [3] для $g \geqslant 3$ дана оценка $\lambda_g \leqslant 6^{1/g}$. В настоящей работе рассматривается случай $g = 2$.

Теорема. *Минимальное значение дилатации* pA-*диффеоморфизмов кренделя, для которых инвариантные слоения ориентируемы, равно максимальному корню* $\lambda \approx 1.722083$ *полинома* $\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$.

Доказательство. Известно, что если инвариантные слоения pA-диффеоморфизма поверхности рода g ориентируемы, то его дилатация λ есть максимальный корень возвратного полинома степени $2g$ с целыми коэффициентами и со свободным членом 1 (см. [2], [4]). Непосредственно легко проверить, что полином $\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$ обладает наименьшим максимальным корнем среди всех полиномов степени 4, обладающих указанными выше свойствами и имеющих вещественный корень, больший 1. Поэтому для доказательства достаточно привести пример pA-диффеоморфизма кренделя с ориентируемыми инвариантными слоениями и дилатацией, равной указанному числу.

Рассмотрим следующее нестандартное копредставление фундаментальной группы кренделя:

$$\pi(M^2) = \langle a, b, c, d \mid ac^{-1}db^{-1}cd^{-1}a^{-1}b = 1\rangle.$$

Рассмотрим ее автоморфизм φ, задаваемый формулами:

$$\varphi\colon\ a \to c^{-1}a^{-1},\quad c \to d^{-1}a^{-1},\quad b \to c^{-1},\quad d \to b^{-1}.$$

По теореме Нильсена–Дена (см. [5]) этот автоморфизм задает некоторый гомотопический класс гомеоморфизмов кренделя. То, что это псевдоаносовский класс, легко проверяется с помощью леммы 5.1 [6]. Кроме того, pA-диффеоморфизм из этого класса можно непосредственно построить, модифицируя конструкцию из [7]. Там гомеоморфмзм f строился по набору данных

$$\langle \varepsilon, \sigma, t; \boldsymbol{k}, k_L\rangle,$$

называемому кодом, исходя из отрезка устойчивого слоя некоторой неподвижной точки такой, что f сохраняет ориентацию ее устойчивого слоя. Определение параметров, составляющих

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00851) и ISF (грант M1E000).

код, дано в [7], здесь отметим только, что $\varepsilon = +1$ или -1 в зависимости от того, сохраняет f ориентацию поверхности или нет.

Требуемый гомеоморфизм не обладает неподвижной точкой с указанным свойством. Однако конструкцию [7] нетрудно распространить на случай, когда имеется неподвижная точка и отрезок ее устойчивого слоя, который под действием f переходит в себя. При этом код приобретает форму $\langle \varepsilon^s, \varepsilon^u; \sigma, t; \boldsymbol{k}, k_L\rangle$, где параметры σ, t, $\boldsymbol{k}$, k_L имеют тот же смысл, что и в [7], а параметры ε^s и ε^u имеют значения $+1$ или -1 в зависимости от сохранения ориентаций устойчивого и неустойчивого слоев, проходящих через указанную точку.

Рассмотрим модифицированный таким способом формальный код $\langle -1, -1; \sigma, 4, \boldsymbol{k}, 0\rangle$, где $\sigma = (1,8)(2,5)(3,7)(4,6)$ и $\boldsymbol{k} = (2,1,2,1)$. Исходя из него, действуя аналогично доказательству теоремы 5.14 [7] (см. также рис. 10 из этой работы), получим pA-диффеоморфизм кренделя с ориентируемыми инвариантными слоениями и дилатацией, равной указанному выше числу (см. [7], следствие 5.15). Последнее вытекает из того, что в случае pA-диффеоморфизма с ориентируемыми инвариантными слоениями дилатация равна максимальной абсолютной величине собственных чисел матрицы, задающей индуцированный автоморфизм f_* группы целочисленных гомологий поверхности [2], [4]. В рассматриваемом примере эта матрица, как легко видеть, есть

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ее характеристический полином есть $t^4 + t^3 - t^2 + t + 1$, и его максимальный по абсолютной величине корень есть $-\lambda$, где λ – максимальный корень полинома, указанного в формулировке теоремы, что завершает ее доказательство.

Вопрос. *Существуют ли* pA-*диффеоморфизм кренделя с неориентируемыми слоениями, имеющий дилатацию, меньшую указанного значения?*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Fathi A., Laudenbabach F., Poenaru V. // Asterisque. 1979. V. 66–67. [**2**] Arnoux P., Yoccoz J. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1981. V. 292. Ser. 1. P. 75–78. [**3**] Bauer M. // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 330. №1. P. 361–370. [**4**] Arnoux P., Fathi A. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1991. V. 312. Ser. 1. P. 241–244. [**5**] Цишанг Р., Фогт Э., Колдевай Х. Д. Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988. [**6**] Casson A., Bleiler S. Automorphisms of surfases after Nielsen and Thurston: Cambridge Univ. Press, 1988. [**7**] Жиров А. Ю. // Матем. сб. 1984. Т. 185. №9. С. 29–80.

Военно-Воздушная академия
им. Ю. А. Гагарина

Принято редколлегией
04.01.1995