**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 218, № 1
январь, 2024**

В. П. Бурский[*]

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматриваются методы изучения граничных задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области независимо от типа уравнения. Предлагается несколько методов изучения граничных задач, которые, как правило, основываются на формуле Грина. Этим методам были посвящены ранее вышедшие публикации автора, а в настоящей статье эти результаты представлены в собранном виде и в краткой форме.

Ключевые слова: общие дифференциальные уравнения с частными производными, граничные задачи, методы исследования.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10524

1. Исследования корректности граничных задач восходят к Адамару, заметившему, что зависимость решения задачи Коши для уравнения Лапласа в полуплоскости от начальных данных не является непрерывной. Этот пример привел его к общепринятому сегодня определению корректности линейной граничной задачи

$$Lu = f, \qquad Bu\big|_{\partial\Omega} = g \tag{1}$$

с линейными операторами L и B, которое выражается в виде оценки решения u

$$\|u\|_{\mathcal{S}} \leqslant \|f\|_{\mathcal{R}} + \|g\|_{\mathcal{B}}, \tag{2}$$

где $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ и $\mathcal{B}$ – банаховы пространства решений, правых частей уравнения и граничных данных соответственно. В частности, неединственность решения граничной задачи (1), т. е. существование нетривиального решения $u \in \mathcal{S}$ однородной задачи (1) с $f = 0$, $g = 0$, означает отсутствие оценки (2) и потому некорректность такой граничной задачи.

Во многих случаях не удается доказать корректность, но удается получить свойство фредгольмовости граничной задачи (1), что означает конечномерность ядра

[*]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: bvp30@mail.ru

и конечномерность коядра оператора граничной задачи $L_B\colon \mathcal{S}_B \to R$, где $\mathcal{S}_B$ – подпространство таких функций из $\mathcal{S}$, для которых $Bu|_{\partial\Omega} = 0$, а оператор $L_B = L|_{\mathcal{S}_B}$. Хорошо известно, что критерием фредгольмовости линейной дифференциальной граничной задачи для правильно (в другой терминологии – собственно) эллиптического уравнения в ограниченной области является условие Лопатинского (условие накрывания) [1], [2], мы же здесь рассматриваем случай общего оператора.

После работ фон Неймана по самосопряженным расширениям обыкновенных дифференциальных операторов, работ Крейна и Калкина в работе Вишика [3] возникла и была развита основа общей теории граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Эта теория развивалась как в общем направлении (см., например, работы Аграновича [4], Дезина [5], автора [6], [7], Воловича и Сакбаева [8]), так и в направлении конкретных типов уравнений (см., например, [9], [10]) либо фиксированной области [11].

В настоящее время работы в области исследования граничных задач проводятся, за редким исключением, внутри типов дифференциальных уравнений – эллиптического, параболического и гиперболического. Это вызвано, с одной стороны, тем, что все возрастающая необходимость использовать математические модели буквально во всех областях знания ведет в использованию именно граничных задач, которые возникают на практике как граничные задачи для уравнений или систем уравнений именно этих трех типов, причем лишь некоторых видов граничных задач. С другой стороны, попытки развить общую теорию граничных задач показали как огромное многообразие реализуемых возможностей, так и сложность любого продвижения теории. К тому же перенос методов исследования граничных задач с одного типа уравнения на другой неизменно приводит либо к сложным теоретическим построениям, либо к задачам, не имеющим практического значения. Тем самым методы исследования граничных задач для общих уравнений практически отсутствуют. Настоящая работа содержит краткое изложение результатов автора в направлении получения инструментов для изучения граничных задач независимо от типа уравнения либо граничных задач более общего вида, нежели стандартные для данного типа уравнения.

2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с C^∞-гладкой границей $\partial\Omega$, $m \in \mathbb{N}$, $L = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha$ – скалярная дифференциальная операция с постоянными комплексными коэффициентами, порождающая оператор $L\colon H^m(\Omega) \to H$, $H = L_2(\Omega)$, где $H^m(\Omega)$ – соболевское пространство, $D^\alpha = (-i\partial)^{|\alpha|}/(\partial x_1)^{\alpha_1}\dots(\partial x_n)^{\alpha_n}$ – "самосопряженная производная", $L^+v = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \overline{a_\alpha} D^\alpha v$ – формально сопряженная операция. Пусть $u \in H^m(\Omega)$ – решение уравнения

$$Lu = 0. \tag{3}$$

Функция u имеет следы

$$u\big|_{\partial\Omega} = \psi_0, \qquad u'_\nu\big|_{\partial\Omega} = \psi_1, \qquad \dots, \qquad u^{(m-1)}_{\nu^{m-1}}\big|_{\partial\Omega} = \psi_{m-1}, \tag{4}$$

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}) \in H^{(m)}(\partial\Omega) = H^{m-1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{1/2}(\partial\Omega),$$

где ν – внешняя нормаль к границе. Задача (3), (4) переопределена. Так, если оператор L – правильно эллиптический оператор четного порядка, то с точностью до конечномерных эффектов задание первой половины набора функций ψ, как известно, определяет остальные через решение задачи Дирихле. Имеет место следующий вопрос: как связаны между собой следы ψ решения u?

Пусть функция $u \in H^m(\Omega)$ – решение задачи (3), (4), $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$ – любое продолжение функции $u(x)$, и пусть $\theta_\Omega(x)$ – характеристическая функция множества

$$\Omega\colon\ \theta_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Применим оператор L к произведению $\theta_\Omega v$. Пользуясь правилом Лейбница, получаем

$$L(\theta_\Omega v) = \theta_\Omega L v + \sum_{k=0}^{m-1} b_k (\delta_{\partial\Omega})^{(k)}_{\nu^k}, \tag{5}$$

где $\delta_{\partial\Omega}$ – мера, сосредоточенная на $\partial\Omega$, т. е. $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \delta_{\partial\Omega}, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \overline{\varphi}\, ds,$$

а b_k – линейные дифференциальные выражения по касательным направлениям τ от следов ψ с коэффициентами, порожденными направляющими косинусами нормали. Заметим, что $(\theta_\Omega)'_\nu = -\delta_{\partial\Omega}$, $(\theta_\Omega)'_\tau = 0$. Член $\theta_\Omega L v$ равен нулю в силу (3), а к оставшемуся равенству (5) применим преобразование Фурье. Получим

$$l(\xi)\mathcal{F}(\theta_\Omega v)(\xi) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} L_{(m-k-1)} u \langle -i\nu(s), \xi \rangle^k e^{-ix\cdot\xi}\, ds_x, \tag{6}$$

где $l(\xi)$ – символ оператора L, а функции $L_{(k)}u$, $\deg L_{(k)} = k$ – линейные дифференциальные выражения по касательным направлениям от следов ψ функции u с переменными коэффициентами, которые получаются при перебрасывании производных:

$$\int_\Omega (L u \overline{v} - u \overline{L^+ v}\,)\, dx = \sum_{k=0}^{m} \int_{\partial\Omega} L_{(k)} u \overline{\partial_\nu v}\, ds.$$

Обозначим правую часть в (6) через $G_\psi(\xi)$. Подчеркнем, что функция $G_\psi(\xi)$ зависит только от следов ψ решения u и не зависит от поведения u внутри Ω. Согласно теореме Пэли–Винера–Шварца функции $\mathcal{F}(\theta_\Omega v) = \widehat{\theta_\Omega v}$ и G_ψ – целые функции определенного роста на бесконечности. Обозначим через Z_1 алгебру целых функций на $\mathbb{C}^n$ первого порядка и конечного типа. Равенство (6) означает, что

$$G_\psi \in (l) \quad \text{в} \quad Z_1, \tag{7}$$

$$G_\psi / l \in \{\widehat{\theta_\Omega v} \mid v \in H^m(\mathbb{R}^n)\}, \tag{8}$$

где (l) – главный идеал, порожденный элементом l. Можно показать, что условия (7), (8) являются также достаточными. То есть для каждого набора следов $\psi \in H^{(m)}(\partial\Omega)$, удовлетворяющего условиям (7), (8), существует единственное решение $u \in H^m(\Omega)$ задачи (3), (4). Доказательство достаточности проводится обратными рассуждениями. Таким образом, имеет место

Предложение 1. *Для однозначной разрешимости задачи* (3), (4) *в пространстве* $H^m(\Omega)$ *необходимо и достаточно выполнение условий* (7), (8).

Сразу заметим, что если символ l разложим в произведение различных неприводимых полиномов, то условие (7) можно записать в эквивалентном виде:

$$G_\psi(\xi) = 0 \qquad \forall \xi \in \Lambda, \tag{9}$$

где Λ – алгебраическое многообразие нулей символа l. Условие (8) выглядит трудно проверяемым, но можно доказать, что для некоторых операторов и областей оно может быть сведено к условию (7) только некоторым повышением гладкости следов ψ (см. [12], [13], [7]).

3. Покажем, что получается для оператора второго порядка

$$L = a\,\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b\,\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2} + c\,\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}, \tag{10}$$

в плоской области. Здесь

$$G_\psi = \int_{\partial\Omega} [(-i)(x,\xi)L_{(0)}(\tau) + L_{(1)}(\tau)]e^{-i(x,\xi)}\,d\tau_x,$$
$$L_{(0)}(\tau) = -l(x(\tau))\psi_0(\tau),$$
$$L_{(1)}(\tau) = l(x(\tau))\psi_1(\tau) + \frac{1}{k}l'_\tau\psi'_{0\tau} + \left(\frac{1}{2k}l'_\tau\right)'_\tau\psi_0,$$

где $\tau \in \partial\Omega$ – координата, $l(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, $k = -|\nu'_\tau|$ – кривизна. В этом случае условие (9) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\forall Q \in \mathbb{C}[z], \qquad \forall \xi \in \Lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^2 \mid l(\xi) = 0\}$$
$$\int_{\partial\Omega} [(\nu(x)\cdot\xi)Q'(x\cdot\xi)L_{(0)}(\tau) + Q(x\cdot\xi)L_{(1)}(\tau)]\,d\tau = 0. \tag{11}$$

Условие (9) в форме (11) позволяет в случае, когда область – единичный круг, записать связи между функциями ψ_0, ψ_1 в терминах коэффициентов разложения в ряд Фурье функций $L_{(0)}$ и $L_{(1)}$, которые можно использовать для изучения задачи Дирихле (см. [12], [13], [7]).

Этот метод делимости преобразования Фурье правой части уравнения $Lu = f$ во всем пространстве на символ оператора с постоянными коэффициентами использовался для уравнений и раньше (см., например, [14]), а в применении к граничным задачам (т. е. к уравнению (5)) предложен Ройтбергом [15] для случая полупространства и независимо и одновременно автором для случая круга [16].

То же условие (11) можно сразу получить из формулы Грина:

$$\int_\Omega [Lu\overline{v} - u\overline{L^+v}\,]\,dx = \int_{\partial\Omega} [L_{(0)}(\tau)\overline{v}'_\nu + L_{(1)}(\tau)\overline{v}\,]\,d\tau_x, \tag{12}$$

если положить $v = Q(x,\xi)$, $Q \in \mathbb{C}[z]$, $\xi \in \Lambda$. Точно так же условие (9) можно получить из общей формулы Грина типа формулы (12), если положить $v = e^{i(x,\overline{\xi})}$, $\xi \in \Lambda$, а $u \in \ker L$.

4. Прямо из формулы (12) также удобнее получать условие связи следов функции из ядра $\ker L$ оператора (10), записанное в виде проблемы моментов:

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \qquad \int_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} + (-1)^{j-1} \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau \right] (x, \tilde{a}^j)^N \, d\tau_x = 0,$$

где ν_* – конормаль, $\tilde{a}^j$, $j = 1, 2$, – векторы характеристических направлений, $\Delta = \sin\varphi_0 = \det \operatorname{matrix}(\tilde{a}^1 \tilde{a}^2)$, φ_0 – (комплексный) угол между $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$. Исследуя последнее условие, можно сопоставить свойства конкретной граничной задачи для различных уравнений. Такое сопоставление, в частности, для случая круга показало, что тип уравнения (эллиптический, гиперболический, смешанный) на свойства граничных задач особого влияния не оказывает (см. [12], [13], [7]) и привносит лишь небольшое изменение в гладкость решения. Главную роль в свойствах граничных задач, как оказалось, играет число φ_0, точнее его свойства. Если оно невещественно, то граничная задача, например задача Дирихле, имеет те же свойства, что и в случае правильно эллиптического уравнения, хотя исходное уравнение не является правильно эллиптическим. Если это число π-рационально, как в одном из примеров Бицадзе [17], [18], то эта задача имеет бесконечное число линейно независимых полиномиальных решений. Если же это число π-иррационально, то имеется единственность решения, но гладкость решения зависит от гладкости исходной функции ψ_0 из условия Дирихле $u|_{\partial K} = \psi_0$ и от скорости k приближения числа φ_0/π рациональными числами: существует $C > 0$, такое что $|\varphi_0/\pi - p/q| > C/q^k$ для любых $p/q \in \mathbb{Q}$. Кроме того, удается найти условие на коэффициенты a, b, c уравнения (3) с оператором (10), более широкое, чем условие правильной эллиптичности, выполнение которого влечет корректность в привычном смысле задачи Дирихле в любом эллипсе.

5. В общем теоретическом плане формула Грина также оказалась полезной. С ее помощью можно изучать граничные свойства решений, получать какие-то характеристики области определения максимального оператора $L\colon D(L) \to H$ с нормой графика $\|u\|^2_{D(L)} = \|u\|^2_H \|u\|^2_H$, $H = L_2(\Omega)$ и минимального оператора L_0, $D(L_0) = \operatorname{closure}\{C_0^\infty(\Omega)\}$ в норме графика, граничного пространства $C(L) = D(L)/D(L_0)$, ядер операторов L, L^+ (подробнее см. гл. 1 в книге [7] (см. также [19]), где, в частности, показано, что при выполнении условий Вишика ($\|u\|_{D(L)} \leqslant C\|Lu\|_{D(L)}$) максимальный оператор L разлагается в прямую сумму $L = L_0 \oplus L_C$ своей внутренней части (минимальный оператор L_0) и граничной части (оператор L_C)). Основным в наших построениях ниже является понятие ассоциированного следа. Покажем, как определяются ассоциированные следы (в п. 4 это функции $L_{(0)}u$ и $L_{(1)}u$).

Пусть $\mathcal{L}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha$ – общая скалярная линейная дифференциальная операция с гладкими комплекснозначными коэффициентами, Ω – ограниченная область с односторонней гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим уравнение

$$Lu = f, \tag{13}$$

где L – максимальный оператор, порожденный операцией $\mathcal{L}(x, D)$ в $L_2(\Omega)$. Первый вопрос, который здесь возникает: какими граничными свойствами обладает каждое решение уравнения (13), какие следы или агломераты следов существуют, пусть хотя бы в смысле теории распределений? Примеры показывают, что в общем случае обычные следы у решений из $L_2(\Omega)$ не существуют в распределениях даже для простейших уравнений. Так, для уравнения $Lu = \partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 = 0$ в единичном круге решение $u(x) = (1-x_1^2)^{-5/2}$ принадлежит $L_2(K)$, но $\langle u|_{\partial K}, 1\rangle_{\partial K} = \infty$ в том смысле, что

$$\lim_{r\to 1-0} \int_{|x|=r} u(x)\, ds_x = \infty,$$

так что след $u|_{\partial K}$ не является распределением. Можно показать, однако, что у каждого решения $u \in L_2(K)$ такого уравнения существует след произведения $L_{(0)}u := -u(x)l(x)|_{\partial K} \in L_2(\partial K)$, где $l(x) = x_1x_2$ – символ оператора. Точно так же не для всех решений существует след $u'_\nu|_{\partial K}$, но для каждого решения $u \in L_2(K)$ существует след $L_{(1)}u = l(x)u'_\nu(x) + l'_\tau u'_\tau + 1/2 l''_{\tau\tau} u|_{\partial K} \in H^{-3/2}(\partial K)$, где τ – угловая координата. Подобные рассуждения можно провести и в общем случае. Они основываются на следующем утверждении.

Лемма 1. *Для любой пары функций w и φ из $H^m(\mathbb{R}^n)$ имеет место следующая формула Грина*:

$$G(w,\varphi) := -\langle L(\theta_\Omega w) - \theta_\Omega Lw, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^n} = \\ = \sum_{q=0}^{m-1} \langle L_{(m-q-1)} w, \partial_\nu^q \varphi\rangle_{\partial\Omega} =: \langle \mathcal{L}_{\partial\Omega} w, \varphi\rangle_{\partial\Omega}, \tag{14}$$

где $\partial_\nu^q \varphi = \varphi_{\nu^q}^{(q)}$, $L_{(p)} = \sum_{s=0}^{P} L_{(ps)}\partial_\nu^s$ – оператор порядка p, $L_{(ps)}$ – некоторый линейный дифференциальный оператор по касательным направлениям τ с гладкими коэффициентами степени $p-s$.

Отметим, что если L^+ – максимальный оператор к формально сопряженной операции, то

$$G(w,v) = \int_\Omega (Lw \cdot \overline{\varphi} - w\cdot \overline{L^+\varphi})\, dx.$$

В случае эллиптического уравнения второго порядка распределения $f_q = (-1)^q \partial_\nu^q (\mu \cdot \delta_{\partial\Omega})$, $\mu \in \mathcal{D}'(\partial\Omega)$, действующие по формуле $\langle f_q, \varphi\rangle_{R^n} = \langle \mu, \partial_\nu^q \varphi\rangle_{\partial\Omega}$ и стоящие в равенстве (14), принято называть для $q=0$ простым, а для $q=1$ – двойным слоем на $\partial\Omega$ с плотностью μ. Соответствующий потенциал получается сверткой $f_q * \mathcal{E}$ с фундаментальным решением $\mathcal{E}$.

Пусть $J_q^m = J_{m-q-1} : H^{m-q-1/2}(\partial\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ – непрерывный оператор продолжения со свойством $\partial_\nu^p (J_q^m \psi)|_{\partial\Omega} = \delta_q^p \psi$, $p, q = 0, 1, \dots, m-1$. Подставим в (14) вместо φ функцию $J_q^m \psi$, а вместо w – последовательность $\{w_k\} \in H^m(\mathbb{R}^n)$, сходящуюся к решению u уравнения (13) в смысле нормы графика $\|w\|_{L_2(\Omega)} + \|Lw\|_{L_2(\Omega)}$. Левая часть равенства (14) будет стремиться к выражению

$$\int_\Omega (f\cdot \overline{J_q^m \psi} - u\cdot \overline{L^+ J_q^m \psi})\, dx,$$

линейному и непрерывному по $\psi \in H^{m-q-1/2}(\partial\Omega)$. Полученный функционал обозначим $L_{(m-q-1)}u$. Распределение $L_{(p)}u$ назовем *p-м следом решения u на $\partial\Omega$, ассоциированным с оператором L*, или просто *p-м L-следом* функции u на $\partial\Omega$, а распределение $L_{\partial\Omega} w$ из (14) – *L-граничным распределением.*

Итак, мы видим, что L-следы функции из области определения $D(L)$ максимального оператора существуют и $L_{(p)}u \in H^{m-q-1}(\partial\Omega)$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$, если, конечно, $H^m(\Omega)$ плотно в $D(L)$. Главным свойством L-следов является то, что они все равны нулю при условиях плотности гладких функций в $D(L)$ и $D(L^+)$ тогда и только тогда, когда они являются L-следами функции из области определения минимального оператора $D(L_0)$, что видно из формулы (14), расширенной на области определения максимального (L^+) и минимального (L_0) операторов. Это позволяет сузить их на граничное пространство $C(L)$, понимаемое нами как фактор $D(L)/D(L_0)$, тем самым расширяя область определения явно заданного оператора $\mathcal{L}_{\partial\Omega}$, и характеризовать пространства, связанные с оператором L. Пространство L^+-следов функций из $D(L^+)$ естественно отождествляется с ортогональным к $D(L_0)$ подпространством $A \subset D(L)$, которое, с другой стороны, являясь сопряженным к $C(L)$, может рассматриваться в силу его гильбертовости как реализация граничного пространства $C(L)$ (п. 1.4 из книги [7], см. также [6]) и которое является инстументом для исследования различных вопросов общей теории. Кроме того, в терминах ассоциированных следов получается условие связи обычных следов гладких функций из ядра.

Предложение 2. *Пусть гладкие функции плотны в пространствах $D(L)$ и $D(L^+)$. Для того чтобы набор $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ L-следов был набором L-следов решения и уравнения $Lu = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $v_k \in H^m(\mathbb{R}^n)$, сходящейся в норме $\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|L^+v\|_{L_2(\Omega)}$ к некоторому решению уравнения $L^+v = 0$, было выполнено условие*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{q=0}^{m-1} \langle u_{m-q-1}, \partial_\nu^q v_k\rangle_{\partial\Omega} = 0 \tag{15}$$

(*для уточнений см. утверждение* 2.9 *гл.* 1 *в книге* [7]).

Отмеченные выше условия (9) и (11) являются формами условия (15). Другим применением L-следов является формула представления решения через аналоги классических потенциалов, а также теорема о среднем (гл. 1, п. 1.3.4 в [7], см. также [6]).

6. Предложен также следующий метод изучения граничных задач, который будем называть двойственностью "уравнение–область" [20], [21]. Рассмотрим в пространстве $L_2(\Omega)$ граничную задачу

$$\begin{gathered} Lu = f \in L_2(\Omega) \quad \text{в } \Omega, \\ L_{(p)}u|_{\partial\Omega} = 0, \quad p = 0, 1, \ldots, k \leqslant m-1. \end{gathered} \tag{16}$$

Пусть L – оператор с постоянными коэффициентами, а область Ω полуалгебраична, т. е. $\exists P \in \mathbb{R}[x]$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0, \nabla P|_{\partial\Omega} \neq 0\}$, ограничена и имеет гладкую границу. Подставляя в (14) вместо φ функцию $(\overline{P(x)})^{m-k-1}\varphi_0(x)$, а вместо w – решение задачи (16), получаем после преобразования Фурье уравнение

$$[P(-D_\xi)]^{m-k-1}[l(\xi)v(\xi)] = \hat{F}, \tag{17}$$

где $v = \theta_\Omega u \in Z_\Omega = \{\widehat{\theta_\Omega u} \mid u \in L_2(\Omega)\}$, $F = (P(x))^{m-k-1}(\theta_\Omega f)$, $\theta_\Omega u, \theta_\Omega f$ – продолжения функций u и f нулем. Справедливо следующее

Предложение 3. *Каждому решению $u \in L_2(\Omega)$ задачи (16) отвечает единственное решение $v \in Z_\Omega$ уравнения (17) и наоборот.*

Заметим, что если область Ω выпукла, то в предложении 3 можно Z_Ω заменить на $Z_0 = \{\hat{u} \mid u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)\}$. Заметим также, что если в уравнении (5) учесть граничные условия (16), умножить полученное равенство на $(P(x))^{m-k-1}$ и применить преобразование Фурье, то получим то же равенство (17) с нулевой правой частью.

Пусть в условиях п. 5 настоящей статьи L – оператор второго порядка с простыми характеристиками. Рассмотрим однородную задачу Дирихле, понимая под условием Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$ условие $l_2(\nu(x))u|_{\partial\Omega} = 0$,

$$L(D_x)u = 0, \qquad u|_{p(x)=0} = 0. \tag{18}$$

Тогда уравнение (17) запишется в виде $P(-D_\xi)[l(\xi)v(\xi)] = 0$. Обозначим $w = lv$, тогда получим задачу

$$P(-D_\xi)w = 0, \qquad w|_{l(\xi)=0} = 0 \tag{19}$$

в некотором пространстве целых функций. Уравнение перешло в область, область – в уравнение. Предложение 3 утверждает, в частности, что существование нетривиальных решений задач (18) и (19) в соответствующих пространствах взаимно обусловлено существованием изоморфизма между пространствами решений. Этот метод применен к изучению единственности решения задачи Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре [22], [23], откуда следует одно приложение в интегральной геометрии на сфере, позволяющее посмотреть на получаемые условия с точки зрения преобразования Радона [22], [24]. Двойственность “уравнение–область”, по-видимому, является изобретением автора, хотя обычный в физике способ построения решений однородного уравнения, например уравнения Клейна–Гордона, через импульсное представление напоминает обратную процедуру.

Если же для изучения задачи (18) использовать условие (15), в котором стоит $v = \overline{e^{-i(x,\xi)}}$, $\xi \in \Lambda^+$, $v \in \ker L^+$, то из существования нетривиального решения задачи Дирихле (18) в пространстве $L_2(\Omega)$ получим существование нетривиальной функции $\alpha \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ такой, что

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(x)e^{-i(x,\xi)}\,dx = 0 \qquad \forall \xi \in \Lambda^+, \tag{20}$$

т. е. неплотность функций вида $e^{-i(x,\xi)}$, $\xi \in \Lambda^+$ на $\partial\Omega$. Здесь плотность экспонент $e^{-i(x,\xi)}$, $\xi \in \Lambda^+$, на $\partial\Omega$ гарантирует, таким образом, единственность решения задачи Дирихле. Условие (20) можно понимать также как условие исчезновения правой части уравнения (5), в которой уже учтены граничные условия, или как условие ортогональности правой части $\alpha\delta_{\partial\Omega}$ уравнения (13) ядру сопряженного оператора.

7. Если исходные операция и область инвариантны относительно некоторой группы преобразований, имеет смысл рассмотреть и инвариантные граничные задачи. Рассматривая здесь граничное пространство $C(L) = D(L)/D(L_0)$ для функций из $D(L)$ как пространство представления действия группы, для случая компактной группы мы можем получить разложение граничного пространства на конечномерные инвариантные пространства неприводимых представлений, в каждом из которых имеется подпространство граничных значений функций из ядра оператора, задающего уравнение, и подпространство граничных значений функций, удовлетворяющих граничному условию инвариантной задачи. Таким образом, вопрос о корректности граничной задачи переходит в вопрос о взаимодействии двух подпространств в каждом из заданного счетного набора конечномерных пространств. Сформулируем это более точно и подробно.

Пусть G – некоторая группа Ли (в частности, дискретная), гладко действующая в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Это означает, что имеется группа диффеоморфизмов $U_g : \overline{\Omega} \ni x \to g \cdot x = U_g(x) \in \overline{\Omega}$ области $\overline{\Omega}$ на себя, гладко зависящих от элемента группы G, и отображение $g \to U_g$ – гомоморфизм групп. При этом сужение диффеоморфизмов U_g на границу $\partial\Omega$ индуцирует гладкое действие группы G на границе $\partial\Omega$.

Действие группы G на области $\overline{\Omega}$ порождает представление группы G в функциональных пространствах: $(gu)(x) = u(g^{-1}x)$ (гомоморфизм группы G в группу обратимых операторов). Такое представление индуцируется на пространствах $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $H^{-m}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $H^{(m)}(\Omega)$, $H^{(-m)}(\Omega)$ и других.

Пусть дифференциальная операция $\mathcal{L}$ инвариантна относительно действия группы G, т. е. $g(\mathcal{L}u) = \mathcal{L}(gu)$. Тогда пространства $D(L)$, $D(L_0)$, $C(L)$, $\ker L$ инвариантны относительно действия группы G.

Если действие группы сохраняет объем области Ω, то скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ инвариантно относительно действия группы G, и поэтому представление группы G в этом пространстве унитарно. В этом случае операция $\mathcal{L}^+$ также инвариантна относительно действия группы G, инвариантны пространства $D(L^+)$, $D(L_0^+)$, $C(L^+)$, $\ker L^+$, а также операторы $\mathcal{L}_{\partial\Omega}$, $\mathcal{L}^+_{\partial\Omega}$. Будем говорить тогда, что оператор L G-инвариантен.

Граничную задачу с G-инвариантным оператором L

$$Lu = f, \qquad \Gamma u \in B, \tag{21}$$

порожденную подпространством $B \subset C(L)$, будем называть *G-инвариантной*, если пространство B инвариантно относительно указанного действия группы G. G-инвариантную граничную задачу будем называть *эквивариантной*, если ясно, какая группа действует.

Если группа G компактна (и непрерывна), то, как хорошо известно, гильбертово пространство представления разлагается в прямую сумму конечномерных инвариантных подпространств, в которых индуцируются неприводимые представления группы G. А если группа еще и коммутативна, то неприводимые представления одномерны.

Пусть пространством представления группы G является граничное пространство $C(L)$. Для компактной группы имеем разложения

$$C(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \widetilde{C}^k, \qquad C(\ker L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus C^k(\ker L), \qquad B = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus B^k.$$

Если наша G-инвариантная граничная задача корректна, то разложение в прямую сумму $C(L) = C(\ker L) \oplus B$ влечет разложения в прямую сумму

$$C^k := C^k(\ker L) \oplus B^k = \sum_l \widetilde{C}^{k_l}$$

с конечномерными проекторами $\Pi^k : C^k \to C^k(\ker L)$ вдоль B^k, и проверка корректности G-инвариантной граничной задачи может быть сведена к проверке двух свойств:

1) $C^k(\ker L) \cap B^k = 0$;

2) существует $\kappa > 0$, такая что $\|\Pi^k\|_{C^k} < \kappa$ для любого k.

Нами изучался спектр оператора общей корректной эквивариантной граничной задачи для уравнения Пуассона в круге и в шаре, выявлялись случаи нарушения корректности задачи, выражающиеся в нарушении свойства 1. При этом выполнение свойства 2 оказалось обеспеченным свойством корректности задачи для уравнения Пуассона [25], [26], [7].

8. Как отмечалось выше, свойства корректности граничной задачи напрямую связаны с областью, в которой она ставится. Вместе с тем идеология правильно эллиптического случая приучила к тому, что результаты о корректности справедливы для широкого класса областей, в формулировках отмечаются, как правило, лишь ограниченность и гладкость границы. Аналогична ситуация в обобщенных постановках граничных задач, скажем, для дивергентных линейных и квазилинейных эллиптических уравнений. Стремление рассматривать наиболее общие уравнения и системы с такими свойствами привели автора к обобщенной постановке задачи Дирихле, Неймана, других граничных задач для уравнений и систем вида

$$\mathcal{L}^+\mathcal{L}u = f, \tag{22}$$

$$\mathcal{L}^+A\mathcal{L}u = f \tag{23}$$

с общей дифференциальной операцией $\mathcal{L}$ и некоторым линейным или нелинейным оператором A, действующим в пространствах $L_2^k(\Omega)$ с подходящими k. Здесь обобщенным решением, например, однородной задачи Дирихле называется функция из области определения минимального оператора $u \in D(L_0)$, для которой выполнено "интегральное" тождество

$$\langle \mathcal{L}u, A\mathcal{L}\phi\rangle_\Omega = \langle f, \phi\rangle_\Omega \tag{24}$$

для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Аналогия с дивергентными уравнениями станет очевидной, если заметить, что для оператора $L = \nabla$, $\mathcal{L}^+ = -\operatorname{div}$ область определения минимального расширения $D(L_0)$ совпадает с $H_0^1(\Omega)$, и тождество (24), скажем, с оператором Немыцкого A превращается в хорошо известное определение обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$. Такая постановка приводит к ясным критериям корректности [27], [28], [7]. В частности, этот метод позволил доказать критерий фредгольмовости общей линейной дифференциальной граничной задачи для неправильно эллиптического уравнения в ограниченной области [19].

Конфликт интересов. Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Я. Б. Лопатинский, "Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям", *Укр. матем. журн.*, **5**:2 (1953), 123–151.

[2] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

[3] М. И. Вишик, “Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений”, *Тр. ММО*, **1** (1952), 187–246.

[4] М. С. Агранович, “Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами”, *УМН*, **16**:2(98), 27–93.

[5] А. А. Дезин, *Общие вопросы теории граничных задач*, Наука, М., 1980.

[6] В. П. Бурский, “О граничных свойствах решений дифференциальных уравнений и общих граничных задачах”, *Тр. ММО*, **68** (2007), 185–225.

[7] В. П. Бурский, *Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений*, Наукова думка, Киев, 2002.

[8] И. В. Волович, В. Ж. Сакбаев, “Об универсальной краевой задаче для уравнений математической физики”, *Избранные вопросы математической физики и анализа*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Труды МИАН, **285**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2014, 64–88.

[9] Ю. В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984.

[10] Ю. В. Егоров, М. А. Шубин, “Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории”, *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **30**, ВИНИТИ, М., 1988, 5–255.

[11] Б. И. Пташник, *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, Наукова думка, Киев, 1984.

[12] В. П. Бурский, “О решениях задачи Дирихле для эллиптических систем в круге”, *Укр. матем. журн.*, **44**:10 (1992), 1307–1313.

[13] В. П. Бурский, “О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов”, *Укр. матем. журн.*, **45**:11 (1993), 1476–1483.

[14] Л. Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965.

[15] Я. А. Ройтберг, В. А. Сердюк, *Эллиптические задачи с параметром в L_2-пространствах обобщенных функций для общих систем уравнений*, Препринт 82.30, Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1982.

[16] В. П. Бурский, “О ядре дифференциального оператора с постоянными коэффициентами младшего порядка в круге”, ВИНИТИ, № 3792-82 Деп., 1982.

[17] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными*, Наука, М., 1981.

[18] В. П. Бурский, “О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге”, *Матем. заметки*, **48**:3 (1990), 32–36.

[19] В. П. Бурский, “Условия регулярности общей дифференциальной граничной задачи для неправильно эллиптических уравнений”, *Укр. матем. журн.*, **62**:6 (2010), 754–761.

[20] В. П. Бурский, “Граничные свойства L_2-решений линейных дифференциальных уравнений и двойственность уравнение – область”, *Докл. АН СССР*, **309**:5 (1989), 1036–1039.

[21] В. П. Бурский, “О единственности решения некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений в области с алгебраической границей”, *Укр. матем. журн.*, **45**:7 (1993), 898–906.

[22] В. П. Бурский, “Замечания о задаче Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре и интегральной геометрии на сфере”, *УМН*, **43**:5(263), 181–182.

[23] В. П. Бурский, Е. В. Кириченко, “Однозначная разрешимость задачи Дирихле в шаре для ультрагиперболического уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **44**:4 (2008), 467–479.

[24] В. П. Бурский, Е. В. Кириченко, “Об одной задаче интегральной геометрии, связанной с задачей Дирихле для ультрагиперболического уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **47**:8 (2011), 1201–1204.

[25] В. П. Бурский, “Об эквивариантных расширениях дифференциального оператора на примере оператора Лапласа в круге”, *Укр. матем. журн.*, **51**:2 (1999), 158–169.

[26] В. П. Бурский, Т. В. Штепина, “О спектре оператора эквивариантной граничной задачи с некоммутативной группой на примере уравнения Пуассона в шаре”, *Укр. матем. журн.*, **52**:11 (2000), 158–169.

[27] В. П. Бурский, “Обобщенные решения граничных задач для дифференциальных уравнений общего вида”, *УМН*, **53**:4(322), 215–216.

[28] В. П. Бурский, “Обобщенные решения линейных граничных задач”, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, № 12, 25–36.

Поступила в редакцию 23.04.2023,
после доработки 23.04.2023,
принята к публикации 14.06.2023