



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Белосточный, С. А. Григорьев, Л. Ю. Коссович, О. А. Мыльцина, Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения под действием периодической, по временной координате, нагрузки, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2022, том 22, выпуск 4, 468–478

DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-468-478

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

23 января 2025 г., 16:54:35



## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 468–478  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 468–478

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-468-478>

EDN: [RMHUQN](https://www.edn.ru/entry/1816-9791-2022-22-4-468-478)

Научная статья  
УДК 539.3

### Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения под действием периодической, по временной координате, нагрузки

**Г. Н. Белосточный**, **С. А. Григорьев**,  
**Л. Ю. Коссович**, **О. А. Мыльцина**✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

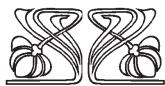
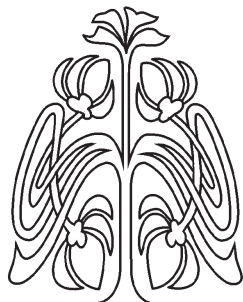
**Белосточный Григорий Николаевич**, доктор технических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, [belostochny@mail.ru](mailto:belostochny@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4471-6599>, AuthorID: 272714

**Григорьев Степан Андреевич**, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, [kafedramtuibm@yandex.ru](mailto:kafedramtuibm@yandex.ru)

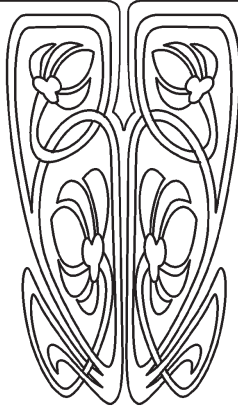
**Коссович Леонид Юрьевич**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, [president@sgu.ru](mailto:president@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, AuthorID: 2935

**Мыльцина Ольга Анатольевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, [omyltcina@yandex.ru](mailto:omyltcina@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>, AuthorID: 676590

**Аннотация.** В рамках модели типа Лява рассматривается геометрически нерегулярная изотропная полая оболочка постоянного кручения. За основу берется строгая континуальная модель «оболочка – рёбра». Предполагается, что геометрически нерегулярная оболочка нагрета до постоянной температуры  $\theta_0$ , два противоположных края подвергаются воздействию периодической, по временной координате, тангенциальной нагрузке, амплитуда и частота которой известны ( $p(t) = p_0 \cos \vartheta t$ ). Задача



Научный  
отдел





определения динамической неустойчивости термоупругой системы сводится к рассмотрению сингулярной системы трех дифференциальных уравнений динамической термоустойчивости геометрически нерегулярной оболочки в перемещениях, содержащих слагаемые с тангенциальными усилиями в форме Брайена. Эти усилия, возникающие в оболочке при ее нагреве, предварительно определяются на основе замкнутых решений сингулярной системы дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости геометрически нерегулярной оболочки. Конкретизированная исходная система уравнений преобразуется в уравнения Матье, которые записаны в терминах классической атермической теории гладких пластин и содержат поправки на геометрические параметры — кривизну, относительную высоту подкрепляющих элементов, их число и температуру. Определяются первые три области динамической неустойчивости геометрически нерегулярной оболочки. Проводится количественный анализ влияния геометрических параметров упругой системы и температуры на конфигурацию областей динамической неустойчивости.


**Ключевые слова:** сингулярность, термоустойчивость, динамика, геометрическая нерегулярность, континуальная модель, уравнения Матье, замкнутые интегралы, области неустойчивости

**Для цитирования:** Белосточный Г. Н., Григорьев С. А., Коссович Л. Ю., Мылцина О. А. Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения под действием периодической, по временной координате, нагрузки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 468–478. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-468-478>, EDN: RMHUQN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Dynamic thermal stability of a geometrically irregular shallow shell of constant torsion under the action of a load periodic by its time coordinate

G. N. Belostochny, S. A. Grigoriev, L. Yu. Kossovich, O. A. Myltcina 

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

**Grigory N. Belostochny**, belostochny@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4471-6599>, AuthorID: 272714

**Stepan A. Grigoriev**, kafedramtuibm@yandex.ru

**Leonid Yu. Kossovich**, president@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>, AuthorID: 2935

**Olga A. Myltcina**, omyltcina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>, AuthorID: 676590

**Abstract.** In the framework of a Love type model, a geometrically irregular isotropic shallow constant torsion shell is considered. It is based on a strict continuum-shell-rib model. It is assumed that the geometrically irregular shell is heated to a constant temperature  $\theta_0$ , two opposite edges are exposed to a tangential load periodic by its time coordinate, the amplitude and frequency of which are known ( $p(t) = p_0 \cos \vartheta t$ ). The problem of determining the regions of dynamic instability of a thermoelastic system is reduced to considering a singular system of three differential equations of dynamic thermal stability of a geometrically irregular shell in displacements containing a term with tangential forces in the Brian form. These forces arising in the shell during its heating are preliminarily determined on the basis of closed solutions of the



singular system of differential equations of the momentless thermoelasticity of the geometrically irregular shell. The specific initialized system of equations is transformed into the Mathieu equations, which are written in terms of the classical athermal theory of smooth plates containing corrections for geometric parameters — curvature, the relative height of the reinforcing elements, their number, and temperature. The first three regions of dynamic instability of a geometrically irregular shell are determined. A quantitative analysis of the influence of the geometric parameters of the elastic system and temperature on the configuration of the regions of dynamic instability is carried out.

**Keywords:** singularity, thermal stability, dynamics, geometric irregularity, continuum model, Mathieu equations, closed integrals, instability domains

**For citation:** Belostochny G. N., Grigoriev S. A., Kossovich L. Yu., Myltcina O. A. Dynamic thermal stability of a geometrically irregular shallow shell of constant torsion under the action of a load periodic by its time coordinate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 468–478 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-468-478>, EDN: RMHUQN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## 1. Постановка задачи

На базе континуальной модели [1–3] рассмотрим геометрически нерегулярную пологую оболочку (ГНО) постоянного кручения, стандартным образом отнесенную к декартовым координатам [4], перекрывающую в координатной плоскости  $\pi(xOy)$  прямоугольный план со сторонами  $a$  и  $b$  соответственно. Оболочка нагрета до постоянной температуры  $\theta_0$ , на торцах оболочки, расположенных по координатным прямым  $y = 0$  и  $y = b$ , действуют периодические по временной координате тангенциальные нагрузки заданной интенсивности  $p(t) = p_0 \cos \vartheta t$ .

Система сингулярных дифференциальных уравнений динамической термоустойчивости геометрически нерегулярной оболочки постоянного кручения в компонентах поля перемещений запишется в виде [3]

$$u_{,11} + \frac{1-\nu}{2}u_{,22} + \frac{1+\nu}{2}v_{,12} - (1-\nu)k_{12}w_{,2} + \varepsilon_1 \frac{1-\nu}{2} \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i (u_{,2} + v_{,1} - 2k_{12}w)_{,2} \delta(x - x_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1+\nu}{2}u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2}v_{,11} - (1-\nu)k_{12}w_{,1} + \varepsilon_2 \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i (v_{,2} + \nu u_{,1})_{,2} \delta(x - x_i) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \nabla^2 w + 2 \frac{B}{D} (1-\nu) k_{12}^2 w - \frac{B}{D} k_{12} (u_{,2} + v_{,1}) - \\ & - \frac{1}{D} ((T_0^{11} w_{,1})_{,1} + (T_0^{22} w_{,2})_{,2} + (T_0^{12} w_{,1})_{,2} + (T_0^{21} w_{,2})_{,1}) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 a_i \Phi_{3i} w_{,2222} \delta(x - x_i) + 2(1-\nu) \sum_{i=1}^n \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 a_i \Phi_{3i} w_{,122} \Big|_{x=x_i} \frac{d\delta(x - x_i)}{dx} + \\ & + \frac{B}{D} \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i 2(1-\nu) k_{12}^2 \delta(x - x_i) - \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i (T_0^{22})_{,2} \delta(x - x_i) = \end{aligned}$$



$$= -\frac{\gamma h}{gD} w_{,tt} - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma h_i}{gD} a_i w_{,tt} \delta(x - x_i). \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, 2$ ) — знаковые числа, равные 0 или 1,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $k_{12}$  — параметр кривизны,  $\bar{U}(u, v, w)$  — вектор перемещений, когда оболочка находится в моментном состоянии,  $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $\frac{h_i}{h}$  — отношение высоты  $i$ -го ребра к толщине оболочки,  $a_i$  — ширина  $i$ -го ребра,  $\Phi_{3i} = 1 + 3\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $\gamma$  — удельный вес,  $g$  — интенсивность поля тяжести,  $\delta(x - x_i)$  — обобщенная  $\delta$ -функция Дирака.

Подчеркнутые слагаемые в уравнениях (1), (2) соответствуют в терминах дискретной модели [5] при  $\varepsilon_j = 1$  учету «растяжения-сжатия» и «сдвига» ребер в тангенциальной плоскости, при  $\varepsilon_j = 0$  работе ребер только на «изгиб» и «кручение». В [6] было показано, что подчеркнутые слагаемые не изменяют вида и значений областей динамической неустойчивости для пологой геометрически нерегулярной цилиндрической оболочки, поэтому получение таких областей для оболочки постоянного кручения проведено в случае работы ребер только на «изгиб» и «кручение».

## 2. Безмоментное состояние

Пусть  $T_0^{11}$ ,  $T_0^{12}$ ,  $T_0^{22}$  — тангенциальные усилия, возникающие в ГНО при нагреве и силовом воздействии на торцы в ее безмоментном состоянии, содержатся в форме Брайена. Отметим, что в уравнениях (1), (2) отсутствуют инерционные члены в тангенциальной плоскости оболочки [7, 8].

В случае краевых условий:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, x = a \quad u^0 = 0, T_0^{12} = 0, \\ \text{при } y = 0, y = b \quad T_0^{22} = -p(t), T_0^{12} = 0, \end{aligned}$$

которые в перемещениях имеют вид

$$\begin{cases} \text{при } x = 0, x = a \quad u^0 = 0, u^0_{,2} + v^0_{,1} - 2k_{12}w^0 = 0; \\ \text{при } y = 0, y = b \quad v^0_{,2} + \nu u^0_{,1} = \alpha(1 + \nu)\theta_0 - \frac{p(t)}{B}, u^0_{,2} + v^0_{,1} - 2k_{12}w^0 = 0, \end{cases}$$

решение безмоментной термоупругости ГНО запишется [9–12]

$$u^0 = 0, \quad w^0 = 0, \quad v^0 = \alpha(1 + \nu)\theta_0 y - 2\frac{p(t)}{B}y,$$

и, следовательно, тангенциальные усилия в уравнении (3) примут вид

$$T_0^{11} = -(1 - \nu^2)B\alpha\theta_0 - \nu p(t), \quad T_0^{22} = -p(t), \quad T_0^{12} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\bar{U}^0(u^0, v^0, w^0)$  — вектор перемещений в безмоментном состоянии ГНО,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала.

## 3. Уравнения Матье

Решения системы (1)–(3) с учетом вида тангенциальных усилий (4), тождественно удовлетворяющих всем краевым условиям (для случая, когда ГНО находится в



моментном состоянии):

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0, x = a \quad u = 0, T^{12} = 0, w = 0, M^{11} = 0 \\ &\quad (u = 0, u_{,2} + \nu_{,1} - 2k_{12}w = 0, w = 0, w_{,11} = 0), \\ &\text{при } y = 0, y = b \quad T^{22} = 0, T^{12} = 0, w = 0, M^{22} = 0 \\ &\quad (v_{,2} + \nu u_{,1} = 0, u_{,2} + \nu_{,1} - 2k_{12}w = 0, w = 0, w_{,22} = 0), \end{aligned} \quad (5)$$

зададим в виде

$$u(x, y, t) = \sum_k \sum_m \tilde{u}(t) \left(\frac{x}{a}\right)^{2k} \left(\frac{x}{a} - 1\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{3m} \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2, \quad (6)$$

$$v(x, y, t) = \sum_k \sum_m \tilde{v}(t) \left(\frac{x}{a}\right)^{3k} \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^{3m} \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2, \quad (7)$$

$$w(x, y, t) = \sum_k \sum_m w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (8)$$

В условиях (5) в скобках приведена их запись в компонентах поля перемещений.

Подстановка (6)–(8) в уравнения системы (1)–(3) с последующим применением процедуры Галёркина приводит к трем уравнениям относительно переменных коэффициентов аппроксимирующих функций (6)–(8):

$$e_{11}\tilde{u} + e_{12}\tilde{v} = k_{12}ae_1w_{km}, \quad (9)$$

$$e_{21}\tilde{u} + e_{22}\tilde{v} = k_{12}ae_2w_{km}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma ha^4}{gD} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^s\right) \frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \left\langle \left( (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \right)^2 + 24(1 - \nu) \left(\frac{\tilde{\delta}}{h}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 12(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[ (k\pi)^2 \left( \alpha\theta_0 + \nu \frac{p(t)}{Eh} \right) + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \frac{p(t)}{Eh} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4 \sum_{i=1}^n \beta_i^s + 4(1 - \nu)(k\pi)^2 \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c + 48(1 - \nu) \left(\frac{\tilde{\delta}}{h}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^s - \right. \\ &\quad \left. - 24(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \frac{p(t)}{Eh} \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^s \right\rangle w_{km}(t) - 48(1 - \nu) \frac{\tilde{\delta}}{h} \frac{a}{h} \left(\frac{a}{b}\right)^2 (I_9\tilde{u} + I_{10}\tilde{v}) = 0. \end{aligned}$$

Здесь обозначено:  $\frac{\tilde{\delta}}{h}$  — относительная стрела подъема оболочки над ее планом при задании относительного параметра кривизны в виде [4,5]  $k_{12}a = \frac{\tilde{\delta}}{h} \frac{h}{a} \frac{a}{b}$ ,  $e_{11} = 2I_1 + \frac{1-\nu}{2}I_2$ ,  $e_{12} = \frac{1+\nu}{2}I_3$ ,  $e_{21} = \frac{1+\nu}{2}I_5$ ,  $e_{22} = I_6 + \frac{1-\nu}{2}I_7$ ,  $e_1 = \frac{1-\nu}{k\pi}I_4$ ,  $e_2 = (1 - \nu)I_8$ ,  $I_1$ – $I_{10}$  интегралы, получаемые при непосредственном применении метода Галёркина.

Выражая из уравнений (9), (10)  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$  через  $w_{km}$ :

$$\begin{cases} \tilde{u} = e^1 k_{12} a w_{km}, \\ \tilde{v} = e^2 k_{12} a w_{km}, \end{cases}$$

перепишем третье уравнение после ряда преобразований в виде

$$\frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \frac{\left( (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \right)^2}{\frac{\gamma ha^4}{gD}} \frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} \times$$



$$\times \left( 1 - \frac{12(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\nu(k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}{\left((k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2} \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \frac{p_0}{Eh} \cos \vartheta t \right) w_{km} = 0. \quad (11)$$

Это есть уравнения Матье [13, 14], записанные в терминах классической атермической теории пластин с поправками на параметры:  $\tilde{\delta}$ ,  $\frac{h_i}{h}$ ,  $n$  и  $\theta_0$ . Здесь обозначено:

$$f_1^{km} = 1 + \frac{2 \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^s}{\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 + \nu(k\pi)^2}, \quad f_3^{km} = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^s, \quad (12)$$

$$f_2^{km} = 1 + \frac{\Gamma_{km} \left(\frac{\tilde{\delta}}{h}\right)^2 (a/b)^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i - 12(1-\nu^2)(k\pi)^2 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \alpha \theta_0}{\left((k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}, \quad (13)$$

$$\Gamma_{km} = 24(1-\nu) \left( 1 - 2\frac{a}{b} (I_9 e^1 + I_{10} e^2) + 2 \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^s \right), \quad (14)$$

$$\beta_i = 2 \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4 \beta_i^s + 4 \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 (k\pi)^2 (1-\nu) \beta_i^c, \quad \beta_i^s = \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \frac{a_i}{a} \Phi_{3i} \sin^2 \frac{k\pi x_i}{a}, \quad (15)$$

$$\beta_i^c = \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \frac{a_i}{a} \Phi_{3i} \cos^2 \frac{k\pi x_i}{a}, \quad \tilde{\beta}_i^s = \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi x_i}{a}, \quad (16)$$

$$e^1 = \frac{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}}{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}}, \quad e^2 = \frac{e_{21}e_{11} - e_{12}e_{21}}{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}}. \quad (17)$$

Следует отметить, что  $\frac{\left((k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}{\frac{\gamma h a^4}{gD}}$  — квадрат частоты собственных колебаний гладкой пластинки [15, 16],  $\frac{12(1-\nu^2) \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\nu(k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2}{\left((k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2} = \frac{Eh}{p_0^{\text{кр}}}$  — величина, обратная относительной критической нагрузке при статической потере устойчивости [17],  $\mu_{km} = \frac{1}{2} \frac{p_0}{p_{\text{кр}}}$  — коэффициент возбуждения гладкой пластинки на базе атермической теории, предельное значение которого  $\tilde{\mu}_{km} = 0,5$  [12, 18].

Приведенного уравнения (11) и формул (12)–(17) достаточно для определения влияния геометрических параметров на предельное значение коэффициента возбуждения и границы областей динамической неустойчивости при любых значениях  $k$  и  $m$ .

#### 4. Области динамической неустойчивости

Границы первых трех областей неустойчивости [14] в системе  $\left\{ \mu_{km}, \frac{\vartheta}{\omega_{km}} \right\}$  примут вид:

I область

$$\frac{\vartheta}{\omega_{km}} = 2 \sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} \pm \frac{f_1^{km}}{f_3^{km}} \mu_{km}}, \quad (18)$$

II область

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vartheta}{\omega_{km}} = \sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} - 2 \frac{(f_1^{km})^2}{f_2^{km} f_3^{km}} \mu_{km}}, \\ \frac{\vartheta}{\omega_{km}} = \sqrt{\frac{5}{8} \frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} + \frac{1}{2} \frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} \sqrt{\frac{9}{16} + \left(\frac{f_1^{km}}{f_2^{km}}\right)^2}} \mu_{km}, \end{array} \right. \quad (19)$$



III область

$$\frac{\vartheta}{\omega_{km}} = \sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} \left( \frac{10}{9} \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \mu_{km} - \sqrt{\left( \frac{10}{9} \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \mu_{km} \right)^2 - \frac{4}{9} \left( 1 \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \mu_{km} - \left( \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \mu_{km} \right)^2 \right)} \right)} \quad (20)$$

При построении первой и третьей областей «+» выбирается для ограничения областей динамической неустойчивости (ДН) сверху, а «-» — для ограничения снизу.

### 5. Анализ полученного решения и выводы

Количественные результаты, полученные на основании формул (12)–(17), (18)–(20), приводятся на рис. 1–3. На горизонтальной оси  $\mu_{km}$ , а по вертикальной значения — отношения  $\frac{\vartheta}{\omega_{km}}$ .  $G_{ij}$  для случая  $k = 1, m = 1$  и  $G_{ij}(k, m)$  графики кривых ограничивающих области динамической неустойчивости ( $i = 1, 2, 3$  — номер области,  $j = 1, 2$  — номер кривой, где 1 — нижняя кривая, 2 — верхняя кривая).

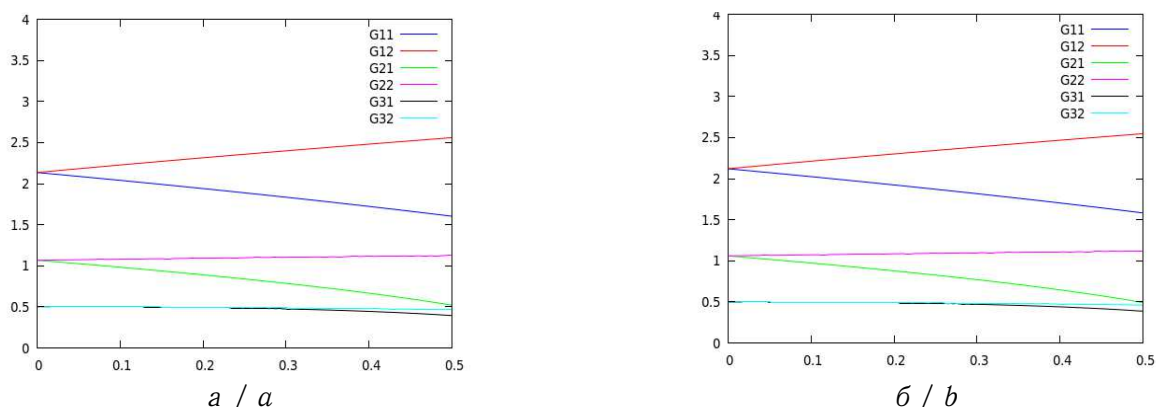


Рис. 1. Построение областей динамической неустойчивости для параметров  $n = 1, \frac{\tilde{\delta}}{h} = 3, \frac{h_i}{h} = 2$  при разных температурах:  $a - \theta_0 = 5; b - \theta_0 = 15$  (цвет online)

Fig. 1. Construction of dynamic instability regions for parameters  $n = 1, \frac{\tilde{\delta}}{h} = 3, \frac{h_i}{h} = 2$  at different temperatures:  $a$  is  $\theta_0 = 5; b$  is  $\theta_0 = 15$  (color online)

Из рис. 1 следует, что конфигурации областей динамической неустойчивости малочувствительны к величине температуры (в предельных значениях не превышающих потерю статической термоустойчивости). Следует отметить важный факт, что при соответствующем выборе условий закрепления можно полностью избежать влияния температуры на области динамической неустойчивости, как и в случае с цилиндрической оболочкой [6].

Площади областей динамической неустойчивости существенно уменьшаются (как и предельные значения коэффициентов возбуждения) с увеличением параметров  $\frac{h_i}{h}, n$  и  $\frac{\tilde{\delta}}{h}$  (рис. 1, а и 2, а) при прочих равных условиях, что согласуется с результатами, полученными для геометрически нерегулярной пластинки [9] и геометрически нерегулярной пологой цилиндрической оболочки [6].



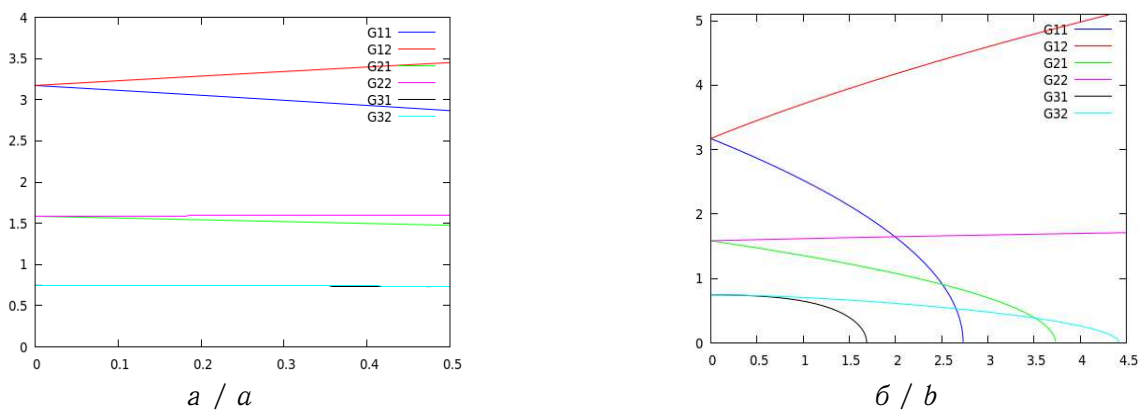


Рис. 2. Построение области динамической неустойчивости при  $n = 5$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 15$ :  $a - \mu \in [0; 0.5]$ ;  $b - \mu \in [0; 4.5]$  (цвет online)

Fig. 2. Construction a dynamic instability region at  $n = 5$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 5$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 15$ :  $a$  is  $\mu \in [0; 0.5]$ ;  $b$  is  $\mu \in [0; 4.5]$  (color online)

При определенных значениях этих параметров наблюдается вырождение областей неустойчивости в скелетные линии [14] (см. рис. 2, а), хотя при больших значениях переменной  $\mu_{ktm}$  вид кривых, ограничивающих области, довольно разнообразен, и наблюдается их наслаивание (см. рис. 2, б).

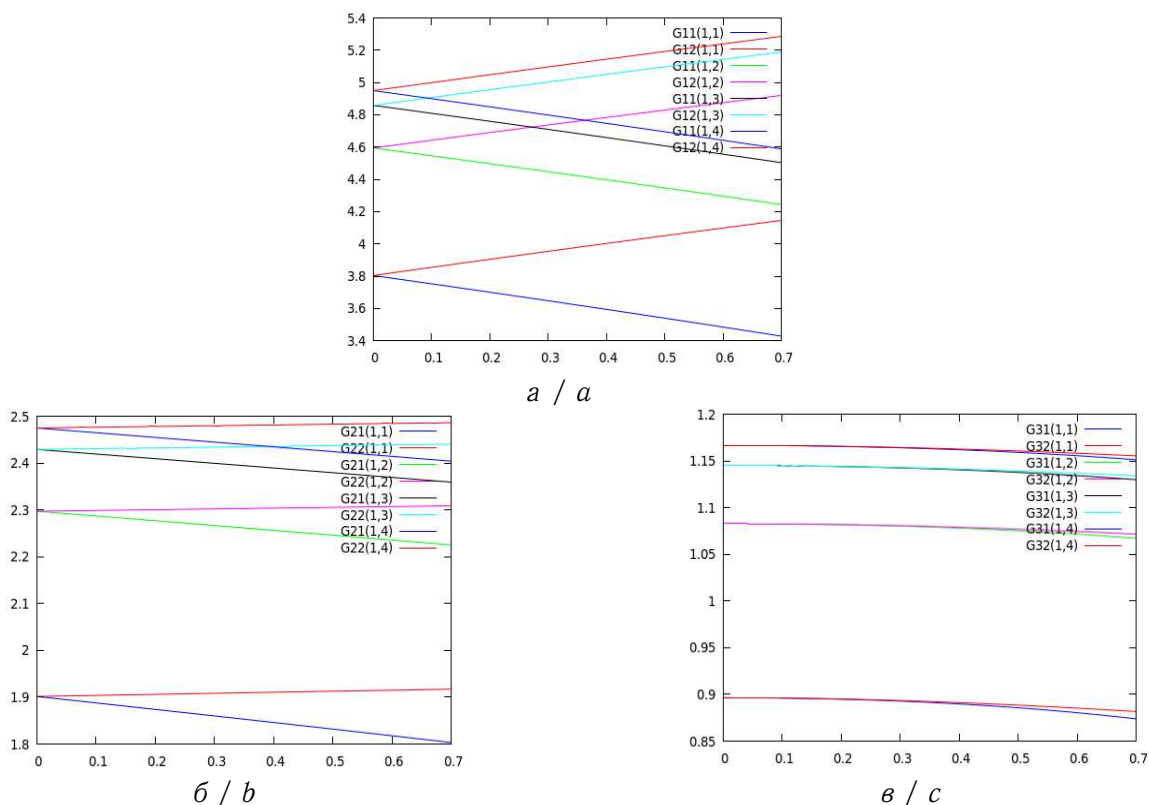


Рис. 3. Области динамической неустойчивости I (а), II (б), III (в) для параметров  $n = 5$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 1$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 15$  (цвет online)

Fig. 3. Dynamic instability regions I (a), II (b), III (c) for parameters  $n = 5$ ,  $\frac{\tilde{\delta}}{h} = 1$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$ ,  $\theta_0 = 15$  (color online)



Исследование областей ДН при изменении значений  $k$  и  $m$  (рис. 3) привело к следующим выводам:

- 1) вид областей ДН и их площади не изменяются при изменении значений  $k$  и  $m$ ;
- 2) значения подъема области при  $\mu_{km} = 0$  для каждого фиксированного  $k$  и с растущим  $m$  уменьшаются. Такое же поведение при фиксированном  $m$  (таблица).

Значения границ областей динамической неустойчивости при  $\mu_{km} = 0$ ,  $n = 5$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$

Table. Values of the boundaries of the regions of dynamic instability at  $\mu_{km} = 0$ ,  $n = 5$ ,  $\frac{h_i}{h} = 5$

$k$	1		2		7	
$m$	1	7	1	7	1	7
I область	3.80	5.04	2.78	4.91	1.97	3.78
II область	1.90	2.52	1.39	2.45	0.99	1.79
III область	0.89	1.18	0.66	1.16	0.46	0.89

Если следовать изменению номеров  $k$  и  $m$  как в [19], то проследить какие-то стабильные изменения в значениях отношений  $\frac{\vartheta}{\omega_{km}}$  не представляется возможным.

Следует также отметить возможность «замены», как в случае цилиндрической оболочки [6], пологой гладкой оболочки постоянного кручения на геометрически нерегулярную пластину (и обратно), подбирая соответствующим образом значения параметров  $\frac{h_i}{h}$ ,  $n$  и  $\frac{\delta}{h}$ .

#### Список литературы

1. Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1970. № 4. С. 150–162.
2. Белосточный Г. Н., Ульянова О. И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 32–40. EDN: NHLAIF
3. Белосточный Г. Н., Русина Е. А. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной // Доклады РАЕН. Поволжское межрегиональное отделение. 1999. № 1. С. 28–37.
4. Назаров А. А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Ленинград ; Москва : Стройиздат (Ленингр. отд-ние), 1965. 302 с.
5. Рассудов В. М. Деформации пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости // Ученые записки Саратовского государственного университета. 1956. Т. 52. Вып. механический. С. 51–91.
6. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой цилиндрической оболочки под действием периодической, по временной координате, нагрузки // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, вып. 3. С. 583–594. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1755>, EDN: VBSTLY
7. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1963. 417 с.
8. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1958. 520 с.
9. Белосточный Г. Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Доклады Академии военных наук. Поволжское отделение. 1999. № 1. С. 14–25.
10. Белосточный Г. Н., Русина Е. А. Динамическая термоустойчивость трансверсально-изотропных пластин под действием периодических нагрузок // Современные проблемы



- нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами : сб. науч. трудов межвуз. науч. конф. Саратов : Изд-во СГТУ, 2000. С. 175–180.
11. Белосточный Г. Н., Цветкова О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием периодического по времени температурного поля // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во СГТУ, 2002. С. 64–72.
  12. Мыльцина О. А., Полиенко А. В., Белосточный Г. Н. Динамическая устойчивость нагретых геометрически нерегулярных пластин на основе модели Рейснера // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2017, Т. 21, вып. 4. С. 760–772. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1579>
  13. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1953. 256 с.
  14. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва : Гостехиздат, 1956. 600 с.
  15. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1932. 344 с.
  16. Филиппов А. П. Методы расчета сооружений на колебания. Москва ; Ленинград : Госстройиздат, 1940. 230 с.
  17. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Москва ; Ленинград : ОГИЗ — Гостехиздат, 1946. 532 с.
  18. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Москва : Наука, 1967. 266 с.
  19. Бессонов Л. В. Численная реализация метода последовательного возмущения параметров при расчете напряжённо-деформированного состояния оболочечной конструкции в случае жесткого закрепления краев оболочки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 74–79. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79>

## References

1. Zhilin P. A. The linear theory of ribbed shells. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 1970, iss. 4, pp. 150–162 (in Russian).
2. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, iss. 2, pp. 184–191. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020051>, EDN: OHQLNX
3. Belostochnyi G. N., Rusina E. A. Shells and geometrically irregular plates with heat-sensitive thickness. *Doklady Rossiiskoy Akademii Estestvennykh Nauk*, 1999, iss. 1, pp. 28–37 (in Russian).
4. Nazarov A. A. *Osnovy teorii i metody rascheta pologikh obolochek* [Fundamentals of the Theory and Methods for Designing Shallow Shells]. Leningrad, Moscow, Strojizdat, 1965. 302 p. (in Russian).
5. Rassudov V. M. Deformations of gently sloping shells supported by stiffeners. *Uchenye Zapiski Saratovskogo Universiteta*, 1956, vol. 52, iss. Mechanical, pp. 51–91 (in Russian).
6. Belostochny G. N., Myltcina O. A. Dynamic thermal stability of heated geometrically irregular cylindrical shell under the influence of a periodic temporal coordinate load. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, iss. 3, pp. 583–594 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1755>, EDN: VBSTLY
7. Ogibalov P. M. *Voprosy dinamiki i ustoichivosti obolochek* [Problems in Dynamics and Stability of Shells]. Moscow, Moscow University Press, 1963. 417 p. (in Russian).
8. Ogibalov P. M., Griбанov V. F. *Termoustojchivost' plastin i obolochek* [Thermal Stability of Plates and Shells]. Moscow, Moscow University Press, 1958. 520 p. (in Russian).
9. Belostochny G. N. Analytical methods for determination of closed integrals of singular



- differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells. *Doklady Akademii Voennoykh Nauk*, 1999, iss. 1, pp. 14–25 (in Russian).
10. Belostochny G. N., Rusina E. A. Dynamic thermal stability of transversal-isotropic plates under the action of periodic loads. In: *Sovremennyye problemy nelineinoy mekhaniki konstruktсии, vzaimodeystvuyushchikh s agressivnymi sredami* [Modern Problems of Nonlinear Mechanics of Structures Interacting with Aggressive Media]. Saratov, SSTU Publ., 2000, pp. 175–180 (in Russian).
  11. Belostochny G. N., Tsvetkova O. A. Geometrically irregular plates under the action of a time-periodic temperature field. In: *Problemy prochnosti elementov konstruktсий pod deystviem nagruzok i rabochikh sred* [Problems of Strength of Structural Elements Under the Influence of Loads and Working Media]. Saratov, SSTU Publ., 2002, pp. 64–72 (in Russian).
  12. Myltcina O. A., Polienko A. V., Belostochny G. N. Dynamic stability of heated geometrically irregular plates on the basis of the Reisner model. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, iss. 4, pp. 760–772 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1579>
  13. Stoker J. J. *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. Wiley Classics Library. New York, Wiley, 1992. 296 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1953. 256 p.).
  14. Bolotin V. V. *The Dynamic Stability of Elastic Systems*. Holden-Day Series in Mathematical Physics. San Francisco, London, Amsterdam, Holden-day, 1964. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Gostekhizdat, 1956. 600 p.).
  15. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. London, Constable. 1937. 497 p. (Russ. ed.: Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1932. 344 p.).
  16. Filippov A. P. *Metody rascheta sooruzheniy na kolebaniya* [Methods of Calculating Structures for Vibrations]. Moscow, Leningrad, Gosstroyizdat, 1940. 230 p. (in Russian).
  17. Timoshenko S. P. *Ustoychivost' uprugikh sistem* [Stability of Elastic Systems]. Moscow, Leningrad, OGIZ — Gostekhizdat, 1946. 532 p. (in Russian).
  18. Ambartsumian S. A. *Teoriya anizotropnykh plastin* [Theory of Anisotropic Plates]. Moscow, Nauka, 1967. 266 p. (in Russian).
  19. Bessonov L. V. Numerical implementation of method of subsequent perturbation of parameters for computation of stress-strain state of a shell rigidly fixed on the boundaries. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 74–79 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79>

Поступила в редакцию / Received 27.12.2021

Принята к публикации / Accepted 10.04.2022

Опубликована / Published 30.11.2022