

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Абрамов, А. В. Бутковский, Влияние отношения температуры потока к температуре стенки на сильную конденсацию газа, *ТВТ*, 2008, том 46, выпуск 2, 257–261

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

27 марта 2025 г., 09:55:52



УДК 533.722

## ВЛИЯНИЕ ОТНОШЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОТОКА К ТЕМПЕРАТУРЕ СТЕНКИ НА СИЛЬНУЮ КОНДЕНСАЦИЮ ГАЗА

© 2008 г. А. А. Абрамов, А. В. Бутковский

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, г. Жуковский

Поступила в редакцию 19.09.2006 г.

Методом прямого статистического моделирования исследовано влияние отношения  $T$  температуры потока к температуре стенки на сильную дозвуковую конденсацию одноатомного газа. Показано, что зависимость относительного давления на границе кнудсеновского слоя от относительной температуры при фиксированном числе Маха  $M$  имеет минимум. При этом заметное переохлаждение конденсирующегося газа ( $T < 1$ ) приводит к резкому возрастанию относительного давления. В то же время для “умеренно холодной” стенки ( $1.5 < T < 10$ ) зависимость относительного давления от относительной температуры при фиксированном значении  $M$  весьма слабая. Показано, что в случае сверхзвуковой конденсации зависимость минимально возможного относительного давления от  $T$  при фиксированном  $M$  также имеет минимум. Результаты расчетов хорошо совпадают с расчетами моментным методом на основе предложенной в работе аппроксимации функции распределения молекул.

PACS: 68.03.Fg, 47.55.dr

### ВВЕДЕНИЕ

При высоких скоростях испарения и конденсации, когда число Рейнольдса велико, в потоке газа у границы раздела фаз возникает слой, получивший название кнудсеновского, в котором отсутствует поступательное равновесие. Условия на внешней границе этого слоя являются условиями на стенке для уравнений газодинамики. В случае сильной конденсации газа со скоростью, направленной перпендикулярно к поверхности, отношение давления  $p_\infty$  на границе кнудсеновского слоя к давлению насыщенных паров  $p_s$  при температуре поверхности  $T_s$  является функцией числа Маха и отношения температуры потока  $T_\infty$  на внешней границе слоя к  $T_s$  [1]  $p = p(M, T)$ , где  $p = p_\infty/p_s(T_s)$ ,  $T = T_\infty/T_s$ .

Вид функции  $p = p(M, T)$  для одноатомного газа весьма подробно исследовался [2] методом прямого статистического моделирования при температурах  $0.5 \leq T \leq 4$ . Расчеты при меньших  $T$  не проводились, так как для существовавших тогда ЭВМ требовали очень больших затрат машинного времени. С другой стороны, моментное решение [3, 4], неплохо совпадающее с результатами [2] в диапазоне  $0.5 \leq T \leq 4$ , при  $T < 0.5$  приводит к особенностям в функции  $p(M, T)$ . В связи с этим для прояснения общей картины влияния температуры потока на давление вне кнудсеновского слоя в данной работе методом прямого статистического моделирования проведены расчеты зависимости  $p(M, T)$  при  $T < 0.5$ , а также при  $T > 4$ .

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования течения в слое Кнудсена при сильной конденсации на поверхность с коэффициентом конденсации, равным единице, необходимо решить уравнение Больцмана

$$\xi \frac{df}{dx} = J(f, f). \quad (1)$$

Граничные условия имеют вид

$$f = \rho_s (2\pi RT_s)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_s}\right], \quad (2)$$

$$\xi > 0, \text{ при } x = 0;$$

$$f = \rho_\infty (2\pi RT_\infty)^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\xi + u_\infty)^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_\infty}\right] \quad (3)$$

$$\text{при } x \rightarrow \infty.$$

Здесь  $\rho_s$  – плотность насыщенных паров при температуре стенки  $T_s$ ;  $\rho_\infty$  и  $u_\infty$  – плотность и средняя массовая скорость газа на границе кнудсеновского слоя соответственно;  $R$  – газовая постоянная;  $J(f, f)$  – интеграл столкновений молекул [5];  $\xi, \eta, \zeta$  – декартовы компоненты скорости молекул, причем  $\xi$  направлена перпендикулярно поверхности (параллельно оси  $x$ ).

Соотношения на кнудсеновском слое при меньших значениях коэффициента конденсации могут быть получены с помощью решения для  $\alpha = 1$  путем соответствующего пересчета [1, 6].

## РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПРЯМОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методом итераций решалась обратная задача [2]. Если на  $i$ -й итерации известна величина  $\rho_{\infty}$ , тогда установлением по времени решается задача (1) с граничным условием (2) при  $x = 0$  и условием (3) при  $x = L$  только для влетающих в рассматриваемую область молекул. Расстояние между границами расчетной области  $L$  подбиралось таким образом, что дальнейшее увеличение его не приводило к изменению решения. Величина  $\rho_s^{(i+1)}$  на  $(i + 1)$ -й итерации находилась из закона сохранения массы, записанного в виде:

$$\frac{\rho_s^{(i+1)} \sqrt{RT_s}}{\sqrt{2\pi}} = J_s^{(i)-} + \rho_{\infty} u_{\infty}.$$

Здесь  $J_s^{(i)-}$  – суммарный поток массы из рассматриваемого слоя, в точном решении он равен потоку, летящему на стенку.

Для решения задачи методом прямого статистического моделирования применялась процедура установления с некоторым достаточно малым шагом по времени  $\Delta t$ . При этом пространство между плоскостями  $x = 0$  и  $x = L$  разбивалось на ячейки размером, меньшим длины свободного пробега молекул. Внутри ячеек плотность, скорость и температура газа считались постоянными. В ячейки помещались моделирующие течение молекулы. Эволюция системы частиц на временном интервале  $\Delta t$ , меньшем среднего времени между столкновениями молекул, расщепляется на два этапа: 1) свободный перелет молекул за время  $\Delta t$ ; 2) столкновение неподвижных молекул, принадлежащих данной ячейке [7, 8]. Макропараметры в ячейках вычислялись путем усреднения по времени вдоль траекторий молекул соответствующих микроскопических величин [9]. Расчеты проводились для модели молекул “псевдомаксвелловские сферы” с сечением взаимодействия  $\sigma = \sigma_0/g$ , где  $\sigma_0$  – постоянная,  $g$  – относительная скорость сталкивающихся молекул.

## МОМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ

Соотношение на границе кнудсеновского слоя неоднократно исследовалось моментными методами [3, 4, 10, 11]. Как отмечалось в [2], это решение, неплохо описывающее конденсацию на “холодную” стенку, становится непригодным для “горячей” стенки из-за наличия у моментного решения особенности в области малых  $T$ . В связи с этим рассмотрим моментное решение, позволяющее избежать указанного недостатка.

На внешней границе кнудсеновского слоя функция распределения предполагается максвелловской

$$f_1 = \rho_{\infty} (2\pi RT_{\infty})^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(\xi + u_{\infty})^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_{\infty}} \right].$$

Функция распределения испаренных и падающих на стенку молекул по скоростям на границе раздела фаз задается в виде

$$f_2 = \begin{cases} \rho_s (2\pi RT_s)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_s} \right], & \xi > 0; \\ \beta_1 f_1 + \beta_* \rho_s (2\pi RT_*)^{-3/2} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2RT_*} \right], & \xi < 0. \end{cases}$$

Здесь  $T_*$  – параметр функции распределения (температура добавочного полумаксвелловского потока), выбираемый ниже таким образом, чтобы обеспечить наилучшее соответствие результатам расчетов методом прямого статистического моделирования. Константы  $\beta_1$  и  $\beta_*$  определяются в ходе решения задачи.

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии при переходе через кнудсеновский слой принимают вид

$$\begin{cases} a_{11}\rho + a_{12}\beta_1\rho + a_{13}\beta_* = b_1, \\ a_{21}\rho + a_{22}\beta_1\rho + a_{23}\beta_* = b_2, \\ a_{31}\rho + a_{32}\beta_1\rho + a_{33}\beta_* = b_3, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$a_{11} = m\sqrt{2T}, \quad a_{12} = \frac{\sqrt{T}e^{-m^2}g(m)}{\sqrt{2\pi}}, \quad a_{13} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$a_{21} = T(2m^2 + 1),$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}e^{-m^2}T \frac{(2m^2 + 1)g(m) - 1}{\sqrt{\pi}m}, \quad a_{23} = -\frac{T_1}{2},$$

$$a_{31} = \sqrt{2T^3}m \left( m^2 + \frac{5}{2} \right),$$

$$a_{32} = e^{-m^2} \sqrt{\frac{T^3}{2\pi}} \left[ \left( m^2 + \frac{5}{2} \right) g(m) - \frac{1}{2} \right],$$

$$a_{33} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{2\pi}} \left[ 2T_1 + \frac{5-3k}{2(k-1)} (T_1 - T) \right],$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad b_2 = \frac{1}{2},$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ 2 + \frac{5-3k}{2(k-1)}(1-T) \right].$$

Здесь  $k$  – показатель адиабаты;  $\operatorname{erfc}(m) = (2/\sqrt{\pi}) \int_m^\infty e^{-t^2} dt$  – дополнительный интеграл вероятности,  $g(m) = 1 - \sqrt{\pi} m \operatorname{erfc}(m) e^{m^2}$ . Уравнения (4) являются линейными относительно  $\rho$ ,  $\beta_1\rho$  и  $\beta_*$ .

Из уравнений (4) после преобразований получаем

$$\rho = \rho T = \frac{T}{\|a\|} (b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})). \quad (5)$$

где  $\|a\|$  – определитель матрицы  $a_{ij}$ .

В решение (5) входит температура  $T_*$ , являющаяся параметром задачи. В работах [3, 4, 10]  $T_*$  задавалась независимо от температуры конденсирующегося потока. Как показывает численный анализ системы (4), при  $T_* < T_\infty$  это приводит к возникновению особенности в решении. В связи с этим в данной работе  $T_*$  выбиралась в виде функции  $T_\infty$  и  $M$  так, чтобы добиться наилучшей аппроксимации результатов, полученных методом прямого статистического моделирования:

$$T_* = \begin{cases} (1.2M + 0.1)T_\infty & \text{при } 0.2 \leq T_\infty/T_s \leq 1, \\ \{[1.2 - 0.415(T_\infty - 1)]M + 0.1\}T_\infty & \\ \text{при } 1 \leq T_\infty/T_s \leq 2, & (6) \\ (0.785M + 0.1)T_\infty & \text{при } 2 \leq T_\infty/T_s \leq 100. \end{cases}$$

### АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты расчетов  $\rho(T)$  методом прямого статистического моделирования при различных значениях  $M$  в температурных диапазонах  $0.2 \leq T \leq 10$  и  $0.2 \leq T \leq 100$  приведены на рис. 1 и 2 соответственно. Рассмотрим влияние температуры на зависимость  $\rho(M, T)$ . Как видно из графиков, при фиксированном числе Маха уменьшение относительной температуры конденсирующегося переохлажденного газа приводит к резкому возрастанию соответствующего относительного давления на внешней границе кнудсеновского слоя. Это особенно заметно при  $M \sim 1$ . Экстраполируя результаты расчетов, можно предположить, что  $\rho(T, M) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow 0$ . С другой стороны, при  $T > 1$  уменьшение относительного давления с увеличением  $T$  быстро замедляется и при  $T = T_{\min}(M)$  функция  $\rho(M = \text{const}, T)$  достигает минимума. В частности,  $T_{\min}(0.3) \approx 1$ ,  $\rho_{\min}(0.3, T_{\min}) = 1.87$  и  $T_{\min}(1) \approx 5$ ,  $\rho_{\min}(1, T_{\min}) = 10.3$ . Наличие минимума в

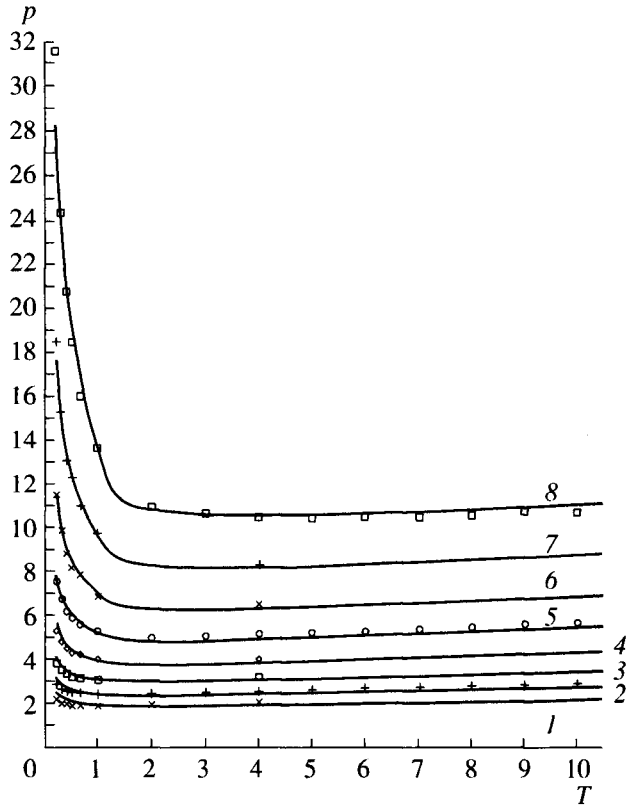


Рис. 1. Зависимости отношения давления газа вне кнудсеновского слоя к давлению насыщенного пара при температуре поверхности от  $T$  при различных числах Маха: 1 –  $M = 0.3$ , 2 – 0.4, 3 – 0.5, 4 – 0.6, 5 – 0.7, 6 – 0.8, 7 – 0.9, 8 – 0.995; точки – прямое статистическое моделирование, сплошные линии – моментный метод.

температурной зависимости  $\rho(M, T)$  в области  $T \sim 1$  означает, что для установления стационарного течения, когда функции распределения молекул, испаренных стенкой (2), и внешнего потока (3) сильно отличаются друг от друга по форме, требуется большее число молекул набегающего потока, чем в случае, когда они близки. В представляющем большой практический интерес диапазоне  $1.5 \leq T \leq 10$  относительное давление  $\rho(M, T)$  слабо зависит от  $T$ .

Рассмотрение структуры течения в кнудсеновском слое показывает, что повышение температуры стенки (понижение температуры конденсирующегося газа) приводит к “разбуханию” кнудсеновского слоя (от  $H \sim 4$  при  $T = 5$ ,  $M = 0.7$  до  $H \sim 20$  при  $T = 0.2$ ,  $M = 0.7$ , где  $H$  – толщина кнудсеновского слоя, нормированная на длину свободного пробега в невозмущенном газе). Этот эффект, очевидно, связан с тепловым расширением, вызванным нагревом конденсирующегося газа молекулами, испаренными стенкой.

На рис. 1 и 2 приведены также зависимости  $\rho(T)$  при различных значениях  $M$ , полученные с

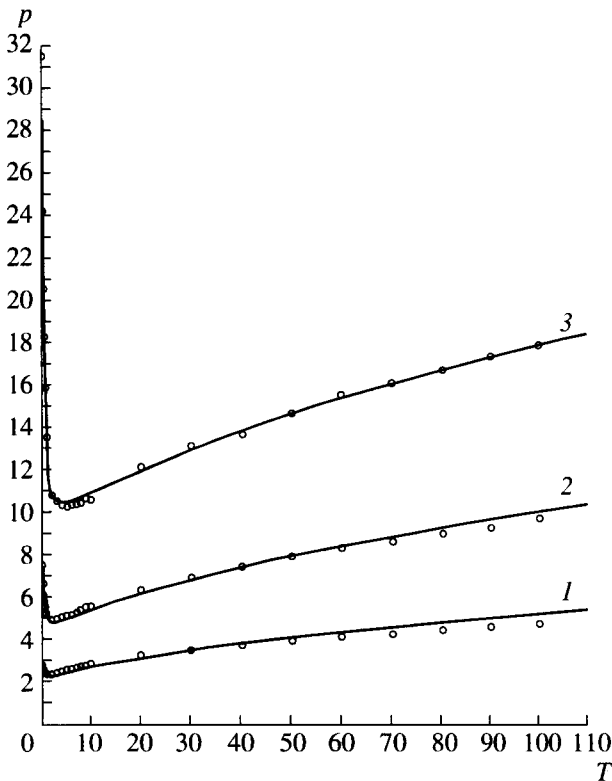


Рис. 2. Зависимости отношения давления газа вне кнудсеновского слоя к давлению насыщенного пара при температуре поверхности от  $T$  при различных числах Маха: 1 –  $M = 0.4$ , 2 –  $0.7$ , 3 –  $0.995$ ; точки – прямое статистическое моделирование, сплошные линии – моментный метод.

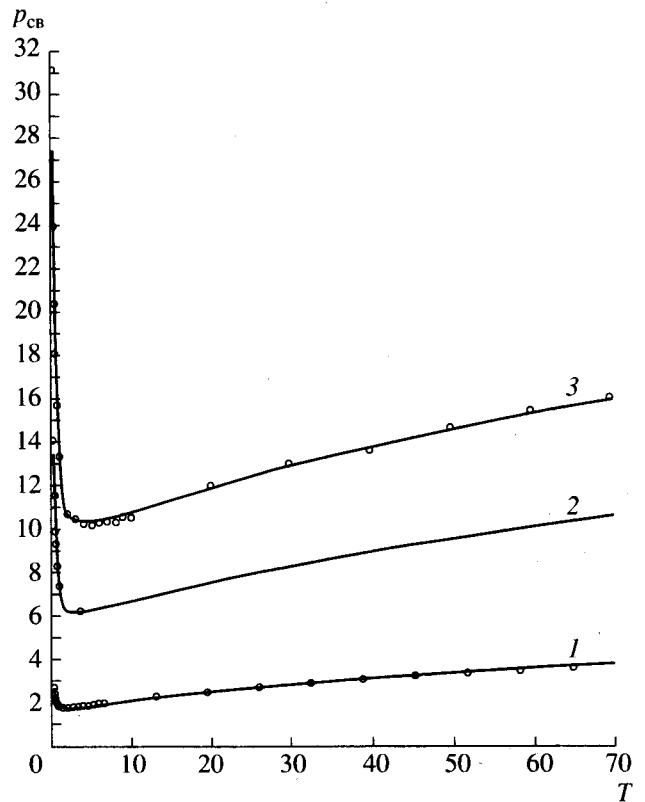


Рис. 3. Зависимости отношения давления газа вне кнудсеновского слоя к давлению насыщенного пара при температуре поверхности от  $T$ , определяющие границы режима сверхзвуковой конденсации при различных числах Маха: 1 –  $M = 1.551$ , 2 –  $1.118$ , 3 –  $1.005$ .

помощью моментного решения (5). Как видно из графиков, выбор зависимости  $T_*(T_\infty, M)$  в виде (6) обеспечивает настолько хорошее совпадение моментного решения (5) с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования в очень широком диапазоне температур и чисел Маха, что позволяет рекомендовать моментное решение в качестве аппроксимации функции  $p(M, T)$ .

Рассмотрим теперь влияние температуры на сверхзвуковую конденсацию газа. При сверхзвуковой конденсации для каждого  $M$  существует предельная зависимость  $p_{св}(M, T)$ , определяющая границу между областью, в которой значения  $p$  и  $T$  на внешней границе кнудсеновского слоя могут быть любыми, и областью параметров, для которых стационарная сверхзвуковая конденсация невозможна. Как показано в [12], зависимость  $p_{св}(M, T)$  может быть получена с помощью функции  $p(M, T)$  и соотношений на скачке уплотнения [13]. На рис. 3 приведены соответствующие кривые  $p_{св}(T)$  для различных  $M$ . Как видно из графиков, зависимость минимального возможного при сверхзвуковой конденсации относительного давления от от-

носительной температуры при фиксированном числе Маха также имеет минимум.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе с помощью метода прямого статистического моделирования исследовано влияние отношения температуры потока к температуре стенки на давление на границе слоя Кнудсена при сильной дозвуковой конденсации одноатомного газа. Полученные результаты показывают, что зависимость относительного давления на границе кнудсеновского слоя от относительной температуры имеет минимум. При этом заметное переохлаждение конденсирующегося газа при  $T < 1$  приводит к резкому возрастанию относительного давления. В то же время зависимость относительного давления от относительной температуры в диапазоне  $1.5 < T < 10$  весьма слабая. Аналогичные результаты получены и для функции  $p_{св}(M, T)$ , определяющей границу области параметров, при которых возможна сверхзвуковая конденсация. Предложенное в данной работе моментное решение хорошо аппроксимирует результаты расчетов методом прямого статистического моделиро-

вания во всем рассмотренном диапазоне температур и чисел Маха.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М.Н., Макашев Н.К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 6. С. 3.
2. Абрамов А.А., Коган М.Н. Сильная дозвуковая конденсация одноатомного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 165.
3. Ytrehus T., Alvestad J.A. A Mott-Smith Solution for Nonlinear Condensation // Proc. 12th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N.Y.: AIAA, 1981. P. 330.
4. Бутковский А.В. Сильная дозвуковая конденсация многоатомного газа // ТВТ. 2005. Т. 43. № 3. С. 601.
5. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
6. Butkovsky A.V., Kogan M.N., Makashev N.K. The Non-Equilibrium Kinetics of Evaporation and Condensation // Proc. 20th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. August. 1996 / Ed. Ching Chen. Beijing, China: Pecking University Press, 1997. P. 912.
7. Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. Ч. I // ЖВМиМФ. 1975. Т. 15. № 5. С. 1195.
8. Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. Ч. II // ЖВМиМФ. 1975. Т. 15. № 6. С. 1553.
9. Абрамов А.А. О вычислении макропараметров в методе прямого статистического моделирования Монте-Карло // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 315.
10. Кузнецова И.А., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Сильная дозвуковая конденсация одноатомного газа с учетом коэффициента испарения // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 2. С. 183.
11. Labunsov D.A., Kryukov A.P. Analysis of Intensive Evaporation and Condensation // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1979. V. 2. № 7. P. 989.
12. Абрамов А.А., Коган М.Н. О режиме сверхзвуковой конденсации газа // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. № 5. С. 1078.
13. Христианович С.А., Гальперин В.Г., Миллиончиков М.Д., Симонов Л.А. Прикладная газовая динамика. М.: ЦАГИ, 1948. 145 с.