АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 10 *1972* *№ 2*

УДК 537.5

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНОВ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОДА В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПЕРЕЗАРЯДКИ

П. П. Щербинин

В полубесконечном пространстве решается модельное кинетическое уравнение для ионов, хорошо описывающее случай, когда основной рассеивающий процесс — резонансная симметричная перезарядка; на электроде задана функция распределения входящих в плазму частиц. Находится точное решение уравнения, если поле отсутствует, и приближенное, если поле существенно. Определена скорость релаксации этого решения к асимптотической форме. Получены граничные условия для уравнения диффузии ионов, учитывающие проникающее в плазму поле; найдены функция распределения, величина электрического поля и декомпенсация пространственного заряда на границе лэнгмюровский слой — плазма.

1. Представление интеграла столкновений в случае резонансной симметричной перезарядки. Основной процесс рассеяния ионов в слабоионизованной низкотемпературной плазме — их рассеяние на атомах [1]. Если в процессе рассеяния участвуют ионы и атомы одного и того же газа, то при малой доле возбужденных атомов наиболее существенным является процесс резонансной симметричной перезарядки, сечение которого изучено экспериментально [2, 3] и теоретически [1, 2, 4]. В процессе рассеяния ион, получая электрон от атома и становясь атомом, и атом, превращаясь в ион, сохраняют направление своего движения и энергию (энергия поступательного движения орбитального электрона не учитывается). Интеграл парных столкновений $\mathrm{St}(f_i, f_a)$ (i — ионы, a — атомы) для этого процесса записывается в следующем виде [5, 6]:

$$\mathrm{St}(f_i, f_a) = \int d\mathbf{v}_1 [f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1)] \, |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \, \sigma(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|). \tag{1}$$

Здесь $f_k(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ — функция распределения; σ — сечение рассеяния. В такой форме интеграл столкновений использован в [5, 6] при определении подвижности ионов, причем получены точные результаты в случаях сильного и слабого электрических полей.

Выражение (1) можно упростить, воспользовавшись слабой зависимостью функции $\gamma = z\sigma(z)$ от z, вынося ее за знак интеграла в (1) в некоторой точке z_k. Для определения z_k моделируем функции $f_{i,a}$ локально-максвелловскими [7]

$$f_k(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n_k(\mathbf{x}) \exp[-(\mathbf{v} - \mathbf{c}_k)^2 / v_k^2] / (\pi^{3/2} v_k^3);$$

$$n_k = \int d\mathbf{v} f_k, \quad \mathbf{c}_k = \int d\mathbf{v}\mathbf{v} f_k / n_k; \quad v_k = \sqrt{2T_k/m_k}; \quad T_k = T_k(x).$$

Переходя к новой переменной $\mathbf{t}_k = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) / v_k$ в (1) и производя интегрирование по углам для каждого слагаемого правой части (1), получим

выражение

$$n_k/(\pi^{1/2}\alpha_k)\int_0^\infty dt\beta_k(t)\gamma(v_k t),$$

где

$$\beta_k = t[\exp(-(t-\alpha_k)^2) - \exp(-(t+\alpha_k)^2)],$$
$$\alpha_k = |\mathbf{v}-\mathbf{c}_k| / v_k.$$

Функция $\beta_k(t)$ имеет максимум в точке t_k, определяемой уравнением

$$(1-2t_k^2-2\alpha_k t_k)/(1-2t_k^2+2\alpha_k t_k) = \exp(4\alpha_k t_k), \qquad (2)$$

и затухает экспоненциально на расстояниях порядка $|t-t_k| \simeq 1$.

При описании функции распределения наиболее существенна область вблизи $\mathbf{c}_k$ порядка нескольких v_k, что соответствует интервалу изменения α_k от нуля до нескольких единиц. Для t_k из (2) получаем $t_k = 1$, если $\alpha_k \ll 1$, и $t_k \simeq \alpha_k$, если $\alpha_k \gg 1$.

Сечение резонансной перезарядки σ в области энергий до нескольких десятков электрон-вольт определяется выражением $\sigma = (48 - \lg(E/A))^2/U_i$ (E — энергия, *эв*; A — атомный вес; U_i — потенциал ионизации) [1, 4], и $\sigma \sim E^{-6}$ для $E \gtrsim 100$ *эв*. В низкотемпературной плазме основная масса ионов имеет энергию менее 1 *эв*. В этой области функция γ монотонно возрастает, а функция β_k имеет резко выраженный максимум. Вынося функцию γ в точке $t = t_k$ в каждом слагаемом в (1) за знак интеграла, получим

$$\mathrm{St}(f_i, f_a) = \gamma(v_i t_i) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) n_i - \gamma(v_a t_a) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) n_a.$$

Разлагая $\gamma(v_i t_i)$ в окрестности T_a, $\mathbf{c}_a$ в ряд Тейлора, а $\gamma(v_a t_a)$ — в окрестности $\mathbf{c}_i$ и оставляя лишь первый член разложения, получаем

$$\mathrm{St}(f_i, f_a) = (n_i f_a / n_a - f_i) / \tau, \qquad (3)$$
$$(\tau = \tau(x) = [n_a \gamma(v_a t_{ia})]^{-1}, \quad t_{ia} = t_a(\alpha_{ic}),$$
$$\alpha_{ia} = |\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_a| / v_a, \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{c}_k(\mathbf{x})).$$

Легко проверить, что интеграл столкновений (3) сохраняет лишь число частиц (импульс и энергия не сохраняются, что соответствует физике процесса), а кинетическое уравнение с интегралом столкновений (3) удовлетворяется максвелловской функцией с температурой $T_i = T_a$.

Выражение (3) по форме совпадает с предложенным в [8] модельным интегралом столкновений. В отличие от [8] при выводе (3) использована специфика сечения резонансной перезарядки, кроме того, указан способ определения величины τ.

Эффективность модели. Определим скорость дрейфа ионов в собственном газе (однородная задача). Частицы описываются уравнением

$$eE_x / M \partial f_i / \partial v_x = [f(\mathbf{v}) n_i - f_i] / \tau,$$
$$(f(\mathbf{v}) = \exp[-(\mathbf{v}/v_a)^2]/(\pi^{3/2} v_a^3), \quad T_a = T, \quad m_k = M),$$

которое решается точно. Для скорости дрейфа $\mathbf{c} = \{c, 0, 0\}$ получаем выражение

$$c = \tau e E / M \quad (E \equiv E_x > 0), \qquad (4)$$

которое совместно с уравнением (2) определяет скорость дрейфа в произвольных по величине полях.

В предельных случаях слабого ($eE \ll M v_a^2/2$, $t_{ia} = 1$) и сильного ($eE \gg M v_a^2/2$, $t_{ia} \simeq \alpha_{ia}$) поля получаем $c = eE / [\sqrt{2MT}\, n_a \sigma(v_a)] = (0{,}341 \cdot \sqrt{2})^{-1} c_0$ и $c = [eE / \sqrt{2MT} n_a \sigma(c)]^{1/2} = \sqrt{2/\pi}\, c_0$ (c_0 — точное значение (5, 6, 9]) соответственно.

2. Общее решение кинетического уравнения. Кинетическое уравнение (одномерная задача, функция f проинтегрирована по v_y, v_z)

$$u\partial f / \partial\xi + \alpha E\partial f / \partial u = f - nf_0$$
$$(u = -v_x / v_a, \quad \xi = x / l_i, \quad l_i = \tau v_a = \text{const}, \tag{5}$$
$$f_0 = \exp(-u^2) / \sqrt{\pi}, \quad \alpha = el_i / (2T))$$

анализировалось в работах [10—12] в следующих предположениях. Считалось, что источник ионов, расположенный справа, находится на расстоянии нескольких длин свободного пробега от электрода, помещенного в $x = 0$, и его можно удалить в $x = \infty$, наложив при этом на асимптотику $n(x)$ условие алгебраического роста. Предполагалось, что поверхностная ионизация отсутствует; электроны описывались барометрической формулой.

Построим решение уравнения (5) считая, что в $x = 0$ задана функция распределения входящих частиц $f(-u)$, $u > 0$ и учтем электронный ток, проходящий через плазму.

Метод решения уравнения (5). Решим уравнение (5) считая, что слагаемое с полем — известная функция (неоднородный член), а затем проанализируем его вклад в решение. Далее показано, что для функций n и E имеет место асимптотика ($\xi \to \infty$) $n \sim n_{ac}'(\xi + b)$, $E \sim -a / (\xi + b)$,

$$\Big(b = \frac{n_{пл}(T_e + T)}{2\bar{u}T(1-\varepsilon)}, \quad J_i = -v_a\bar{u}, \quad n_{ac}' = \frac{Mv_a|J_i|(1-\varepsilon)}{T + T_e},$$
$$m = m_e, \quad a = \frac{T}{el_i}\frac{1 + \varepsilon T/T_e}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{m\tau J_e}{M\tau_e|J_i|},$$
$$J_k = \int dv_x v_x f_k = \text{const}\Big).$$

Тогда в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ комплексного переменного k существуют фурье-образы ($A_k = \int\limits^{\infty} d\xi A \exp(ik\xi)$) функций $f(\xi, u)$, $n(\xi)$, $\alpha E\partial f / \partial u$, причем $f_k = f_k(u)$, $n_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} du f_k$, $g_k = g_k(u)$, $g_k = (\alpha E\partial f / \partial u)_k$, и фурье-образ уравнения (5). Разрешая последний относительно функции $f_k(u)$, получаем

$$f_k(u) = [n_k f_0(u) - uf(u) + g_k(u)] / (1 + iku)$$
$$(f(u) \equiv f(0, u)) \tag{6}$$

и так как $f_k(u)$ — аналитическая функция в $\operatorname{Im} k > 0$, то из (6) следует

$$n_k f_0(u) = uf(u) - g_k(u), \quad k = i / u, \quad u > 0. \tag{7}$$

Аналитическое продолжение выражения (7) на область вне луча $(0, i\infty)$ определяет фурье-образ функции $n(\xi)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ и его аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im} k \leqslant 0$ [13]

$$n_k f_0(i / k) = if(i / k) / k - g_k(i / k). \tag{8}$$

Получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $f(u)$, $u > 0$. Интегрируя выражение (6) по u и исключая n_k, с помощью (7) получаем ($\eta = i/k$)

$$\Lambda(\eta) f(\eta) = f_0(\eta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt\, tf(t)}{t - \eta} + g(\eta), \tag{9}$$

$$\left(\Lambda(\eta)=1+\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt\,f_0}{t-\eta},\qquad \Lambda^{\pm}=\lambda(u)\pm\pi i u f_0(u),\quad \lambda(u)=\right.$$

$$=1+uP\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt\,f_0}{t-u},\qquad g(\eta)=g_{i/\eta}(\eta)\Lambda(\eta)/\eta-f_0(\eta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt\,g_{i/\eta}(t)}{t-\eta}.$$

Функция $\Lambda(\eta)$ введена и изучена в [10], функция $g(\eta)$, как легко проверить, аналитична в $\operatorname{Re}\eta>0$, $\Lambda^{\pm}$ — предельные значения функции $\Lambda(\eta)$ на линии разреза $(-\infty,\infty)$ сверху и снизу соответственно, P — символ главного значения.

Соотношение (9) на луче $(0,\infty)$ переходит в неоднородное сингулярное интегральное уравнение относительно функции $f(u)$

$$\lambda(u)f(u)=f_0(u)P\int\limits_0^{\infty}\frac{dt\,tf(t)}{t-u}+f_0(u)\int\limits_0^{\infty}\frac{dt\,tf(-t)}{t+u}+g(u). \qquad (10)$$

Уравнение (9) решается обычным образом путем сведения его к неоднородной задаче Римана [14, 15]. В результате получаем

$$f(\eta)=\frac{1}{\Lambda(\eta)}\left[f_0X(\eta)\left(\int\limits_0^{\infty}dt\,tf+\int\limits_0^{\infty}\frac{dt\,tg_1(t)}{(t-\eta)X^+\Lambda^-}\right)+g_1(\eta)\right]. \qquad (11)$$

Здесь $g_1(t)$ — неоднородный член в уравнении (10), функция

$$X(\eta)=-\frac{1}{\eta}\exp\left[-\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{t-\eta}\left(1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\pi}t\exp(-t^2)}{\lambda}\right)\right] \qquad (12)$$

— аналитическая вне луча $(0,\infty)$ была введена и изучена в [10] и связана с функцией $\Lambda(\eta)$ следующим соотношением [10]:

$$X(\eta)X(-\eta)=2\Lambda(\eta). \qquad (13)$$

Укажем ряд соотношений для функции $X(\eta)$. Полагая $g_1\equiv 0$, из (10) и (11) получаем

$$X(\eta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{dt\,tf_0}{t-\eta}\frac{X^+}{\Lambda^+}. \qquad (14)$$

Переходя в уравнении (10) к плотности $f(t)$, решая его и сравнивая решение с (11), получаем ($g_1\equiv 0$)

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dt\,f_0}{(t-\eta)X^+\Lambda^-}=\frac{1}{\eta}\left[\frac{1}{X(0)}-\frac{1}{X(\eta)}\right]-1. \qquad (15)$$

Выражение для f с помощью (14), (15) можно упростить [15]

$$f(\eta)=[f_0X(\eta)F(\eta)+g(\eta)]\,/\,\Lambda(\eta), \qquad (16)$$

$$F=\bar{u}+p(\eta)+h(\eta),\quad p=\int\limits_0^{\infty}\frac{dt\,tf(-t)}{(t+\eta)X^+\Lambda^-},\quad h=\int\limits_0^{\infty}\frac{dt\,tg(t)}{(t-\eta)X^+\Lambda^-}. \qquad (17)$$

Легко проверить, что функция (16) аналитична в $\operatorname{Re}\eta>0$.

Найдем выражения для первых моментов функции $f(t)$. Исключая из (9) и (16) функцию $f(\eta)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt\,tf(t)}{t-\eta}=X(\eta)F(\eta). \tag{18}$$

При больших η для $X(\eta)$ имеет место разложение

$$X(\eta)=-[1+l_0/\eta+(l_1+l_0^2/2)/\eta^2+(l_2+l_1l_0+l_0^3)/\eta^3+O(\eta^{-4})]/\eta, \tag{19}$$

$$\left(l_k=\int_0^{\infty}dt\,t^k(1-\operatorname{arc\,tg}(\pi tf_0/\lambda)/\pi),\quad l_0=1{,}016,\right.$$

$$\left.l_1=0{,}749,\quad l_2=0{,}886\right).$$

Тогда из (13) следует

$$\Lambda(\eta)=-[1+2l_1/\eta^2+O(\eta^{-4})]/(2\eta^2). \tag{20}$$

Выражения (18), (19) позволяют определить моменты функции $f(u)$

$$n(0)\equiv\overline{u_0}=X(0)(\bar u+p_0+h_0)\left(\overline{u^k}=\int_{-\infty}^{\infty}du\,u^kf(u)\right), \tag{21}$$

$$\overline{u^2}=l_0\bar u+p_1-h_1\qquad\left(p_k=\int_0^{\infty}dt\,t^kf(-t)/X(-t)\right), \tag{22}$$

$$\overline{u^3}=(l_1+l_0^2/2)\bar u+l_0(p_1-h_1)-p_2-h_2\quad\left(h_k=\int_0^{\infty}\frac{dt\,t^kg(t)}{X^+\Lambda^-}\right). \tag{23}$$

Поскольку функция $f(\eta)$ определена, а тем самым определены и фурье-образы n_k и $f_k(u)$, то производя обратное фурье-преобразование, можно найти функции $n(\xi)$ и $f(\xi, u)$. Аналитические свойства слагаемых, определяющих n_k и $f_k(u)$, кроме содержащих функцию g_k, известны [10, 11]: они аналитичны везде, кроме линии разреза $(0, -i\infty)$. Предположим, что члены с g_k не имеют иных, кроме указанной, особенностей. Используя соотношения для функций X и Λ, получаем

$$n(\xi)=n'_{\text{ас}}\xi+n_{\text{пл}}-n_r(\xi), \tag{24}$$

$$n_r=\int_0^{\infty}dtH(t)\exp\left(-\frac{\xi}{t}\right),\qquad H=\frac{2f_0F_1}{X^+\Lambda^-}-$$

$$-\frac{\lambda f(-t)}{\Lambda^+\Lambda^-}-\frac{i}{2\pi t}(K^+-K^-), \tag{25}$$

$$\left(F_1=\bar u+Pp(-t)+h(-t),\quad K(\eta)=\frac{1}{\Lambda(\eta)}\int_{-\infty}\frac{dxg_{-i/\eta}(x)}{x+\eta}\right),$$

$$n_{\text{пл}}=2\left[\bar ul_0+p_1-h_1+\alpha\int_0^{\infty}d\xi(En+an_{\text{ас}}')\right], \tag{26}$$

$$f(\xi,u)=f_{\text{ас}}(\xi,u)-f_r(\xi,u),\qquad f_{\text{ас}}=(n_{\text{ас}}'\xi+n_{\text{пл}}+2\bar uu)f_0, \tag{27}$$

$$f_r(\xi, u) = f_0 P \int_0^\infty \frac{dt\, tH \exp(-\xi/t)}{t+u} + \frac{i}{2\pi} P \int_0^\infty \frac{dt \exp(-\xi/t)}{t(t+u)} \times$$

$$\times [g^+_{-i/t}(u) - g^-_{-i/t}(u)] - \theta(-u) \exp\left(\frac{\xi}{u}\right) \Big\{ f(u) - f_0 \Big[\frac{\lambda X F_1}{\Lambda^+ \Lambda^-} +$$

$$+ \frac{\pi^2 u^2 f_0 f(u)}{\Lambda^+ \Lambda^-} - \frac{1}{2}(K^+(-u) + K^-(-u)) \Big] -$$

$$- \frac{1}{2u}[g^+_{i/u}(u) + g^-_{i/u}(u)] \Big\}. \qquad (28)$$

Здесь $K^\mp$, $g_k^\pm$ — предельные значения функций K и g_k со стороны $\mathrm{Re}\, k > 0$ и $\mathrm{Re}\, k < 0$ соответственно. Функция $f(\xi, u)$, определяемая соотношениями (27), (28), в $\xi = 0$ совпадает при $u > 0$ с (16), а при $u < 0$ — с $f(u)$, что можно проверить, используя выражения для функций X и Λ, а также формулу Пуанкаре — Бертрана [14].

Поведение $n(\xi)$ вблизи $\xi = 0$. Используя тауберовы теоремы [16] при $t \to 0$ $(k \to \infty)$, получаем

$$-\frac{i}{2\pi}(K^+ - K^-) = \frac{1}{2}[g^-_{-i/t}(-t) + g^+_{-i/t}(-t) + o(t)] =$$

$$= t\alpha E(0) \frac{\partial f(0, -0)}{\partial t} + O(t^2).$$

Тогда величина H в $t = 0$ принимает значение

$$H(0) = 2f_0(0) F_1(+0) / X(0) - f(-0) + \alpha E(0) \partial f(0, -0) / \partial t.$$

Определяя $F_1(+0)$ из (16) получаем

$$H(0) = f(-0) - \alpha E(0) \partial f(0, +0) / \partial t - f(-0) + \alpha E(0) \partial f(0, -0) / \partial t. \quad (29)$$

Таким образом, если $H(0) = 0$, то $n'(\xi)$ конечна в $\xi = 0$, если $H(0) \neq 0$, то при $\xi \to 0$

$$n_r'(\xi) \sim -H(0) \int_0^1 dt \exp(-\xi/t)/t + \mathrm{const} \sim H(0) \ln \xi. \qquad (30)$$

В частности, если $g_1 \equiv 0$, то $H(0) \neq 0$ [11].

Поведение $n_r(\xi)$ при $\xi \to \infty$. Используя (19), (21) и тауберовы теоремы [16] для n_{r0}, n_{r2} ($n_r = n_{r0} + n_{r2}$, где индекс 2 указывает на то, что в выражении удержаны члены, содержащие поле, индекс 0 — что удержаны члены без поля), получаем

$$n_{r0} \sim \xi \mathrm{Ei}(-\xi) + \exp(-\xi), \qquad (31)$$

$$n_{r2} \simeq 2\bar{u}\alpha a (4l_1 - 1) / (\xi + b). \qquad (32)$$

Члены n_{r2} и f_2 в диффузионном приближении. Подставим в n_{r2} и f_2 вместо f ее выражение $f = f_{ac} - f_r$. Опуская члены, содержащие f_r, получаем $(E = -a / (\xi + b))$;

$$g(\eta) = 2\bar{u}\alpha f_0 E_{i/\eta} / \eta, \quad E_k = a \exp(-ikb) \mathrm{Ei}(ikb), \qquad (33)$$

$$H_2 = 2\bar{u}\alpha \Big[\frac{2f_0}{X^+\Lambda^-} \int_0^\infty \frac{dy\, f_0 E_{i/y}}{(y+t) X^+ \Lambda^-} + \frac{atf_0}{\Lambda^+\Lambda^-} P \int_0^\infty \frac{dy \exp(-b/y)}{y(y-t)} +$$

$$+ \frac{a \exp(-b/t)}{t^2} \left(\frac{\lambda}{\Lambda^+\Lambda^-} + 2t^2 - 1 \right) \Big] \qquad (34)$$

$$f(u)=\frac{f_0X^+}{\Lambda^+}\left[\bar{u}\left(1+2\alpha\left(\frac{\lambda E_{i/u}}{uX^+\Lambda^-}+P\int_0^\infty\frac{dtf_0E_{i/t}}{(t-u)X^+\Lambda^-}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\frac{dt\,tf(-t)}{(t+u)X(-t)}\right], \tag{35}$$

$$f(u)\sim 2f_0\bar{u}(u+l_0)(1+2\alpha a\ln(u/(\gamma b))),\quad u\to\infty, \tag{36}$$

$$f_{r2}=f_0P\int_0^\infty\frac{dt\,tH_2\exp(-\xi/t)}{t+u}+2\alpha a\bar{u}f_0(1-2u^2)\times$$

$$\times P\int_0^\infty\frac{dt\exp(-(\xi+b)/t)}{t(t+u)}+\theta(-u)\exp\left(\frac{\xi}{u}\right)\left[\frac{f_0\lambda Xh(-u)}{\Lambda^+\Lambda^-}-\right.$$

$$\left.-\frac{2a\alpha\bar{u}f_0}{\Lambda^+\Lambda^-}\left(\lambda P\int_0^\infty\frac{dt\exp(-b/t)}{t(t+u)}-\pi^2f_0\exp(b/u)(2(1-u^2)\lambda-1)\right)\right]. \tag{37}$$

Здесь γ — постоянная Эйлера.

3. Электрическое поле в плазме. Электрическое поле, входящее в уравнение (5), определим следующим образом. Вдали от электрода поле хорошо описывается квазинейтральным приближением, определяемым уравнениями ($p=e, i$, $(AB)_p=A_pB_p$)

$$\pm eEn_p+T_p\cdot n_p'=-(mJ/\tau)_p, \tag{38}$$

$$n_e=n_i. \tag{39}$$

Вблизи электрода начинает сказываться декомпенсация пространственного заряда [17] и вместо уравнения (39) необходимо использовать уравнение Пуассона

$$dE/dx=4\pi e(n_i-n_e). \tag{40}$$

Кроме того, при описании поля вблизи электрода, как правило, существенны кинетические эффекты. Исследуем систему уравнений (38), (39) полагая, что она имеет место всюду в $x\geqslant 0$. Таким образом, в результате ее решения получим достаточно точное выражение для поля там, где кинетические эффекты малы и качественное — в области заметного вклада кинетических эффектов.

Анализ системы уравнений (38), (39). Уравнения (38), (39) допускают первый интеграл и с его помощью получаем выражение для n_p

$$n_{e,i}(\xi)=n_{\text{ас}}'\xi+n_{\text{пл}}\mp T_{i,e}E'/(4\pi e(T_i+T_e))$$

и уравнение, определяющее поле

$$W''=\alpha_2WW'+2W^3+zW+\alpha_1. \tag{41}$$

Здесь $n_{\text{пл}}$ — произвольная постоянная, $T_i\equiv T$,

$$E=2[(T_iT_e)^{1/2}4\pi B/e]^{1/3}W,\quad W=W(z),\ z=z'x+z_1,$$

$$z_1=(T_i+T_e)n_{\text{пл}}\left(\frac{4\pi e^2}{T_eT_iB^2}\right)^{1/3},\quad z'=\left(\frac{4\pi e^2B}{T_eT_i}\right)^{1/3},$$

$$\alpha_1=(T_eT_i)^{1/2}\frac{A}{2B},\quad \alpha_2=2\frac{T_e-T_i}{(T_eT_i)^{1/2}},\quad A=\left(\frac{mJ}{T\tau}\right)_e-\left(\frac{mJ}{T\tau}\right)_i$$

$$B=(T_i+T_e)n_{\text{ас}}'.$$

Уравнение (41) совместно с условием

$$W \to 0, \quad z \to \infty \tag{42}$$

— аналог (в плоской геометрии для различных температур и отличных от нуля потоков частиц) нелинейного уравнения в задаче Дебая — Хюккеля об экранировании потенциала иона, помещенного в электролит [18]. В случае $\alpha_1 = 0$ известно его точное решение, в случае $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ оно представляет собой второе уравнение Пенлеве, для которого известен ряд точных частных решений [21].

В случае плазмы с током $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ уравнение (41) не изучалось. Непосредственной подстановкой легко проверить, что уравнение (41) формально удовлетворяется степенным рядом

$$W_{\text{ас}} = -\alpha_1/z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n/z^{3n+1}, \tag{43}$$

дающим асимптотическое поведение решения уравнения (41), причем коэффициенты c_n однозначно определяются через $\alpha_{1,2}$. Таким образом, ряд (43), если он сходится, является точным частным решением уравнения (41). Будем искать общее решение уравнения (41) в следующем виде: $W = W_{\text{ас}} + W_1$. Линеаризуя уравнение (41) относительно величины W_1 и удерживая в (43) лишь главный член — α_1 / z, получаем линейное уравнение, решение которого известно. В результате имеем

$$W = -\frac{\alpha_1}{z} + W_1(z_1)\left(\frac{z}{z_1}\right)^{(1-\alpha_1\alpha_2)/2} \frac{K_\mu(y)}{K_\mu(y_1)}. \tag{44}$$

Здесь $W_1(z_1)$ — произвольная постоянная, $\mu = [(1 + \alpha_1\alpha_3)^2 + 24\alpha_1^2]^{1/2} / 3$, $y = 2z^{3/2} / 3$. На больших расстояниях функция K_μ убывает, если

$$x_n \ll (T_e + T_i) n_{\text{пл}} / B, \tag{45}$$

как $\exp(-x / x_0)$, где $x_n = (T_e T_i / (4\pi e^2 n_{\text{пл}}(T_e + T_i)))^{1/2}$ и существенно быстрее (как $\exp[-(y - y_1)]$) в противном случае. В частном случае $T_i \simeq T_e$, $N \simeq 1/2$, $\varepsilon \ll 1$ правая часть (45) близка к l_i и при $x_0 \gg l_i$ получаем, что электрическое поле достигает своей асимптотики на меньших нежели x_0, расстояниях.

В случае $2\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - 2 = 0$, что соответствует интересному для приложений случаю [19] $T_e = 2T_i$ при $AT_i = B$, сумма в (43) тождественно равна нулю и выражение $W = -\alpha_1 / z$ — точное решение уравнения (41). Таким образом, получаем, что в выражении (44) первый член описывает не только квазинейтральное поле, но и декомпенсацию пространственного заряда. Второй же член, поскольку асимптотика $W = -\alpha_1 / z$ учитывает декомпенсацию заряда, описывает релаксацию к асимптотике приэлектродных возмущений, а не релаксацию решения, описывающего декомпенсацию заряда к асимптотике, ее не учитывающей.

Чтобы выражение для поля было замкнутым, необходимо определить величину $n_{\text{пл}}$, что является традиционной задачей кинетической теории [20]; ранее для $n_{\text{пл}}$ было получено выражение (26).

4. Граничные условия для уравнения диффузии ионов и электрическое поле на границе лэнгмюровский слой — плазма (случай $x_0 \ll l_i$). Вычислим моменты функции f, определенные в (21) — (23) на границе лэнгмюровский слой — плазма. Поместим в эту точку начало координат, считая, что в слое столкновений нет ($\xi_0 \ll 1$, ξ_0 — толщина слоя). Запишем функцию $f(-u)$ в следующем виде ($u > 0$):

$$f(-u) = 2\sqrt{\pi} J_c f_0(u) \exp(-e\Delta\varphi / T) / v_a. \tag{46}$$

Здесь J_c — ток поверхностной ионизации, температура катода принята равной температуре атомов; $\Delta\varphi > 0$ — падение потенциала в лэнгмюровском слое. Следуя п. 3 электрическое поле в плазме запишем в следующем виде:

$$E = -a / (\xi + b_0) \qquad (b_0 = b + \xi_0). \tag{47}$$

Соотношения (21) — (23) дают точные граничные условия в случае $E \equiv 0$. Если $E \not\equiv 0$, то в этих соотношениях необходимо вычислить величины h_k. Подставим в выражение для последних $g(\eta)$, $f(-u)$, E из (33), (46), (47); в результате получим

$$h_k \sim \int_0^\infty d\xi E(\xi) R_k(\xi) \left(R_k = \int_0^\infty \frac{dt\, t^k f_0 \exp(-\xi/t)}{tX^+\Lambda^-}\right). \tag{48}$$

Правая часть соотношений (48) описывает интегральное влияние поля на локальные характеристики функции распределения. Используя тауберовы теоремы [16], получаем

$$R_k \sim \exp(-\xi) / \xi, \qquad \xi \to \infty.$$

В $\xi = 0$ функция $R_0(\xi)$ логарифмически расходится, а функции R_1 и R_2 быстро убывают: $\sqrt{2\pi} R_1(0) = 0{,}77$, $\sqrt{2\pi} R_1(1) = 0{,}18$. Следовательно, в правой части (48) функцию $E(\xi)$, поскольку она убывает существенно медленнее, нежели R_k (из (21) следует $b > 1$ при $E \equiv 0$), можно вынести за знак интеграла. В результате из соотношений (21) — (23) получаем

$$|J_i| = \frac{\sqrt{2\pi}}{1 - k_0\lambda N}\left[\frac{n(0)v}{4} - J_c \exp\left(-\frac{e\Delta\varphi}{T}\right)\right], \tag{49}$$

$$Q_0(0) \equiv \frac{Mv_a^2}{2}\frac{\bar{u}^2}{n(0)} = \frac{T}{2NX(0)(1 + p_0/\bar{u} - k_0\lambda N)}, \tag{50}$$

$$Q \equiv \int d\mathbf{v}\left(\frac{M\mathbf{v}^2}{2} + e\Delta\varphi\right) v_x f = \frac{Mv_a^3}{2}\overline{u^3} + (T + e\Delta\varphi) v_a \bar{u}, \tag{51}$$

$$Q_1 \equiv \frac{1}{J_i}\int d\mathbf{v} v_x \frac{M\mathbf{v}^2}{2} f = T[1 + l_1 + l_0^2/2 + (l_0 p_1 - p_2)/\bar{u} + (l_0 k_1 + k_2)\lambda N]. \tag{52}$$

Здесь $k_n = \int_0^\infty d\xi R_n$, $N = \bar{u}/n_{\text{пл}}$, $\lambda = 2T_e(1 + \varepsilon T/T_e)/(T + T_e)$, $v = \sqrt{\frac{8T}{\pi M}}$,

$$p_k = \frac{\sqrt{\pi} a_k}{v_a} J_c \exp\left(-\frac{e\Delta\varphi}{T}\right), \quad a_k = \int_0^\infty dt\, t^k f_0 \frac{X^+}{\Lambda^+}.$$

Величина N определяется выражением

$$N = \frac{(l_0 + p_1/\bar{u})(T + T_e)}{4k_1 T_e(1 + \varepsilon T/T_e)}\left[\sqrt{1 + \frac{4k_1 T_e(1 + \varepsilon T/T_e)}{(l_0 + p_1/\bar{u})^2 (T + T_e)}} - 1\right], \tag{53}$$

следующим из (26). При получении (49) — (43), поскольку $b \simeq 1$, принималось $b_0 = b$. Величины k_n и a_n вычисляются с помощью (14), (15), (19) и равны: $k_0 = l_0 - 1/X(0) = 0{,}309$, $k_1 = l_1 - l_0/2 = 0{,}233$, $k_2 = l_0^3/6 + l_2 - l_0 l_1 = 0{,}274$, $a_0 = \sqrt{2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = l_0$. Зная N можно определить поле на границе лэнгмюровский слой — плазма (выражение (47)) и подставляя его в уравнение (40) находим декомпенсацию пространственного заряда.

Очевидно, что отличие граничных условий (49), (51) от известных в [19] связано с тем, что при получении последних используются либо один (нулевой), либо два (нулевой и первый) члена разложения функции распределения.

Частные случаи. Пусть $T_e \simeq 2T_i$, а поверхностной ионизацией и величиной ε можно пренебречь. В этом случае ток ионов J_i, средняя кинетическая энергия иона $Q_0(0)$ и энергия, выносимая из плазмы одним ионом, Q_1 равны $\sqrt{2\pi}n(0)v/3{,}5$, $1{,}01\ T$, $2{,}47\ T$ вместо $n(0)\ v/4$, $T/2$ и $2\ T$ в случае максвелловского распределения соответственно. Для поля на границе слой — плазма получаем $E(0) = -0{,}58\ T_e/(el_i)$, падение потенциала в плазме за лэнгмюровским слоем на первой длине пробега равно $0{,}65\ T$.

5. Точность результатов. При получении (33) — (37) использовался метод итераций, причем за пробную функцию бралась функция f_{ac}. Подставляя в h_k функцию f_{r2} из (37) получаем $h_k = -2\bar{u}\omega(a_{k1} - a_{k2}\omega)$, $a_{01} = 0{,}336$, $a_{02} = 0{,}117$, $a_{21} = 0{,}248$, $a_{12} = 0{,}055$, $a_{21} = 0{,}286$, $a_{22} = 0{,}049$, $\omega = \alpha a/b \equiv \alpha|E(0)|$. Величина ω, как это следует из (53), меняется от $0{,}4\,T_e/T_i$ при $T_e \ll T_i$ до 0,5 при $T_e \gg T_i$. Таким образом, уже первая итерация дает достаточно точные выражения для искомых величин.

Физико-энергетический институт

Поступила в редакцию 17 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Мотт, Г. Месси. Теория атомных столкновений, 1969.
2. Б. М. Смирнов. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. Атомиздат, 1968.
3. Б. М. Палюх, Л. С. Савчин. Теплофизика высоких температур, 6, № 4, 1968.
4. Ю. Н. Демков. Уч. зап. ЛГУ, № 146, 74, 1952.
5. В. И. Перель. Ж. эксперим. и теор. физ., 32, № 3, 1957.
6. Б. М. Смирнов. Ж. техн. физ., 36, № 10, 1966.
7. С. И. Брагинский. В сб. Вопросы теории плазмы, вып. 1, 183, 1963.
8. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, H. Krook. Phys. Rev., 94, 511, 1954.
9. Ю. М. Каган, В. И. Перель. Докл. АН СССР, 98, 4, 1954.
10. И. П. Стаханов, П. П. Щербинин. ПМТФ, № 3, 47, 1969.
11. И. П. Стаханов, П. П. Щербинин. ПМТФ, № 2, 4, 1970.
12. И. П. Стаханов, П. П. Щербинин. Докл. АН СССР, 185, 2, 1969.
13. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, 1958.
14. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, 1958.
15. И. П. Стаханов, П. П. Щербинин. Ж. техн. физ., 39, № 2, 306, 1969.
16. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2, 1967.
17. Ф. Г. Бакшт, Б. Я. Мойжес, В. А. Немчинский. Ж. техн. физ., 39, № 3, 1969.
18. P. Debye, E. Huckel. Phys. Zeit., 24, 190, 1923.
19. И. П. Стаханов, А. С. Степанов, В. П. Пащенко, Ю. К. Гуськов. Плазменное термоэмиссионное преобразование энергии. Атомиздат, 1968.
20. Б. Дэвисон. Теория переноса нейтронов. Атомиздат, 1960.
21. А. П. Воробьев. Дифференциальные уравнения, 1, 1, 79, 1965.