

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Осреднение пластин Кирхгофа, соединенных заклепками, которые моделируются точечными условиями Соболева, *Алгебра и анализ*, 2020, том 32, выпуск 2, 143–200

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

26 марта 2025 г., 15:10:14



## ОСРЕДНЕНИЕ ПЛАСТИН КИРХГОФА, СОЕДИНЕННЫХ ЗАКЛЕПКАМИ, КОТОРЫЕ МОДЕЛИРУЮТСЯ ТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОБОЛЕВА

© С. А. НАЗАРОВ

Две пластины Кирхгофа, описываемые задачами Неймана для бигармонических уравнений, перехлестываются вдоль тонкой полоски, внутри которой пластины соединены заклепками, моделируемыми точечными условиями сопряжения Соболева. При помощи анализа явления пограничного слоя произведено осреднение по малому параметру — относительному периоду распределения заклепок — и получены условия сопряжения на общей кромке двух соприкасающихся пластин (в пределе перехлест исчезает). Обнаружены различия между одно- и многорядным клепанием, проявляющиеся в разных типах предельных условий сопряжения, и объяснены причины предпочтения двурядного клепания в практической инженерии. Сформулированы несколько родственных нерешенных задач.

### §1. Клепаное соединение пластин Кирхгофа

**1.1. Постановка задачи.** Отрезок  $\Upsilon = \{x = (x_1, x_2) \in \Omega : x_1 = 0\}$  на оси ординат разбивает односвязную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченную замкнутым простым гладким (для простоты класса  $C^\infty$ ; ср. п. 4, §5) контуром  $\Gamma = \partial\Omega$ , на две части  $\Omega_\pm = \{x \in \Omega : \pm x_1 > 0\} \neq \emptyset$ . Масштабированием сведем длину отрезка  $\Upsilon$  к единице, то есть сделаем декартовы координаты  $x_1, x_2$  и все геометрические параметры безразмерными, и поместим начало координат  $\mathcal{O}$  в нижнюю точку отрезка (см. рис. 1а). Считаем, что ось ординат пересекает контур  $\partial\Omega$  под ненулевым углом в двух точках  $Q^- = (0, 0)$  и  $Q^+ = (0, 1)$ . В прямоугольнике  $\Xi = (-\ell_-, \ell_+) \times (0, 1)$  выделим набор точек  $\mathcal{P} = \{P^1, \dots, P^J\}$ , причем  $\ell_\pm > 0$ ,  $J \geq 1$  и  $P^j \neq P^k$  при  $k \neq j$ . Пусть еще  $N$  — большое натуральное число и  $h = 1/N$  — малый положительный параметр.

---

*Ключевые слова:* бигармоническое уравнение, пластина Кирхгофа, точечные условия Соболева, модель заклепки, осреднение, пограничный слой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

Двумерные пластины Кирхгофа

$$\Omega_{\pm}^h = \{x \in \Omega : \pm x_1 > -\ell_{\mp} h\}, \quad (1.1)$$

налегают одна на другую вдоль тонкой, шириной  $(\ell_+ + \ell_-)h$ , полоски (см. рис. 1b)

$$\Theta^h = \{x \in \Omega : -\ell_- h < x_1 < \ell_+ h\}, \quad (1.2)$$

содержащей точки из множества (см. рис. 1c)

$$\mathcal{P}^h = \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathcal{P}_k^h, \quad \mathcal{P}_k^h = \{x : h^{-1}(x_1, x_2 - k) \in \mathcal{P}\}, \quad (1.3)$$

в которых пластины скреплены при помощи заклепок, точечной сварки или какого-либо другого сугубо локализованного способа соединения. Подчеркнем, что в пределе при  $h \rightarrow +0$  полоска  $\Theta^h$  исчезает и области  $\Omega_{\pm}^h$  превращаются в  $\Omega_{\pm}^0 = \Omega_{\pm}$ ; далее при анализе асимптотики используется именно обозначение  $\Omega_{\pm}^0$  для предельных областей.

Математическая формулировка задач об изгибе одиночных пластин (1.1) сводится [1, глава 4, §30] к бигармоническим уравнениям

$$\Delta_x^2 u_{\pm}^h(x) = f_{\pm}^h(x), \quad x \in \Omega_{\pm}^h \setminus \mathcal{P}^h, \quad (1.4)$$

снабженным краевыми условиями

$$N^q(x, \nabla_x) u_{\pm}^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_{\pm}^h, \quad q = 2, 3. \quad (1.5)$$

При этом  $u_{\pm}^h$  — прогибы пластин  $\Omega_{\pm}^h$ , а  $f_{\pm}^h$  — поперечные силы, отнесенные к цилиндрической жесткости пластин. Согласно [2] и [1, глава 4, §30] операторы краевых условий Неймана (1.5), описывающих свободные от внешних воздействий кромки пластин, выглядят на контуре  $\Gamma$  следующим образом:

$$N^2(x, \nabla_x) = \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s^2 + \varkappa(s)\partial_n), \quad (1.6)$$

$$N^3(x, \nabla_x) = \partial_n \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s \varkappa(s)\partial_s - \partial_s^2 \partial_n).$$

Здесь  $\nu \in [0, 1/2)$  — коэффициент Пуассона однородного изотропного упругого материала пластины,  $\Delta_x$  — оператор Лапласа,  $\partial_s = \partial/\partial s$  и  $\partial_n = \partial/\partial n$ , а  $(n, s)$  — локальные криволинейные координаты в окрестности  $\mathcal{V}$  контура  $\Gamma$ ,  $n$  — ориентированное расстояние до  $\Gamma$ ,  $n < 0$  внутри  $\Omega$ ,  $s$  — длина дуги на  $\Gamma$ . Кроме того,  $\varkappa(s)$  — кривизна дуги в точке  $s \in \Gamma$ . На отрезках  $\Upsilon_{\pm}^h = \{x \in \Omega : x_1 = \mp \ell h\}$  кривизна равна нулю и операторы (1.9) принимают вид

$$N_{\pm}^2(\nabla_x) = \Delta_x - (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad N_{\pm}^3(\nabla_x) = \mp \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \Delta_x + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right). \quad (1.7)$$

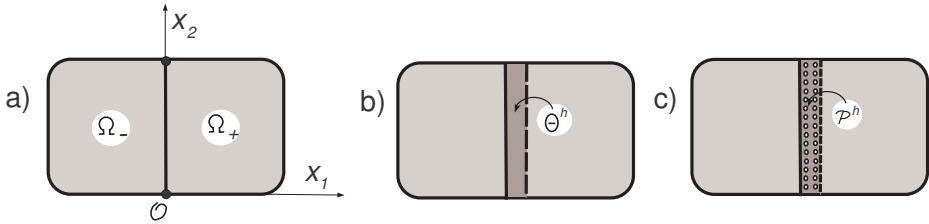


Рис. 1. Разбиение  $\Omega_+ \cup \Omega_-$  пластины  $\Omega$  (а); правая пластина  $\Omega_+^h$  налегает на левую  $\Omega_-^h$  (б); двурядное клепание пластин (с).

На основе результатов [3, 4] асимптотического анализа скрепление пластин (1.1) в точках множества (1.3) симитируем при помощи условий сопряжения Соболева

$$u_+^h(x) = u_-^h(x), \quad x \in \mathcal{P}^h, \tag{1.8}$$

корректность которых обеспечена теоремой Соболева о вложении  $H^2 \subset C$  на плоскости. Представим вариационную формулировку задачи (1.4), (1.5), (1.8).

Билинейная энергетическая форма для двумерной пластины Кирхгофа

$$E(u, v; \Omega) = \int_{\Omega} \left( \Delta_x u \Delta_x v + (1 - \nu) \times \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right) dx \tag{1.9}$$

(см., например, [1, глава 4, §30]) подчинена неравенству

$$E(u, u; \Omega) \geq (1 - \nu) \|\nabla_x^2 u; L^2(\Omega)\|^2. \tag{1.10}$$

Здесь  $\nabla_x^m u$  — совокупность производных порядка  $m$  функции  $u$ , а  $L^2(\Omega)$  — пространство Лебега. Обобщенная постановка задачи (1.4), (1.5), (1.8) осуществляется на подпространстве составных функций

$$\mathcal{H}^h = \{ u^h = (u_+^h, u_-^h) : u_{\pm}^h \in H^2(\Omega_{\pm}^h), \quad u_+^h = u_-^h \text{ на } \mathcal{P}^h \} \tag{1.11}$$

и апеллирует к интегральному тождеству (см. книги [1, 5] и др.)

$$\sum_{\pm} E(u_{\pm}^h, v_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h) = \sum_{\pm} (f_{\pm}^h, v_{\pm}^h)_{\Omega_{\pm}^h} \quad \forall (v_+^h, v_-^h) \in \mathcal{H}^h. \tag{1.12}$$

При этом  $H^2(\Omega^h)$  — пространство Соболева в области  $\Omega$ , а  $(, )_{\Omega}$  — натуральное скалярное произведение в  $L^2(\Omega)$ . Тот факт, что (1.11) — замкнутое

подпространство в  $H^2(\Omega_+^h) \oplus H^2(\Omega_-^h)$  с коразмерностью  $NJ$ , вытекает из упомянутой теоремы Соболева, выраженной неравенством

$$\sum_{\pm} |u(P)| \leq c_{P,\Omega} \|u; H^2(\Omega)\| \quad \forall P \in \Omega, \quad u \in H^2(\Omega),$$

в котором множитель  $c_{P,\Omega}$  зависит от области  $\Omega$ , но не от функции  $u$ .

**1.2. Способы клепания пластин.** В технических справочниках (см., например, [6]) выделяется *однорядное клепание*, которое характеризуется ограничением: точки  $P^1, \dots, P^J$  лежат на одной прямой, параллельной оси ординат, то есть

$$P_1^j = P_0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (1.13)$$

В противоположность (1.13) введем иное требование

$$J \geq 2, \quad P_1^1 \neq P_1^2, \quad (1.14)$$

отвечающее *многорядному клепанию*. По многим причинам (жесткость конструкции, подверженность разрушению и пр.) в инженерной практике предпочтение отдается именно последнему, обычно двурядному, способу скрепления плит и пластин (см. справочник [6]). В случае однорядного скрепления систему координат  $x = (x_1, x_2)$  выберем так, чтобы

$$P^j = (0, P_2^j), \quad j = 1, \dots, J, \quad (1.15)$$

то есть множество  $\mathcal{P}$  лежало на оси ординат. Подчеркнем, что в реальной механической задаче параметр  $h > 0$  мал, но зафиксирован, а положение предельной линии раздела  $\{x \in \Omega : x_1 = 0\}$  — математическая условность. Введенное согласно (1.15) ограничение  $P_0 = 0$  в условиях (1.13) упростит последующие формулы. В ситуации (1.14) также считаем, что некоторые точки из множества  $\mathcal{P}^h$  лежат на оси ординат.

Основной результат статьи — осреднение задачи (1.4), (1.5), (1.8) — указывает различие между случаями (1.15) и (1.14): в предельной задаче для пластин  $\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}^0$  на линии их раздела  $\Upsilon$  возникают условия сопряжения разных типов. Однако разница между однорядьем и многорядьем заклепок проявляется и при первичном анализе вариационной задачи (1.12).

Ясно, что в силу (1.10) функционал энергии  $E(u, u; \Omega)$  вырождается только на линейных функциях<sup>1</sup>, а значит, решение однородной ( $f_{\pm}^h = 0$ ) задачи (1.4), (1.5), (1.8) попадает в подпространство

$$\mathcal{L} = \{(L_+, L_-) : L_{\pm}(x) = a_{\pm}^0 + a_{\pm}^1 x_1 + a_{\pm}^2 x_2, \quad L_+(x) = L_-(x) \text{ при } x \in \mathcal{P}^h\}. \quad (1.16)$$

<sup>1</sup>Это обстоятельство, известное как *полиномиальное свойство* оператора задачи теории пластин (см. публикации [7] и [8, пример 1.14]), будет использовано при изучении явления пограничного слоя в §2 и анализа сингулярностей решений предельной задачи в §3.

В ситуации (1.15) имеем

$$\mathcal{L} = \{(a^0 + a^1_+ x_1 + a^2 x_2, a^0 + a^1_- x_1 + a^2 x_2) : a^0, a^1_\pm, a^2 \in \mathbb{R}\}, \quad (1.17)$$

то есть  $\dim \mathcal{L} = 4$ , однако в случае (1.14) подпространство (1.16) приобретает размерность три:

$$\mathcal{L} = \{(a^0 + a^1 x_1 + a^2 x_2, a^0 + a^1 x_1 + a^2 x_2) : a^0, a^1, a^2 \in \mathbb{R}\}. \quad (1.18)$$

Соответственно у задачи (1.12) возникают четыре или три условия разрешимости, причем такое же количество дефектных функционалов должно появиться и у предельной задачи в  $\Omega_+ \cup \Omega_-$ .

В следующем утверждении, обеспеченном теоремой Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, в проверке нуждается лишь равномерная по малому параметру  $h$  оценка (1.21), которая будет установлена в п. 3, §4.

**Теорема 1.1.** *Задача (1.12) с правыми частями  $f_\pm^h \in L^2(\Omega_\pm^h)$  имеет решение  $u^h = (u_+^h, u_-^h) \in \mathcal{H}^h$  тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$\sum_{\pm} (f_\pm^h, L_\pm)_{\Omega_\pm^h} = 0 \quad \forall (L_+, L_-) \in \mathcal{L}, \quad (1.19)$$

где  $\mathcal{L}$  — подпространство линейных вектор-функций (1.16), совпадающее с (1.17) в случае (1.15) и с (1.18) в случае (1.14). Решение  $u^h$  определено с точностью до слагаемого из  $\mathcal{L}$ , но, будучи подчинено условиям ортогональности

$$\sum_{\pm} (u_\pm^h, L_\pm)_{\Omega_\pm^h} = 0 \quad \forall (L_+, L_-) \in \mathcal{L}, \quad (1.20)$$

становится единственным и удовлетворяет оценке

$$\sum_{\pm} \|u_\pm^h, H^2(\Omega_\pm^h)\| \leq c \sum_{\pm} \|f_\pm^h, L^2(\Omega_\pm^h)\|, \quad (1.21)$$

где множитель  $c$  не зависит от  $f_\pm^h$  и  $h \in (0, h_0]$  при некотором  $h_0 > 0$ .

**Замечание 1.1.** Из-за присутствия первых производных в операторах (1.6) в случае нетривиальной кривизны  $\varkappa$  проверка равенств

$$N^q(x, \nabla_x) x_j = 0, \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3, \quad j = 1, 2, \quad (1.22)$$

достаточно громоздка (см. книгу [1, глава 4, §30]). Вместе с тем после проведенного в [2] и [1, глава 4, §30] полного исследования бигармонической задачи Неймана равенства (1.22) выводятся подстановкой в формулу

Грина

$$E(u, v; \Omega) = \int_{\Omega} v(x) \Delta^2 u(x) dx - \int_{\Gamma} v(x) N^3(x, \nabla_x) u(x) ds_x + \int_{\Gamma} \partial_n v(x) N^2(x, \nabla_x) u(x) ds_x \quad (1.23)$$

одночленов  $u(x) = x_j$ , уничтожающих двумерные интегралы. Вариация следов на  $\Gamma$  пробной функции  $v \in H^2(\Omega)$  и ее нормальной производной  $\partial_n v$  в полученном соотношении

$$0 = \int_{\Gamma} v(x) N^3(x, \nabla_x) x_j ds_x - \int_{\Gamma} \partial_n v(x) N^2(x, \nabla_x) x_j ds_x$$

приводит к равенствам (1.22).

**1.3. Содержание статьи.** В §2 подробно исследуется задача о пограничном слое: две полубесконечные пластины Кирхгофа

$$\Pi_{\pm} = \{ \xi = (\xi_1, \xi_2) : \pm \xi_1 > -\ell_{\mp}, \xi_2 \in (0, 1) \} \quad (1.24)$$

соединены условиями сопряжения Соболева в точках из множества  $\mathcal{P}$ , причем на боковых сторонах полуполос (1.24) назначены условия периодичности. Помимо условий разрешимости задачи в энергетическом пространстве с нормой (2.6) (предложение 2.2) выводятся явные представления ее решения  $(w_+, w_-)$  через решения задач в разъединенных полуполосах (1.24) (предложение 2.1) и линейных комбинаций функций Грина для бигармонического оператора с сингулярностями в точках из  $\mathcal{P}$  (предложение 2.3).

В §3 при помощи метода сращиваемых разложений (см., например, монографии [9, 10]) строятся начальные члены формальной асимптотики решения задачи (1.4), (1.5), (1.8), которые позволяют вывести *устойчивые* (терминология [11]) условия сопряжения на отрезке  $\Upsilon$  в предельной задаче для сочленения пластин  $\Omega_+ \cup \Omega_-$ . *Естественные* (терминология [11]) условия сопряжения выводятся в п. 3, §3 посредством вариационного подхода (в п. 1, §5 показано, что их можно получить и на основе асимптотического метода). Полученные условия сопряжения различаются в случаях (1.15) и (1.14) — в п. 3, §3 им дана механическая интерпретация, которая, в частности, объясняет причины предпочтений, отдаваемых двурядному клепанию в практических вопросах. Кроме того, в п. 6, §3 (теорема 3.3) для предельной задачи, возникающей в ситуации (1.15) и отвечающей шарнирному сцеплению пластин  $\Omega_{\pm}$ , при помощи теории Кондратьева [12] изучены сингулярности решений в концевых точках отрезка  $\Upsilon$  (жирные точки

на рис. 1а). Подчеркнем, что в ситуации (1.14) реализуется полное сцепление пластин, а решение предельной задачи становится гладким всюду в  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  (ср. обсуждение в п. 3, §5).

Обоснованию асимптотических конструкций посвящен §4. Ввиду гладкости решения предельной задачи случай (1.14) оказывается более простым (см. п. 4.1), а в случае (1.15) из-за сингулярностей решения предельной задачи требуется отдельная обработка концевых точек разделительного отрезка  $\Upsilon$  (см. п. 2, §4). Следует обратить внимание на два обстоятельства. Во-первых, оценки погрешностей двух моделей различаются в теоремах 4.1 и 4.2. Во-вторых, константы из мажорант в названных оценках не зависят не только от малого параметра  $h$ , но и от ингредиентов представления (4.8) правых частей  $f_{\pm}^h$  уравнений (1.4) — такое свойство не слишком часто обеспечено в публикациях по осреднению быстро осциллирующих границ. В п. 3, §4 из асимптотических конструкций исключаются “лишние” члены и, как результат, появляется возможность осуществить предельный переход  $h \rightarrow +0$  в интегральном тождестве (1.12) и тем самым обосновать применение вариационного метода в п. 3, §3; впрочем проверка оценок погрешностей в теоремах 4.1 и 4.2 выводятся независимо, без учета вариационного подхода, который тем самым приобретает иллюстративную роль.

В последнем, пятом, параграфе статьи обсуждаются открытые вопросы, относящиеся как к самой задаче (1.4), (1.5), (1.8), так и к родственным задачам. В п. 1, §5 рассматривается два ряда заклепок, сближенных на расстояние  $O(h^2)$ , в п. 2, §5 указана необходимость изучения явления пограничного слоя вблизи концов отрезка  $\Upsilon$ , и наконец, в п. 3, §5 сформулирована задача об одиночной пластине  $\Omega$  с гладкой кромкой, закрепленной в точках, которые расположены “почти периодически” вдоль контура  $\partial\Omega$ . Каких-либо результатов в этих пунктах не получено, а представленный в них материал служит для привлечения внимания к задачам осреднения пластин, возникающих в практических дисциплинах. Наконец, в п. 4, §5 перечислены возможные обобщения постановки задач, которые не требуют сколь-нибудь серьезных изменений в рассуждениях и сопутствующих вычислениях.

## §2. Явление пограничного слоя

**2.1. Постановка задачи.** При осреднении краевых задач в областях с быстро осциллирующими границами (см. публикации [13–16] и многие другие) обычно требуется исследовать явление пограничного слоя, который в рассматриваемом случае описываются решениями краевых задач в полуполосах (1.24). Они получаются растяжением координат  $x \mapsto \xi = h^{-1}x$



в подмножествах  $\{x \in \Omega_{\pm}^h : x_2 \in (0, h)\}$  высотой в один период  $h$  и последующим формальным переходом к  $h = 0$ . При этом уравнение (1.4) трансформируется в однородное бигармоническое уравнение

$$\Delta_{\xi}^2 w_{\pm}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi_{\pm}^{\bullet} = \Pi_{\pm} \setminus \mathcal{P}, \quad (2.1)$$

на боковых сторонах полуполос (1.24) назначаются условия периодичности

$$\frac{\partial^p w_{\pm}}{\partial \xi_2^p}(\xi_1, 1) = \frac{\partial^p w_{\pm}}{\partial \xi_2^p}(\xi_1, 0), \quad \pm \xi_1 > -\ell_{\mp}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

а на торцах  $\varpi_{\pm}$  — неоднородные условия Неймана

$$N_{\pm}^q(\nabla_{\xi})w_{\pm}(\xi_1, \mp \ell_{\mp}) = g_{\pm}^q(\xi_1), \quad \xi_1 \in (0, 1), \quad q = 2, 3. \quad (2.3)$$

Наконец, задачи в проколотых полуполосах  $\Pi_{\pm}^{\bullet}$  соединяются условиями сопряжения Соболева

$$w_{+}(\xi) = w_{-}(\xi), \quad \xi \in \mathcal{P}. \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) унаследованы от (1.5) и (1.6), а причины постановки условий периодичности (2.2), традиционных, но назначенных искусственно, станут понятны в п. 1, §3 при построении асимптотики.

**2.2. Одиночная полубесконечная пластина.** Начнем с рассмотрения задачи (2.1)–(2.3) в изолированной полуполосе  $\Pi_{\pm}$ , закрепленной в точках из  $\mathcal{P}$ , то есть поставим обычные точечные условия Соболева

$$w_{\pm}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathcal{P}. \quad (2.5)$$

Вариационная постановка задачи осуществляется на пространстве

$$\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}),$$

которое получено пополнением линейного множества  $C_{c, \text{per}}^{\infty}(\overline{\Pi_{\pm}})$  (бесконечно дифференцируемые 1-периодические функции с компактными носителями) по норме

$$\|w_{\pm}; \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})\| = (E(w_{\pm}, w_{\pm}; \Pi_{\pm}) + \|w_{\pm}; H^1(\Xi)\|^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

(см. определения в п. 1, §1). Одномерное неравенство Харди

$$\int_0^{\infty} (1+t)^{-\beta-1} |V(t)|^2 dt \leq \frac{4}{\beta^2} \int_0^{\infty} (1+t)^{-\beta+1} \left| \frac{dV}{dt}(t) \right|^2 dt, \quad (2.7)$$

$$\forall \beta > 0, \quad V \in C_c^{\infty}(0, +\infty),$$

проинтегрированное по  $\xi_2 \in (0, 1)$  и примененное к функциям

$$t \mapsto X(\pm t) \nabla_{\xi} w_{\pm}(\pm t, \xi_2) \quad \text{при} \quad \beta = 1$$

или

$$t \mapsto X(\pm t)w_{\pm}(\pm t, \xi_2) \quad \text{при} \quad \beta = -1,$$

а также очевидное следствие формул (1.10) и (2.6)

$$\|w_{\pm}; \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})\|^2 \geq c_{\Xi} \|w_{\pm}; H^2(\Xi)\|^2, \quad c_{\Xi} > 0, \quad (2.8)$$

показывают, что норма (2.6) эквивалентна весовой норме

$$\begin{aligned} & (\|\nabla_{\xi}^2 w_{\pm}; L^2(\Pi_{\pm})\|^2 + \|(1 + |\xi_1|)^{-1} \nabla_{\xi} w_{\pm}; L^2(\Pi_{\pm})\|^2 \\ & + \|(1 + |\xi_1|)^{-2} w_{\pm}; L^2(\Pi_{\pm})\|^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Срезающая функция  $X = 1 - \chi$  была введена для соблюдения последнего требования в (2.7); при этом

$$\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \chi(t) = 0 \text{ при } t \geq \ell := \min\{\ell_{\pm}\} > 0 \text{ и } \chi(t) = 1 \text{ при } t \leq \frac{\ell}{2}. \quad (2.10)$$

Для функции

$$L(\xi) = a^0 + a^1 \xi_1 \quad (2.11)$$

нормы (2.6) и (2.9) конечны (условие периодичности (2.2) с  $p = 0$  аннулирует компоненту  $a^2 \xi_2$  линейных функций). Проверив, что последовательность функций  $L_{\pm}^n(\xi) = \chi(\pm n^{-1} \xi_1) L(\xi)$ ,  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , фундаментальная в пространстве  $\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})$ , заключаем, что  $L \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})$ . Действительно, согласно формуле (2.10) при  $n \geq m$  имеем

$$\|L_{\pm}^n - L_{\pm}^m; \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})\|^2 \leq c \left( \frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} \right) \int_0^1 \int_{m\ell/2}^{n\ell} (1 + n + m + |\xi_1|)^2 d\xi \leq C \frac{(n+m)^7}{n^4 m^4}.$$

Введем подпространство  $\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P})$  функций из  $\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})$ , удовлетворяющих условиям Соболева (2.5).

**Лемма 2.1.** *При ограничении (1.14) в подпространстве  $\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P})$  нет линейных функций, но при ограничении (1.15) ему принадлежат только такие:*

$$L(\xi) = a^1 \xi_1, \quad a^1 \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Наконец, в случае  $\mathcal{P} = \emptyset$  любая функция (2.11) попадает в  $\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})$ .

**Доказательство.** Первое утверждение обеспечено основанной на предположении (1.14) формулой

$$a^0 + a^1 P_1^1 = 0, \quad a^0 + a^1 P_1^2 = 0 \quad (P_1^1 \neq P_1^2) \quad \Rightarrow \quad a^0 = a^1 = 0,$$

и поэтому остальные два стали очевидными. □

Обобщенная постановка задачи (2.1)–(2.3), (2.5) сводится к интегральному тождеству [1, 5]

$$E(w_{\pm}, v_{\pm}; \Pi_{\pm}) = \mp \left( g_{\pm}^2, \frac{\partial v_{\pm}}{\partial \xi_1} \right)_{\varpi_{\pm}} - (g_{\pm}^3, v_{\pm})_{\varpi_{\pm}} \quad \forall v_{\pm} \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P}), \quad (2.13)$$

которое обычным способом выводится при помощи аналогичной (1.23) формулы Грина. Первый знак  $\mp$  в правой части (2.13) учитывает направление внешней нормали на торцах  $\varpi_{\pm} = \{\xi : \xi_2 \in (0, 1), \xi_1 = \mp \ell_{\mp}\}$ . Заметим, что  $\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}) \subset H^2(\Xi)$  в силу (2.8) и, значит, простейшее следовое неравенство (см., например, [5, глава 1]) приводит к соотношению

$$\|v_{\pm}; L^2(\varpi_{\pm})\| + \|\nabla_x v_{\pm}; L^2(\varpi_{\pm})\| \leq c \|v_{\pm}; \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})\|. \quad (2.14)$$

**Предложение 2.1.** Пусть  $g_{\pm}^q \in L^2(\varpi_{\pm})$  при  $q = 2, 3$ .

1) Если выполнено требование (1.14), то задача (2.13) однозначно разрешима, и для ее решения  $w_{\pm} \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P})$  имеет место оценка

$$\|w_{\pm}; \mathcal{W}^2(\Pi_{\pm})\| \leq c \sum_{q=2,3} \|g_{\pm}^q \in L^2(\varpi_{\pm})\|, \quad (2.15)$$

в которой множитель  $c$  не зависит от  $g_{\pm}^q$ .

2) Если выполнено требование (1.15), то задача (2.13) имеет решение  $w_{\pm} \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P})$  тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 g_{\pm}^2(\xi_2) d\xi_2 - \ell_{\mp} \int_0^1 g_{\pm}^3(\xi_2) d\xi_2 = 0.$$

Это решение определено с точностью до слагаемого (2.12), но, будучи подчинено условию ортогональности

$$\int_0^1 \frac{\partial w_{\pm}}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) d\xi_2 = 0,$$

становится единственным и удовлетворяет оценке (2.15).

3) Если  $\mathcal{P} = \emptyset$  и точечных условий Соболева нет, то задача (2.13) имеет решение  $w_{\pm} \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \emptyset) = \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})$  при выполнении двух условий разрешимости

$$\int_0^1 g_{\pm}^q(\xi_2) d\xi_2 = 0, \quad q = 2, 3.$$

Решение определено с точностью до линейного слагаемого (2.11), становясь единственным и удовлетворяя оценке (2.15) при соблюдении условий

ортогональности

$$\int_0^1 w_{\pm}(0, \xi_2) d\xi_2 = 0, \quad \int_0^1 \frac{\partial w_{\pm}}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) d\xi_2 = 0. \quad (2.16)$$

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную задачу

$$E(w_{\pm}, v_{\pm}; \Pi_{\pm}) + \mu(w_{\pm}, v_{\pm})_{\Xi} = \mp \left( g_{\pm}^2, \frac{\partial v_{\pm}}{\partial \xi_1} \right)_{\varpi_{\pm}} - (g_{\pm}^3, v_{\pm})_{\varpi_{\pm}} \quad (2.17)$$

$$\forall v_{\pm} \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P}).$$

В силу формулы (2.8) и очевидного неравенства

$$\|\nabla_{\xi} v_{\pm}; L^2(\Xi)\| \leq c(\|\nabla_{\xi}^2 v_{\pm}; L^2(\Xi)\| + \|v_{\pm}; L^2(\Xi)\|)$$

левая часть (2.17) при  $\mu > 0$  — скалярное произведение в пространстве  $\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P})$ , а значит, однозначная разрешимость задачи (2.17) и оценка (2.15) ее решения — следствия теоремы Рисса о представлении непрерывного функционала в гильбертовом пространстве и соотношения (2.14). Кроме того, добавка к оператору задачи (2.13), порожденная слагаемым  $\mu(w_{\pm}, v_{\pm})_{\Xi}$ , — компактный оператор, то есть для задачи (2.17) с  $\mu = 0$ , не отличающейся от интересующей нас задачи (2.13) и являющейся формально самосопряженной, верна альтернатива Фредгольма. Осталось принять во внимание лемму 2.1 и учесть все решения однородной задачи в пространстве  $\mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P})$ .  $\square$

**2.3. Склепанные полубесконечные пластины.** Вернемся к рассмотрению задачи (2.1)–(2.4) с условиями сопряжения Соболева. Соответствующее интегральное тождество

$$\sum_{\pm} E(w_{\pm}, v_{\pm}; \Pi_{\pm}) = \sum_{\pm} \left( \mp \left( g_{\pm}^2, \frac{\partial v_{\pm}}{\partial \xi_1} \right)_{\varpi_{\pm}} - (g_{\pm}^3, v_{\pm})_{\varpi_{\pm}} \right) \quad (2.18)$$

$$\forall v \in \mathcal{W}_{\text{per}}^{2, \bullet}(\Pi_{\pm}; \mathcal{P})$$

ставится на пространстве вектор-функций

$$\mathcal{W}_{\text{per}}^{2, \bullet}(\Pi_{\pm}; \mathcal{P}) = \{v = (v_+, v_-) : v_{\pm} \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm}; \mathcal{P}), v_+ = v_- \text{ на } \mathcal{P}\}. \quad (2.19)$$

Как и в лемме 2.1, выделим в (2.19) подпространство линейных вектор-функций

$$\mathcal{L}^{\bullet} = \{L = (L_+, L_-) : L_{\pm}(\xi) = a_{\pm}^0 + a_{\pm}^1 \xi_1, a_{\pm}^q \in \mathbb{R}, q = 0, 1;$$

$$a_+^0 = a_-^0, a_{\pm}^1 \text{ — любые в случае (1.15);} \quad (2.20)$$

$$a_+^0 = a_-^0, a_+^1 = a_-^1 \text{ в случае (1.14)}\}.$$

При этом  $\dim \mathcal{L}^\bullet = 3$  и  $\dim \mathcal{L}^\bullet = 2$  в ситуациях (1.15) и (1.14) соответственно

Очередное утверждение проверяется по схеме доказательства предложения 2.1 и потому приводится без комментариев.

**Предложение 2.2.** Пусть  $g_\pm^q \in L^2(\varpi_\pm)$  при  $q = 2, 3$ . Задача (2.18) имеет решение  $w = (w_+, w_-) \in \mathcal{W}_{\text{per}}^{2, \bullet}(\Pi_\pm; \mathcal{P})$  в том и только в том случае, если

$$\sum_{\pm} \int_0^1 \left( \mp \frac{\partial L_{\pm}}{\partial \xi_1} (\mp \ell_{\mp}) g_{\pm}^2(\xi_2) - L_{\pm} (\mp \ell_{\mp}) g_{\pm}^3(\xi_2) \right) d\xi_2 = 0 \quad \forall L \in \mathcal{L}^\bullet. \quad (2.21)$$

Решение определено с точностью до слагаемого из подпространства (2.20), но, будучи подчинено условиям ортогональности

$$\sum_{\pm} \int_{\Xi} L_{\pm}(\xi_1) w_{\pm}(\xi) d\xi = 0 \quad \forall L = (L_+, L_-) \in \mathcal{L}^\bullet, \quad (2.22)$$

становится единственным и удовлетворяет оценке

$$\sum_{\pm} \|w_{\pm}; \mathcal{W}^2(\Pi_{\pm})\| \leq c \sum_{\pm} \sum_{q=2,3} \|g_{\pm}^q; L^2(\varpi_{\pm})\|$$

с не зависящим от  $g_{\pm}^q$  множителем.

Как известно (см., например, [17, глава 6, §6]), из-за постановки условий Соболева (2.5) или (2.4) решение задачи (2.17) или (2.18) теряет гладкость в точках из множества  $\mathcal{P}$ . Однако вне этих точек решения однородного бигармонического уравнения (2.1) с условиями периодичности (2.2) оказывается бесконечно дифференцируемым. Более того, благодаря условиям периодичности оно около торца  $\varpi_{\pm}$  попадает в пространство Соболева с произвольным зафиксированным показателем  $l \geq 4$  в случае правых частей  $g^q \in H_{\text{per}}^{l-q-1/2}(0, 1)$ ,  $q = 2, 3$ ; здесь  $H_{\text{per}}^{l+1/2}(0, 1)$  — пространство Соболева–Слободецкого периодических функций. В следующем пункте будет описано поведение функций  $w_{\pm}$  около точек из  $\mathcal{P}$ .

#### 2.4. Функции Грина и представление решений задачи Соболева.

Для задачи (2.1)–(2.3) в полуполосе  $\Pi_{\pm}$  (без условий Соболева, то есть при  $\mathcal{P} = \emptyset$ ) определим обобщенную функцию Грина  $G_{\pm}(\xi; \eta)$  с особенностью в точке  $\eta \in \Pi_{\pm}$ ,

$$G_{\pm}(\xi; \eta) = -\frac{1}{8\pi} |\xi - \eta|^2 \ln |\xi - \eta| \chi_0(\xi - \eta) + \widehat{G}_{\pm}(\xi; \eta). \quad (2.23)$$

Первое слагаемое в правой части — фундаментальное решение для оператора  $\Delta_\xi^2$  на плоскости, умноженное на бесконечно дифференцируемую срезающую функцию  $\chi_0$  с малым носителем, равную единице вблизи начала координат, а второе — регулярная часть, то есть гладкая 1-периодическая по переменной  $\xi_2$  функция в  $\overline{\Pi_\pm}$ , имеющая не более чем линейный рост при  $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$  и подчиненная условиям ортогональности (2.16), то есть

$$\int_0^1 G_\pm(0, \xi_2; \eta) d\xi_2 = 0, \quad \int_0^1 \frac{\partial G_\pm}{\partial \xi_1}(0, \xi_2; \eta) d\xi_2 = 0. \quad (2.24)$$

Введенные требования означают, что в рамках теории распределений

$$G_\pm(\cdot; \eta) \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_\pm)$$

— решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^2 G_\pm(\xi; \eta) &= \delta_\eta(\xi) := \delta(\xi - \eta), \quad \xi \in \Pi_\pm, \\ N_\pm^q(\nabla_\xi)G_\pm(\mp\ell_\mp, \xi_2; \eta) &= b_\pm^q, \quad \xi_2 \in (0, 1), \end{aligned} \quad (2.25)$$

дополненной условиями периодичности (2.2) и содержащей  $\delta$ -функцию Дирака, причем постоянные  $b_\pm^q$  в краевых условиях на торце  $\varpi_\pm$  нужны для соблюдения условий разрешимости (ср. предложение 2.1, 3)) — ортогональности в смысле формулы Грина (1.23) в полуполосах  $\Pi_\pm$  правых частей решениям 1 и  $\xi_1$  однородной задачи. Учитывая соотношение  $(\delta_\eta, c_0 + c_1\xi_1)_{\Pi_\pm} = c_0 + c_1\eta_1$  и производя несложные вычисления, находим постоянные

$$b_\pm^3 = 1, \quad b_\pm^2 = \pm\eta_1 + \ell_\mp. \quad (2.26)$$

**Лемма 2.2.** *Матрица  $\mathbf{G}^\pm$  с элементами  $\mathbf{G}_{jk}^\pm = G_\pm(P^k, P^j)$ ,  $j, k = 1, \dots, J$ , симметрична и положительно определена.*

**Доказательство.** Подставим в формулу Грина функции  $G_\pm^j$  и  $G_\pm^k$ , где  $G_\pm^j(\xi) = G_\pm(\xi; P^j)$ . Соотношения (2.24) и (2.25), (2.2) приводят к равенству

$$\begin{aligned} G_\pm(P^k; P^j) &= G_\pm^j(P^k) = \int_{\Pi_\pm} G_\pm^j(\xi) \delta(\xi - P^k) d\xi \\ &= \int_{\Pi_\pm} G_\pm^j(\xi) \Delta_\xi^2 G_\pm^k(\xi) d\xi = E(G_\pm^k, G_\pm^j; \Pi_\pm), \end{aligned} \quad (2.27)$$

которое нетрудно истолковать в рамках теории распределений. В правой части (2.27) появились элементы матрицы Грама, симметричной и положительно определенной ввиду линейной независимости функций

$$G_{\pm}^1, \dots, G_{\pm}^J,$$

подчиненных условиям ортогональности (2.16).  $\square$

Вернемся к рассмотрению задачи (2.1)–(2.4) о склепанных полуполосах. Ее решение ищем в виде

$$w_{\pm}(\xi) = \mathbf{w}_{\pm}(\xi) + \mathbf{L}_{\pm}(\xi) \pm \sum_{j=1}^J \mathbf{b}_j G_{\pm}^j(\xi), \quad (2.28)$$

где  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_J)^{\top}$  — столбец коэффициентов, подлежащий определению,  $\mathbf{L}_{\pm}$  — линейные функции (2.11) с коэффициентами  $\mathbf{a}_{\pm}^p$ , а  $\mathbf{w}_{\pm} \in \mathcal{W}_{\text{per}}^2(\Pi_{\pm})$  — подчиненное ограничениям (2.16) решение задачи (2.1)–(2.4), в которой  $\mathcal{P} = \emptyset$  и для соблюдения условий ортогональности (2.16) правые части  $g_{\pm}^q$  заменены такими:

$$\mathbf{g}_{\pm}^q(\xi_2) = g_{\pm}^q(\xi_2) - \bar{g}_{\pm}^q, \quad \bar{g}_{\pm}^q = \int_0^1 g_{\pm}^q(\xi_2) d\xi_2. \quad (2.29)$$

Следовательно, в силу соотношений (2.25), (2.26) и (2.29) краевые условия (2.3) выполнены тогда и только тогда, когда

$$\bar{g}_{\pm}^3 = \pm \sum_{j=1}^J \mathbf{b}_j = \pm \mathbf{e}^{\top} \mathbf{b}, \quad \bar{g}_{\pm}^2 = \sum_{j=1}^J \mathbf{b}_j P_1^j \pm \ell_{\mp} \sum_{j=1}^J \mathbf{b}_j = \mathbf{p}^{\top} \mathbf{b} \pm \ell_{\mp} \mathbf{e}^{\top} \mathbf{b}. \quad (2.30)$$

Здесь  $\mathbf{p} = (P_1^1, \dots, P_1^J)^{\top}$ ,  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^{\top} \in \mathbb{R}^J$ , а  $\mathbf{p}^{\top} \mathbf{b}$  — скалярное произведение столбцов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{b}$ .

**Замечание 2.1.** Поясним, почему в представлении (2.28) связаны коэффициенты линейных комбинаций функций Грина  $G_{\pm}^1, \dots, G_{\pm}^J$ . В рамках теории распределений интегральное тождество (2.18) и формула Грина (1.23) в полуполосах  $\Pi_{\pm}$  влекут за собой соотношение:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\pm} E(w_{\pm}, v_{\pm}; \Pi_{\pm}) - \sum_{\pm} \left( \mp \left( g_{\pm}^2, \frac{\partial v_{\pm}}{\partial \xi_1} \right)_{\varpi_{\pm}} - (g_{\pm}^3, v_{\pm})_{\varpi_{\pm}} \right) \\ &= \sum_{\pm} \int_{\Pi_{\pm}} v_{\pm}(\xi) \Delta_{\xi}^2 w_{\pm}(\xi) d\xi = \sum_{\pm} \sum_{j=1}^J b_{\pm}^j \int_{\Pi_{\pm}} v_{\pm}(\xi) \delta(\xi - P^j) d\xi \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^J v(P^j)(b_+^j + b_-^j). \quad (2.31)$$

Здесь  $v(P^j) = v_{\pm}(P^j)$  (см. условия сопряжения (2.4)), а  $b_{\pm}^j$  — коэффициенты линейной комбинации  $\delta$ -функций Дирака в уравнениях

$$\Delta_{\xi}^2 w_{\pm}(\xi) = b_{\pm}^1 \delta(\xi - P^1) + \dots + b_{\pm}^J \delta(\xi - P^J), \quad \xi \in \Pi_{\pm}.$$

Поскольку подбором пробных функций величинам  $v(P^1), \dots, v(P^J)$  можно придать любые значения, соотношение (2.31) возможно лишь в случае  $b_+^j + b_-^j = 0, j = 1, \dots, J$ .

Подставим формулы (2.28) в условия сопряжения Соболева (2.4) и получим систему уравнений

$$\mathbf{w}_+(P^k) + \mathbf{L}_+(P^k) + \sum_{j=1}^J \mathbf{b}_j G_+^j(P^k) = \mathbf{w}_-(P^k) + \mathbf{L}_-(P^k) - \sum_{j=1}^J \mathbf{b}_j G_-^j(P^k),$$

$$k = 1, \dots, J,$$

которая в краткой матричной форме принимает вид

$$(\mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^-)\mathbf{b} = \mathbf{w}_{\ominus} + \mathbf{L}_{\ominus}, \quad (2.32)$$

где

$$\mathbf{w}_{\ominus} = (\mathbf{w}_-(P^1) - \mathbf{w}_+(P^1), \dots, \mathbf{w}_-(P^J) - \mathbf{w}_+(P^J))^{\top},$$

$$\mathbf{L}_{\ominus} = (\mathbf{L}_-(P^1) - \mathbf{L}_+(P^1), \dots, \mathbf{L}_-(P^J) - \mathbf{L}_+(P^J))^{\top}. \quad (2.33)$$

В силу леммы 2.2 матрица из левой части системы (2.32) положительно определена, то есть

$$\mathbf{b} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{w}_{\ominus} + \mathbf{L}_{\ominus}), \quad (2.34)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^-$ , а столбец  $\mathbf{L}_{\ominus} \in \mathbb{R}^J$  нужно найти из соотношений (2.30). Приходится рассматривать ситуации (1.15) и (1.14) по отдельности.

Поскольку (2.20) — подпространство решений однородной задачи, линейную составную функцию  $(\mathbf{L}_+, \mathbf{L}_-)$  можно временно<sup>2</sup> брать из ортогонального дополнения к  $\mathcal{L}^{\bullet}$ . Таким образом, в более простом случае (1.15) имеем

$$\mathbf{L}_{\pm}(\xi_1) = \pm \mathbf{a}^0, \quad \mathbf{L}_{\ominus} = -2\mathbf{a}^0 \mathbf{e} \quad \text{и} \quad \mathbf{p} = P_0 \mathbf{e} = 0 \in \mathbb{R}^J. \quad (2.35)$$

Кроме того, три условия разрешимости (2.21) переписываются следующим образом:

$$\bar{g}_+^3 + \bar{g}_-^3 = 0, \quad \ell_{\mp} \bar{g}_{\pm}^3 - \bar{g}_{\pm}^2 = 0. \quad (2.36)$$

<sup>2</sup>Пока игнорируем условия ортогональности (2.22).



В силу связей (2.30) первое выполнено при любом столбце  $\mathbf{b}$ , для которого

$$\mathbf{e}^\top \mathbf{b} = \pm \bar{g}_\pm^3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\bar{g}_+^3 - \bar{g}_-^3). \quad (2.37)$$

Кроме того, последняя пара равенств (2.36) обеспечена двумя формулами (2.30) для  $\bar{g}_\pm^3$  и  $\bar{g}_\pm^2$  (напоминаем, что  $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^J$  в силу (1.15)). Таким образом, в силу соотношений (2.34) и (2.37) постоянная из (2.35) имеет вид

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\bar{g}_-^3 - \bar{g}_+^3 + 2\mathbf{e}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{w}_\ominus}{4\mathbf{e}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{e}}.$$

Итак, все ингредиенты представления (2.28) найдены в случае (1.15).

Обратимся к случаю (1.14), в котором соотношения (2.35) и (2.36) заменяются такими:

$$\mathbf{L}_\pm(\xi_1) = \pm(\mathbf{a}^0 + \mathbf{a}^1 \xi_1), \quad (2.38)$$

$$\mathbf{L}_\ominus = -2(\mathbf{a}^0 \mathbf{e} + \mathbf{a}^1 \mathbf{p}) \quad \text{и} \quad \mathbf{p} = (P_1^1, \dots, P_1^J)^\top \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^J,$$

$$\sum_{\pm} \bar{g}_\pm^3 = 0, \quad \sum_{\pm} \pm(\ell_\mp \bar{g}_\pm^3 - \bar{g}_\pm^2) = 0. \quad (2.39)$$

Формулы (2.30) и (2.34) сохраняются, и поэтому, как и ранее, два условия разрешимости (2.39) выполнены автоматически, причем аналогично (2.37) справедливы равенства

$$\bar{g}_+^3 - \bar{g}_-^3 = 2\mathbf{e}^\top \mathbf{b}, \quad \ell_- \bar{g}_+^3 - \bar{g}_+^2 + (\ell_+ \bar{g}_-^3 - \bar{g}_-^2) = -2\mathbf{p}^\top \mathbf{b}.$$

Они вместе с (2.38) и (2.34) влекут за собой следующие связи неизвестных  $\mathbf{a}^0$ ,  $\mathbf{a}^1$  из представлений (2.38) и данных  $\bar{g}_\pm^q$ ,  $\mathbf{w}_\ominus$  из списка (2.29), (2.33):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \sum_{\pm} \pm \bar{g}_\pm^3 + \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{w}_\ominus &= \mathbf{e}^\top \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{e} \mathbf{a}^0 + \mathbf{p} \mathbf{a}^1), \\ \frac{1}{4} \sum_{\pm} (\ell_\mp \bar{g}_\pm^3 - \bar{g}_\pm^2) + \frac{1}{2} \mathbf{p}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{w}_\ominus &= \mathbf{p}^\top \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{e} \mathbf{a}^0 + \mathbf{p} \mathbf{a}^1). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Рассмотрим (2.40) как систему линейных уравнений для определения коэффициентов  $\mathbf{a}^0$  и  $\mathbf{a}^1$  в (2.38). Матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{e}, & \mathbf{e}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{e}, & \mathbf{p}^\top \mathbf{G}^{-1} \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

этой системы — матрица Грама, причем в силу ограничения (1.14) столбцы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{p}$  линейно независимы, а обратная для  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^-$  матрица  $\mathbf{G}^{-1}$  симметрична и положительно определена (см. лемму 2.2). Итак, система (2.40) однозначно разрешима и ее решение позволяет по формулам (2.34) и (2.38) восстановить искомое решение (2.28) задачи (2.1)–(2.4).

Наконец, в обеих ситуациях описанная процедура фиксирует только коэффициенты разности  $\mathbf{L}_\ominus = \mathbf{L}_+ - \mathbf{L}_-$ , тогда как путем добавления к  $(\mathbf{L}_+, \mathbf{L}_-)$  слагаемого из подпространства (2.20) можно соблюсти условия ортогональности (2.22).

**Предложение 2.3.** *Решение задачи (2.18), указанное предложением 2.2, представимо в виде (2.28), в котором фигурируют обобщенные функции Грина (2.23) задачи (2.25), (2.2), а остальные ингредиенты находятся согласно приведенной процедуре.*

### §3. Формальный асимптотический анализ

**3.1. Метод сращиваемых разложений.** Нетрудно предсказать, что предельная ( $h = 0$ ) задача (1.4), (1.5), (1.8) о склепанных пластинах (1.1) ставится на объединении областей  $\Omega_\pm^0 = \Omega_\pm$  и включает унаследованные от (1.4) и (1.5) уравнения

$$\Delta_x^2 u_\pm^0(x) = f_\pm^0(x), \quad x \in \Omega_\pm, \quad (3.1)$$

и краевые условия

$$N^q(x, \nabla_x) u_\pm^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma_\pm = \partial\Omega_\pm \setminus \overline{\Upsilon}, \quad q = 2, 3. \quad (3.2)$$

Для вывода связей составляющих  $u_+^0$  и  $u_-^0$  решения  $u^0$  на отрезке  $\Upsilon$ , разбивающим  $\Omega$  на области  $\Omega_\pm^0$ , применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. монографии [9, 10] и др.), интерпретируя анзацы

$$u_\pm^h(x) = u_\pm^0(x) + hu_\pm^1(x) + \dots \quad (3.3)$$

как *внешние* разложения, пригодные на удалении от полосы (1.2) налегания одной пластины на другую. В окрестности множества  $\overline{\Theta^h}$  построим *внутреннее* разложение

$$u^h(x) = w_\pm^0(\xi; x_2) + hw_\pm^1(\xi; x_2) + \dots \quad (3.4)$$

При этом  $w_\pm^p$  — функции, гладко зависящие от параметра  $x_2$  и 1-периодические по второй растянутой координате  $\xi_2 = h^{-1}x_2$ . Многоточие в анзацах (3.3) и (3.4) заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого формального анализа. Оправдание асимптотики, представленное в следующем параграфе, придает смысл приведенным представлениям решения  $u^h = (u_+^0, u_-^0)$ .

Растяжение координат  $x \mapsto \xi = h^{-1}x$  сопровождается соотношениями  $\nabla_x = h^{-1}\nabla_\xi$  и  $\Delta_x^2 = h^{-4}\Delta_\xi^2$ ,  $N_\pm^q(\nabla_x) = h^{-q}N_\pm^q(\nabla_\xi)$ ,  $q = 2, 3$ . Таким образом, равенство (1.4) принимает вид  $\Delta_\xi^2 u_\pm^h = h^4 f_\pm^h$ , то есть бигармоническое уравнение в задаче (2.1)–(2.4) для первых двух членов внутреннего разложения (3.4) становятся однородными. Однородными остаются и краевые

условия (2.3) на торцах  $\varpi_{\pm} = \{\xi : \xi_1 = \mp \ell_{\pm}, \xi_2 \in (0, 1)\}$ , происходящие от краевых условий (1.5) на линиях  $\Upsilon_{\pm}^h$ . Условия периодичности (2.2) назначены для того, чтобы функции  $w_{\pm}^p$  были естественным образом определены всюду в  $\Omega_{\pm}^h$  при сохранении гладкости. Условия сопряжения Соболева (2.4) в комментариях не нуждаются.

**3.2. Вывод устойчивых условий сопряжения.** Считая сначала, что  $f_{\pm}^0 \in L^2(\Omega_{\pm})$  и  $u_{\pm}^0 \in H^4(\Omega_{\pm}) \subset C^2(\overline{\Omega_{\pm}})$  (ср. далее п. 4, §3 и п. 6, §3), напишем формулу Тейлора

$$\begin{aligned} u_{\pm}^0(x) &= u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) + x_1 \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) + O(x_1^2) \\ &= u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) + h\xi_1 \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) + O(h^2 \xi_1^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Процедура сращивания (см. [9, 10] и др.) подразумевает, что поведение на бесконечности членов внутреннего разложения согласовано с поведением при  $x_1 \rightarrow \pm 0$  членов внешних разложений. Сравнивая формулы (3.4) и (3.3), (3.5), видим, что

$$w_{\pm}^0(\xi; x_2) = u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) + \dots \text{ при } \xi_1 \rightarrow \pm\infty. \quad (3.6)$$

Теперь многоточием обозначаем затухающие на бесконечности слагаемые. Поскольку согласно предложению 2.2 ограниченным решением однородной ( $g_{\pm}^q = 0$ ) задачи (2.1)–(2.4) служит только постоянный вектор

$$(c^0, c^0) \in \mathcal{W}_{\text{per}}^{2, \bullet}(\Pi_{\pm}; \mathcal{P}),$$

выводим из формул (3.6) первое условие сопряжения

$$u_{+}^0(+0, x_2) = u_{-}^0(-0, x_2), \quad x \in \Upsilon. \quad (3.7)$$

На втором шаге процедуры обнаруживаем, что

$$w_{\pm}^1(\xi; x_2) = u_{\pm}^1(\pm 0, x_2) + \xi_1 \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) + \dots \text{ при } \xi_1 \rightarrow \pm\infty. \quad (3.8)$$

Здесь учтены и вторые члены внешних разложений (3.3). Предложение 2.2 указывает разные наборы решений задачи в  $\Pi_{+} \times \Pi_{-}$  с линейным ростом при  $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$ . В ситуации (1.14) любое такое решение имеет вид  $(c^0 + c^1 \xi_1, c^0 + c^1 \xi_1)$  с одинаковыми коэффициентами  $c^0$  и  $c^1$ , а значит, в дополнение к (3.7) получаем еще одно условие сопряжения

$$\frac{\partial u_{+}^0}{\partial x_1}(+0, x_2) = \frac{\partial u_{-}^0}{\partial x_1}(-0, x_2), \quad x \in \Upsilon. \quad (3.9)$$

Совпадают и величины  $u_{+}^1(\pm 0, x_2)$  и  $u_{-}^1(\pm 0, x_2)$ , однако эта связь востребована не будет (ср. замечание 3.1).

Теперь обратимся к ситуации (1.15) — рассмотрим клепание в один ряд. В этом случае однородная задача (2.1)–(2.4) имеет решение  $(c^0 + c_{\pm}^1 \xi_1, c^0 + c_{\pm}^1 \xi_1) \in \mathcal{W}_{\text{per}}^{2,\bullet}(\Pi_{\pm}; \mathcal{P})$  с тремя произвольными коэффициентами  $c_{\pm}^1$  и  $c^0$ , то есть процедура сращивания не накладывает какие-либо ограничения на производные  $\partial u_{\pm}^0 / \partial x_1$ , суженные на  $\Upsilon$ , и условие сопряжения (3.9) не требуется, а остается только одно условие (3.7).

**Замечание 3.1.** Далее в §5 понадобятся условия сопряжения для поправочного члена  $u_{\pm}^1$ , однако только при ограничении (1.15). В этом случае

$$w_{\pm}^0(\xi; x_2) = u_{\pm}^0(\pm 0, x_2), \tag{3.10}$$

$$w_{\pm}^1(\xi; x_2) = u_{\pm}^1(\pm 0, x_2) + \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) \xi_1, \tag{3.11}$$

причем для функций  $u_{\pm}^0$  и  $u_{\pm}^1$  выполнены равенства (3.7) и

$$u_{\pm}^1(+0, x_2) + P_0 \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) = u_{\pm}^1(-0, x_2) + P_0 \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2). \tag{3.12}$$

Соотношение (3.12) — результат подстановки выражения (3.11) в условия Соболева (2.4) при учете формулы (1.13). При дополнительном ограничении (1.15) производные с множителем  $P_0$  исчезают из равенства (3.12).

Итак, сформированы условия сопряжения на разделительной линии  $\Upsilon$ , которые по терминологии [11] следует признать *устойчивыми*, ибо они включаются в функциональное пространство  $\mathcal{H}^0$ , обслуживающее вариационную постановку предельной задачи на  $\Omega_{+}^0 \cup \Omega_{-}^0$ . Именно,

$$\mathcal{H}^0 = \{u^0 = (u_{+}^0, u_{-}^0) : u_{\pm}^0 \in H^2(\Omega_{\pm}^0), u_{+}^0 = u_{-}^0 \text{ на } \Upsilon\} \text{ в случае (1.15);} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{H}^0 = \{u^0 = (u_{+}^0, u_{-}^0) : u^0 \in H^2(\Omega)\} \text{ в случае (1.14).}$$

Разумеется, сужения  $u_{\pm}^0 = u^0|_{\Omega_{\pm}^0}$  функции  $u^0 \in H^2(\Omega)$  удовлетворяют равенствам (3.7) и (3.8).

**3.3. Вывод естественных условий сопряжения.** Для того чтобы найти (опять-таки формально) группу *естественных* условий сопряжения, следуя схеме из монографии [11], в предположении достаточной гладкости составляющих  $u_{\pm}^0$  решения задачи (3.1), (3.2) с некоторыми связями на разделительном отрезке  $\Upsilon$  произведем интегрирование по частям в интегральном тождестве

$$\sum_{\pm} E(u_{\pm}^0, v_{\pm}^0; \Omega_{\pm}) = \sum_{\pm} (f_{\pm}^0, v_{\pm}^0)_{\Omega_{\pm}} \quad \forall v^0 = (v_{+}^0, v_{-}^0) \in \mathcal{H}^0, \tag{3.14}$$

которое еще предстоит в п. 3, §4 получить из интегрального тождества (1.12) для исходной задачи (1.4), (1.5), (1.8). В результате приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} (\Delta_x^2 u_{\pm}^0 - f_{\pm}^0, v_{\pm}^0)_{\Omega_{\pm}} - \sum_{\pm} \left( (N^3 u_{\pm}^0, v_{\pm}^0)_{\Gamma_{\pm}} - \left( N^2 u_{\pm}^0, \frac{\partial v_{\pm}^0}{\partial n} \right)_{\Gamma_{\pm}} \right) \\ = \sum_{\pm} \left( (N_{\pm}^3 u_{\pm}^0, v_{\pm}^0)_{\Upsilon} \pm \left( N_{\pm}^2 u_{\pm}^0, \frac{\partial v_{\pm}^0}{\partial x_1} \right)_{\Upsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Левая часть обращается в нуль благодаря равенствам (3.1) и (3.2).

Поскольку в ситуации (1.14) пробная вектор-функция  $v^0$  подчинена ограничениям (3.7) и (3.9), но вместе с производной  $\partial v^0 / \partial x_1$  может принимать любые значения на  $\Upsilon$ , выводим из соотношения (3.15) условия сопряжения

$$N_+^2 (\nabla_x) u_+^0(+0, x_2) - N_-^2 (\nabla_x) u_-^0(-0, x_2) = 0, \quad x \in \Upsilon, \quad (3.16)$$

$$N_+^3 (\nabla_x) u_+^0(+0, x_2) + N_-^3 (\nabla_x) u_-^0(-0, x_2) = 0, \quad x \in \Upsilon. \quad (3.17)$$

Пользуясь формулами (3.7), (3.9) и (1.7) преобразуем их к виду

$$\frac{\partial^p u_{\pm}^0}{\partial x_1^p} (+0, x_2) = \frac{\partial^p u_{\pm}^0}{\partial x_1^p} (-0, x_2), \quad p = 2, 3. \quad (3.18)$$

В ситуации (1.15) пробная функция  $v^0 = (v_+^0, v_-^0)$  удовлетворяет соотношению (3.7), однако на производные  $\partial v_{\pm}^0 / \partial x_1$  никакие ограничения не наложены. В итоге к условию сопряжения (3.16) присоединяется пара *краевых* условий

$$N_{\pm}^2 (\nabla_x) u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) = 0, \quad x \in \Upsilon. \quad (3.19)$$

Итак, в случае однорядного клепания на отрезке  $\Upsilon$  появляются два условия сопряжения (3.7), (3.17) и два (плюс и минус) краевых условия (3.19). Многорядью заклепок ставится в соответствие четыре “чистых” условия сопряжения (3.7), (3.9), (3.18). В обеих ситуациях полученные связи компонент  $u_+^0$  и  $u_-^0$  называем условиями сопряжения для функции  $u^0$ .

**3.4. Разрешимость предельных задач.** Поскольку условия сопряжения (3.7), (3.9) и (3.18) (или (3.16), (3.17)) выполнены для любой функции  $u^0 \in H^4(\Omega)$ , уравнения (3.1) можно распространить на всю область  $\Omega$ , а краевые условия (3.2) — на ее границу  $\Gamma$ . В результате образуется задача о цельной пластине  $\Omega$  со свободной кромкой (см. книгу [1, глава 4, §30]).

**Теорема 3.1.** В ситуации (1.14) предельная задача (3.1), (3.2) в области  $\Omega$  имеет решение  $u^0 \in H^4(\Omega)$  при выполнении трех условий разрешимости

$$I^0(f^0; \Omega) := \int_{\Omega} f^0(x) dx = 0, \quad I^j(f^0; \Omega) := \int_{\Omega} x_j f^0(x) dx = 0, \quad j=1, 2. \quad (3.20)$$

Решение определено с точностью до слагаемого из подпространства (1.18), но подчиненное условиям ортогональности

$$I^p(u^0; \Omega) = 0, \quad p = 0, 1, 2, \quad (3.21)$$

оно становится единственным и удовлетворяет оценке

$$\|u^0; H^4(\Omega)\| \leq c \|f^0; L^2(\Omega)\| \quad (3.22)$$

с множителем  $c$ , не зависящим от  $f^0$ .

В ситуации (1.15) найденные условия (3.7), (3.17) и (3.19) не гарантируют гладкость решения  $u^0$ , так как производная  $\partial u_{\pm}^0 / \partial x_1$  может приобрести скачок на линии раздела областей  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ . Более того, теория Кондратьева [12] (см. также монографии [17, 18]) предсказывает появление сингулярностей у производных решения задачи (3.1), (3.2), (3.7), (3.17), (3.19) в концах  $Q^{\pm}$  отрезка  $\Upsilon$ , которые при этом следует интерпретировать как угловые точки на границе  $\Gamma$  (см. далее п. 6, §3). Вместе с тем вариационная задача (3.14) поставлена корректно — сформулируем соответствующее утверждение.

**Теорема 3.2.** Решение

$$u^0 \in \mathcal{H}^0 = \{(u_+^0, u_-^0) : u_{\pm}^0 \in H^2(\Omega_{\pm}), u_+^0 = u_-^0 \text{ на } \Upsilon\} \quad (3.23)$$

задачи (3.14) существует в том и только в том случае, если выполнены четыре условия разрешимости

$$I^k(f^0; \Omega) = 0, \quad k = 0, 2, \quad I^1(f_{\tau}^0; \Omega_{\tau}) = 0, \quad \tau = \pm. \quad (3.24)$$

Само решение определено с точностью до слагаемого из пространства (1.17), но условия ортогональности

$$I^k(u^0; \Omega) = 0, \quad k = 0, 2, \quad I^1(u_{\tau}^0; \Omega_{\tau}) = 0, \quad \tau = \pm, \quad (3.25)$$

делают его единственным и обеспечивают оценку

$$\sum_{\pm} \|u_{\pm}^0; H^2(\Omega_{\pm})\| \leq c \|f^0; L^2(\Omega)\|$$

с множителем  $c$ , не зависящим от  $f^0$ .

**3.5. Обсуждение.** Условия, назначенные на разделительной линии  $\Upsilon$  в ситуации (1.15), означают, что прогиб сочленения  $\Omega_+ \cup \Omega_-$  является непрерывным, однако углы поворотов одной пластины относительно другой никак не фиксируются на  $\Upsilon$  — вместо этого согласно краевому условию (3.19) обращаются в нуль главные изгибающие моменты, приложенные к каждой из пластин. Такие свойства присущи шарнирному соединению, в окрестности которого обычно происходит концентрация напряжений, провоцирующая разрушение. Именно по этой причине в практической механике однорядовое клепание не применяется при разработке конструкций из плит, подверженных изгибу посредством приложения моментов (см. справочник [6]). Еще одно, уже математическое, выражение недостатков однорядного клепания — возникновение четвертого условия разрешимости предельной задачи: в случае многорядного клепания два последних равенства из списка (3.24), которые обращают в нуль главные моменты относительно оси  $\Upsilon$ , заменяются одним, менее ограничительным равенством

$$I^1(f_+^0; \Omega_+) + I^1(f_-^0; \Omega_-) = 0,$$

относящимся к суммарному моменту.

Наконец, отметим преимущество многорядового клепания: все упругие поля (прогиб и два угла поворота, перерезывающая сила и два изгибающих момента) с точностью до младших слагаемых оказываются непрерывными при гладкой нагрузке  $f^0$ , то есть даже пара параллельных шеренг заклепок препятствует значительной локализации напряжений в зоне налегания пластин, а само сочленение в главном ведет себя как цельная пластина.

**3.6. Весовые оценки решений.** Для более подробного описания дифференциальных свойств решений около концов отрезка  $\Upsilon$  удобно использовать весовые пространства с отделенной асимптотикой (см. [17, глава 8, §4], [8, §2] и др.). Введем пространства Кондратьева  $V_\beta^l(\Omega_\pm)$  (см. [12]) как пополнение линейного множества  $C_c^\infty(\overline{\Omega_\pm} \setminus \{Q^+, Q^-\})$  по весовой соболевской норме

$$\|u_\pm^0; V_\beta^l(\Omega_\pm)\| = \left( \sum_{k=0}^l \|r^{\beta+k-l} \nabla_x^k u_\pm^0; L^2(\Omega_\pm)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.26)$$

где  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $\beta \in \mathbb{R}$  — показатели гладкости и веса, а  $r = \min_\pm \{|x - Q^\pm|\}$  — расстояние до ближайшего из концов отрезка  $\overline{\Upsilon} = \partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$ . Из-за расходимости интегралов в точках  $Q^\pm$  пространство  $V_\beta^l(\Omega_\pm)$  не содержит линейные функции при ограничении

$$\beta < 2. \quad (3.27)$$

Образуем пространство  $\mathcal{V}_\beta^4(\Omega_\pm)$  из функций

$$u_\pm^0(x) = \tilde{u}_\pm^0(x) + \sum_{\tau=\pm} \chi^\tau(x) L_\pm^\tau(x - Q^\tau), \quad (3.28)$$

в которых фигурируют обращающиеся в нуль<sup>3</sup> в точке  $Q^\tau$  линейные функции

$$L_\pm^\tau(x) = a_\pm^{1\tau} x_1 + a_\pm^{2\tau} (x_2 - Q_2^\tau), \quad (3.29)$$

и снабдим его нормой

$$\|u_\pm; \mathcal{V}_\beta^4(\Omega_\pm)\| = \left( \|\tilde{u}_\pm; V_\beta^4(\Omega_\pm)\|^2 + \sum_{\tau=\pm} \sum_{p=1,2} |a_\pm^{p\tau}|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.30)$$

включающей “сильную” весовую норму остатка и модули коэффициентов отделенных слагаемых (3.29). Здесь показатель  $\beta$  взят из формулы (3.27), а гладкие срезающие функции  $\chi^\pm$  выбраны так, что

$$\chi^\pm = 1 \text{ около точки } Q^\pm, \quad \chi^+ \chi^- \equiv 0 \text{ в области } \Omega. \quad (3.31)$$

Следуя [17, глава 8, §4], [8, §2] и др., называем  $\mathcal{V}_\beta^4(\Omega_\pm)$  пространством *с отделенной асимптотикой*; его гильбертова структура, порожденная нормами (3.30) и (3.26), далее востребована не будет. Заметив, что  $\beta - 4 + k < 0$  в (3.26) при  $k = 0, 1, 2$  и  $\beta < 2$ , видим, что  $\mathcal{V}_\beta^4(\Omega_\pm) \subset H^2(\Omega_\pm)$ . Наконец, определим пространство составных функций

$$\mathcal{V}_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-) = \{u^0 = (u_+^0, u_-^0) : u_\pm^0 \in \mathcal{V}_\beta^4(\Omega_\pm) \text{ и выполнены условия (3.7), (3.17), (3.19)}\}. \quad (3.32)$$

Отметим, что наложенные в (3.32) на функции (3.28) ограничения обеспечивают связи  $a_\pm^{2+} = a_\pm^{2-}$  двух пар коэффициентов отделенных линейных функций (3.29), но оставляют четыре коэффициента  $a_\pm^{1+}$  и  $a_\pm^{1-}$  произвольными. Иными словами, коразмерность подпространства

$$V_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-) = \{u^0 = (u_+^0, u_-^0) : u_\pm^0 \in V_\beta^4(\Omega_\pm) \text{ и выполнены условия (3.7), (3.17), (3.19)}\} \quad (3.33)$$

в пространстве (3.32) равна шести.

В финальной теореме 3.3 будет установлена разрешимость вариационной задачи (3.14) в классе функций, допускающих представление (3.28) с ингредиентами

$$L_\pm^\tau(x) = a^{0\tau} + a_\pm^{1\tau} x_1 + a^{2\tau} (x_2 - Q_2^\tau) \quad (3.34)$$

(отказались от введенного в (3.29) ограничения  $L_\pm^\tau(Q^\tau) = 0$ ,  $\tau = \pm$ ). В итоге функции  $u_\pm^0 \in H^2(\Omega_\pm^0)$  становятся решением дифференциальной задачи

<sup>3</sup>Этот ограничение снято в финальной теореме 3.3.



(3.1), (3.2), (3.7), (3.17), (3.19). Несмотря на то, что возникшая предельная задача в  $\Omega_+ \cup \Omega_-$  не является краевой, сформулированное утверждение проверяется по разработанной в книге [17, глава 6, §1] схеме (см. также обзор [8, §2]). Для удобства читателя воспроизведем шаги этой схемы.

1°. Отправной пункт теории Кондратьева [12] — исследование модельных задач, полученных из исходной задачи (3.1), (3.2), (3.7), (3.17), (3.19) спрямлением границы и замораживанием коэффициентов в (угловых) точках  $Q^\pm$ . Для определенности рассмотрим нижнюю точку  $Q^- = \mathcal{O}$  на рис. 1а, которой отвечает полуплоскость

$$\Xi = \{x : x_2 > x_1 \operatorname{tg} \alpha\}, \quad (3.35)$$

где  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  — угол между осью абсцисс и касательной к контуру  $\Gamma$  в начале координат  $\mathcal{O}$ . Положительная полуось ординат  $Y$  пересекает полуплоскость (3.35) на два бесконечных угла  $\Xi_\pm$  (рис. 2а), на которых заданы функции  $U_\pm$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta^2 U_\pm(x) = 0, \quad x \in \Xi_\pm. \quad (3.36)$$

На границе полуплоскости (3.35) поставлены условия Неймана

$$N_\alpha^q(\nabla_x)U_\pm(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi, \quad \pm x_1 > 0, \quad q = 2, 3, \quad (3.37)$$

где  $N_\alpha^q$  — операторы (1.6), в которых  $\varkappa = 0$  и  $n = x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha$ ,  $s = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$ . Наконец, условия сопряжения на полуоси  $Y$  выглядят так:

$$\begin{aligned} U_+(+0, x_2) - U_-(-0, x_2) &= 0, \\ N_+^3(\nabla_x)U_+(+0, x_2) + N_-^3(\nabla_x)U_-(-0, x_2) &= 0, \quad x_2 > 0, \\ N_\pm^2(\nabla_x)U_\pm(\pm 0, x_2) &= 0, \quad x_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Мы подразумеваем под *степенно-логарифмическим* решением модельной задачи (3.36)–(3.38) составную функцию  $U = (U_+, U_-)$  с компонентами

$$U_\pm(x) = r^{1+\lambda} \Phi_\pm(\varphi; \ln r). \quad (3.39)$$

Здесь  $(r, \varphi)$  — система полярных координат с центром  $\mathcal{O}$ ,  $r > 0$  и  $\varphi \in (\alpha, \pi + \alpha)$  в полуплоскости  $\Xi$ . Кроме того,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , а  $\Phi_\pm$  — многочлены переменной  $\ln r$  степени  $\deg \Phi_\pm$ , коэффициенты которых гладко зависят от угловой переменной  $\varphi$ . Подставим *степенное* ( $\deg \Phi_\pm = 0$ ) решение (3.39) в задачу (3.36)–(3.38) и, отделив радиальную переменную, получим полиномиальный пучок

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \ni \lambda \mapsto & \left( \mathfrak{A}(\lambda, \varphi, \partial_\varphi) : H^4\left(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \times H^4\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \alpha + \pi\right) \right. \\ & \left. \rightarrow L^2\left(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \times L^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \alpha + \pi\right) \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

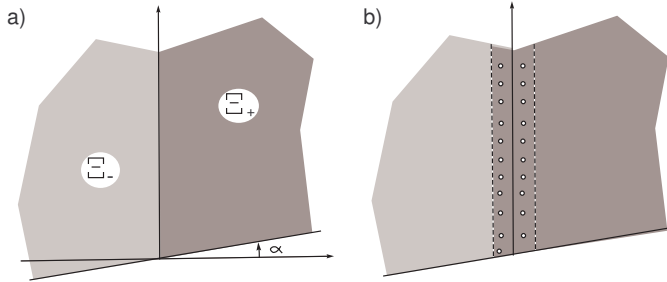


Рис. 2. Составная полуплоскость (а) и две бесконечные угловые пластины, соединенные двумя рядами заклепок (б).

Пространства Соболева в (3.40) предназначены для функций  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$ , а пространства Лебега — для функций  $r^{3-\lambda}\Delta_x^2(r^{1+\lambda}\Phi_+)$  и  $r^{3-\lambda}\Delta_x^2(r^{1+\lambda}\Phi_-)$  угловой переменной  $\varphi$ . Наконец, последние сомножители  $\mathbb{C}^2$  в формуле (3.40) нужны из-за порожденных условиями (3.37) и (3.38) связей в точках  $\varphi = \alpha, \alpha + \pi$  и  $\varphi = \pi/2$  соответственно.

2°. Известно [12] (см. также [17, глава 1, §1]), что спектр  $\mathfrak{S}$  пучка (3.40) состоит из нормальных собственных чисел без конечных точек сгущения. Множество  $\mathfrak{S}$  лежит в объединении полосы и двойного угла на комплексной плоскости, то есть

$$\mathfrak{S} \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leq \kappa_0 + \kappa_1 |\operatorname{Re} \lambda| \}, \quad \kappa_q \geq 0.$$

Кроме того, в силу формальной самосопряженности задачи (3.36)–(3.38) и вещественности коэффициентов ее дифференциальных операторов справедлива импликация

$$\lambda \in \mathfrak{S} \Rightarrow -\bar{\lambda}, \bar{\lambda} \in \mathfrak{S},$$

а значит, множество  $\mathfrak{S}$  симметрично относительно обеих осей комплексной плоскости.

Убедимся в том, что на мнимой оси расположено только нулевое собственное число пучка. Пусть  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  и  $U_{\pm}(x) = r^{1+\lambda}\Phi(\varphi)$  — какое-нибудь отвечающее  $\lambda$  степенное решение. На обе позиции в формулу Грина на множестве  $\mathbb{K}(\rho) = \{x \in \Xi : \rho < r < 1/\rho\}$  подставим функции  $U_{\pm}$  и получим, что

$$\sum_{\pm} E(U_{\pm}, \overline{U_{\pm}}; \mathbb{K}_{\pm}(\rho)) = \sum_{\pm} \int_{\mathbb{K}_{\pm}(\rho)} \overline{U_{\pm}(x)} \Delta_x^2 U_{\pm}(x) dx$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\pm} \int_{\partial \mathbb{K}_{\pm}(\rho) \setminus Y} \left( \overline{U_{\pm}(x)} N^3(x, \nabla_x) U_{\pm}(x) - \overline{\partial_n U_{\pm}(x)} N^2(x, \nabla_x) U_{\pm}(x) \right) ds_x \\
& - \int_{\rho}^{1/\rho} \sum_{\pm} \left( \overline{U_{\pm}(\pm 0, x_2)} N_{\pm}^3(\nabla_x) U_{\pm}(\pm 0, x_2) \right. \\
& \quad \left. \pm \frac{\partial U_{\pm}}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) N_{\pm}^2(\nabla_x) U_{\pm}(\pm 0, x_2) \right) dx_2. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Интегралы по секторам  $\mathbb{K}_{\pm}(\rho) = \{x \in \mathbb{K}(\rho) : \pm x_1 > 0\}$  и интеграл по отрезку  $Y(\rho) = \{0\} \times (\rho, 1/\rho)$  обращаются в нуль согласно уравнениям (3.36) и условиям сопряжения (3.38). Интегралы по внешним боковым сторонам секторов аннулируются краевыми условиями (3.37). Остались интегралы по дугам  $\zeta(\rho) = \{x \in \mathbb{K}(\rho) : r = \rho\}$  и  $\zeta(1/\rho)$ . Подынтегральное выражение у них — однородная функция переменной  $r = |x|$  степени  $-1$ , и поэтому упомянутые интегралы взаимно уничтожаются из-за разнонаправленности внешних нормалей на дугах. Таким образом, форма (1.9) из левой части (3.41) равна нулю, а значит,  $U_{\pm}$  — однородные линейные функции в силу полиномиального свойства функционала энергии (1.9). Первое условие сопряжения (3.38) показывает, что

$$U_{\pm}(x) = c_{\pm}^1 x_1 + c_{\pm}^2 x_2 \quad (3.42)$$

с некоторыми постоянными  $c_{+}^1, c_{-}^1$  и  $c^2$ . Таким образом,  $\lambda = 0$  — единственное собственное число пучка (3.41) на мнимой оси, а его геометрическая кратность (количество линейно независимых собственных векторов) равна трем. Согласно формуле (3.42) соответствующие собственные векторы  $(U_{+}, U_{-})$  имеют вид

$$\Phi_{(1)}^0(\varphi) = (\cos \varphi, 0), \quad \Phi_{(2)}^0(\varphi) = (0, \cos \varphi), \quad \Phi_{(3)}^0(\varphi) = (\sin \varphi, \sin \varphi). \quad (3.43)$$

Почти дословным повторением выкладок, проведенных в статье [19] (см. также [8, предложение 2.3 (2)]), можно убедиться в том, что каждый собственный вектор  $\Phi_{(q)}^0$  из списка (3.43) обладает присоединенным  $\Phi_{(q)}^1$ , и каждая жорданова цепочка имеет длину два. Иными словами, полная алгебраическая кратность (общее количество собственных и присоединенных векторов) собственного числа  $\lambda = 0$  равна шести. Кроме того, собственные и присоединенные векторы образуют степенные решения

$$U_{(1)}^0(x) = (x_1, 0), \quad U_{(2)}^0(x) = (0, x_1), \quad U_{(3)}^0(x) = (x_2, x_2),$$

и степенно-логарифмические решения (3.39)

$$\begin{aligned} U_{(1)}^1(x) &= (x_1 \ln r, 0) + r\Phi_{(1)}^1(\varphi), \\ U_{(2)}^1(x) &= (0, x_1 \ln r) + r\Phi_{(2)}^1(\varphi), \\ U_{(3)}^1(x) &= (x_2 \ln r, x_2 \ln r) + r\Phi_{(3)}^1(\varphi). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Теперь при учете упомянутых общих свойств множества  $\mathfrak{S}$  находим такое зависящее от коэффициента Пуассона  $\nu$  и угла  $\alpha$  положительное число  $b$ , что  $\lambda = 0$  — единственная точка спектра пучка  $\mathfrak{A}$  в полосе  $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\operatorname{Re} \lambda| < b\}$ , а на сторонах полосы собственные числа все-таки есть. Подчеркнем, что  $b \leq 1$ , поскольку  $\lambda = -1$  — собственное число, которому отвечает постоянный собственный вектор.

Итак, в согласии с ограничением (3.27) весовой показатель можно зафиксировать следующим образом:

$$\beta \in (2 - b, 2), \quad \text{где } b \in (0, 1). \tag{3.45}$$

3°. Рассмотрим отвечающее задаче (3.1), (3.2), (3.7), (3.17), (3.19) отображение

$$\begin{aligned} A_\beta: V_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-) \ni u^0 &= (u_+^0, u_-^0) \\ \mapsto \{\Delta_x^2 u_\pm^0, N^2 u_\pm^0|_{\Gamma_\pm}, N^2 u_\pm^0|_{\Gamma_\pm}\} &\in \prod_{\pm} (V_\beta^0(\Omega_\pm) \times V_\beta^{3/2}(\Gamma_\pm) \times V_\beta^{1/2}(\Gamma_\pm)) \\ &=: R_\beta^0(\Omega_+ \cup \Omega_-). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Здесь  $V_\beta^{l-1/2}(\Gamma_\pm)$  — пространство следов на  $\Gamma_\pm = \partial\Omega_\pm \setminus \bar{\Upsilon}$  функций из  $V_\beta^l(\Omega_\pm)$ ,  $l \geq 1$ , снабженное естественной следовой нормой (ср. далее формулу (4.33))

$$\|g; V_\beta^{l-1/2}(\Gamma_\pm)\| = \inf \left\{ \|G; V_\beta^l(\Omega_\pm)\| \mid g = G \text{ на } \Gamma_\pm \right\}.$$

Согласно выбору (3.45) показателя  $\beta$  отображение (3.46) фредгольмово. Поскольку  $V_\beta^4(\Omega_\pm) \subset H^2(\Omega_\pm)$  при ограничении (3.27) и линейные функции не попадают в это пространство, отображение (3.46) — мономорфизм. Предложение 3.5.2 из книги [17] показывает, что оператор  $A_{4-\beta}$  служит формально сопряженным оператором для  $A_\beta$ , то есть оказывается фредгольмовым эпиморфизмом. Таким образом,

$$0 = \dim \ker A_\beta = \dim \operatorname{coker} A_{4-\beta}, \quad \dim \ker A_{4-\beta} = \dim \operatorname{coker} A_\beta.$$

Кроме того, теорема 3.3.3 [17] о приращении индекса обеспечивает формулу

$$\operatorname{Ind} A_{4-\beta} = \operatorname{Ind} A_\beta + 2 \times 6,$$

где двойка изображает количество угловых точек, а шестерка — полную алгебраическую кратность чисто мнимого спектра пучка (3.40). В итоге приведенные формулы гарантируют, что

$$\text{Ind}A_\beta = -\dim \text{coke}A_\beta = -6.$$

Введем естественное расширение  $\mathcal{A}_\beta$  оператора (3.46) на пространство  $\mathcal{V}_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-)$ ; при этом согласно определениям (3.32) и (3.33) область значений  $\mathcal{R}_\beta^0(\Omega_+ \cup \Omega_-) = R_\beta^0(\Omega_+ \cup \Omega_-)$  не изменится, а индекс обратится в нуль:

$$\text{Ind}A_\beta = \text{Ind}\mathcal{A}_\beta + \dim(\mathcal{V}_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-)/V_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-)) = -6 + 6 = 0 \quad (3.47)$$

(размерность фактор-пространства из средней части (3.47) указана после формулы (3.33)). Итак, фредгольмов оператор

$$A_\beta : \mathcal{V}_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-) \longrightarrow \mathcal{R}_\beta^0(\Omega_+ \cup \Omega_-) \quad (3.48)$$

имеет нулевой индекс.

**Замечание 3.2.** Поскольку  $\chi_\pm(Q^\pm) = 1$  благодаря определению (3.31), эти срезающие функции не попадают в пространство (3.32) при ограничении (3.27). Кроме того,  $\mathcal{V}_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-) \subset \mathcal{H}^0$  (см. определение (3.33)), а значит, ядро оператора (3.48) двумерно и образовано составными функциями  $(c_+x_1, c_-x_1)$  с коэффициентами  $c_\pm \in \mathbb{R}$ . Следовательно, подпространство  $\text{coke}A_\beta$  натянута на дефектные функционалы  $I^1(\cdot; \Omega_\pm)$  (ср. соотношения (3.20) и (3.24)). Наконец, элементы пространства  $\mathcal{V}_\beta^4(\Omega_+ \cup \Omega_-)$  удовлетворяют четырем условиям Соболева в точках  $Q^\pm$

$$u_\pm^0(\pm 0, 0) = 0, \quad u_\pm^0(\pm 0, 1) = 0 \quad (3.49)$$

в дополнение к условию сопряжения (3.7) на  $\Upsilon$ , которое порождает только две следующие связи в точках  $Q^\tau$ :

$$u_+^0(+0, 0) = u_-^0(-0, 0), \quad u_+^0(+0, 1) = u_-^0(-0, 1). \quad (3.50)$$

Для обобщенного решения (3.23) задачи (3.14) в пространстве (3.13), разумеется, выполнены соотношения (3.50), однако равенства (3.49), вообще говоря, нарушены. Поэтому образуем функции

$$\widehat{u}_\pm^0(x) = u_\pm^0(x) - \sum_{\tau=\pm} \chi^\tau(x) u^0(Q^\tau),$$

в которых  $u^0(Q^\tau) = u_\pm^0(Q^\tau)$  в согласии с формулами (3.50). Эти функции удовлетворяют условиям Соболева (3.49) и прежней задаче, однако с новыми правыми частями

$$\widehat{f}_\pm^0(x) = f_\pm^0(x) - \sum_{\tau=\pm} u^0(Q^\tau) \Delta^2 \chi^\tau(x) \quad \text{в уравнении (3.1),}$$

$$\widehat{g}_{\pm}^{q\Gamma}(x) = - \sum_{\tau=\pm} u^0(Q^\tau) N^q(x, \nabla_x) \chi^\tau(x) \quad \text{в краевых условиях (3.2),}$$

$$\widehat{g}_{\pm}^{2\Upsilon}(x) = - \sum_{\tau=\pm} u^0(Q^\tau) N_{\pm}^2(\nabla_x) \chi^\tau(x) \quad \text{в краевых условиях (3.19).}$$

Кроме того,

$$\widehat{u}_{\pm}^0 \in H^2(\Omega_{\pm}^0) \subset V_{\gamma-2}^2(\Omega_{\pm}^0) \quad \text{при любом } \gamma \geq 4,$$

а также

$$\widehat{f}_{\pm}^0 \in L^2(\Omega_{\pm}^0) = V_0^0(\Omega_{\pm}^0), \quad \widehat{g}_{\pm}^{q\Gamma} \in C_c^\infty(\Gamma_{\pm} \setminus \{Q^+, Q^-\}), \quad q=2, 3, \quad \widehat{g}_{\pm}^{2\Upsilon} \in C_c^\infty(\Upsilon).$$

Следовательно, теоремы Кондратьева [12] о повышении гладкости решений и их асимптотике в угловых точках (см. также [17, глава 4, §2 и §3]) показывают, что, во-первых,  $\widehat{u}_{\pm}^0 \in V_{\gamma}^4(\Omega_{\pm}^0)$  и, во-вторых, в силу равенств  $\widehat{u}_{\pm}^0(Q^\tau) = 0$ ,  $\tau = \pm$ , справедливо представление

$$\widehat{u}_{\pm}^0(x) = \widetilde{u}_{\pm}^0(x) + \sum_{\tau=\pm} \chi^\tau(x) \sum_{m=1,2,3} \sum_{p=0,1} c_{\tau}^{pm} U_{(m)}^p(x - Q^\tau).$$

При этом  $\widetilde{u}_{\pm}^0 \in V_{\beta}^4(\Omega_{\pm})$ ,  $c_{\tau}^{p\alpha} \in \mathbb{R}$ , а  $\beta$  — любой показатель (3.45). Поскольку ни одно из степенно-логарифмических решений (3.44) не попадает в класс Соболева  $H^2$ , коэффициенты  $c_{\tau}^{p\alpha}$  обращаются в нуль, а значит,  $\widehat{u}^0 = (\widehat{u}_{+}^0, \widehat{u}_{-}^0) \in \mathcal{V}_{\beta}^4(\Omega_{+} \cup \Omega_{-})$ . Итак, доказано следующее утверждение.

**Теорема 3.3.** *Если правые части  $f_{\pm}^0 \in L^2(\Omega_{\pm})$  задачи (3.1), (3.2), (3.7), (3.19) удовлетворяют условиям разрешимости (3.24), то обобщенное решение (3.33), предоставленное теоремой 3.2 и, в частности, подчиненное условиям ортогональности (3.25) допускает разложение (3.28), в котором остаток  $\widetilde{u}_{\pm}^0 \in V_{\beta}^4(\Omega_{\pm})$  и восемь свободных коэффициента  $a^{0\tau}$ ,  $a_{\pm}^{1\tau}$ ,  $a^{2\tau}$  линейных функций (3.34) подчинены оценке*

$$\sum_{\tau=\pm} \left( \sum_{\pm} (\|\widetilde{u}_{\pm}^0; V_{\beta}^4(\Omega_{\pm})\| + |a_{\pm}^{1\tau}|) + |a^{0\tau}| + |a^{2\tau}| \right) \leq c \sum_{\tau=\pm} \|f_{\pm}^0; L^2(\Omega_{\pm})\|,$$

причем  $\beta$  — весовой показатель (3.45), а множитель  $c$  не зависит от функций  $f_{\pm}^0$ .

## §4. Обоснование асимптотики

**4.1. Многорядное клепание.** Начнем с рассмотрения случая (1.14), более простого по причине гладкости решения. По решению  $u^0 \in H^4(\Omega)$  предельной задачи (3.1), (3.2) в области  $\Omega$  (условия сопряжения (3.7), (3.9) и

(3.16), (3.17) выполнены автоматически) построим приближенное решение задачи (1.4), (1.5), (1.8). Введем срезающие функции  $X_{\pm}^h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} X_{\pm}^h(x_1) &= 1 \text{ при } \pm x_1 \geq 3\ell_{\pm}h, \\ X_{\pm}^h(x_1) &= 0 \text{ при } \pm x_1 \leq 2\ell_{\pm}h, \quad \left| \frac{\partial^p X_{\pm}^h}{\partial x_1^p}(x_1) \right| \leq c_p h^{-p} \end{aligned} \quad (4.1)$$

и положим

$$\mathbf{u}_{\pm}^h(x) = X_{\pm}^h(x_1)u_{\pm}^0(x) + (1 - X_{\pm}^h(x_1))A_{\pm}(x), \quad x \in \Omega_{\pm}^h, \quad (4.2)$$

где

$$A_{\pm}(x) = u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) + x_1 \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2). \quad (4.3)$$

При этом используется продолжение решений  $u_{\pm}^0$  в классе  $H^4$  на окрестность замкнутого отрезка  $\bar{\Upsilon}$  для того, чтобы функция (4.3) была определена на расширенной полоске (1.2)

$$\Theta_{\pm}^h = \{x \in \overline{\Omega_{\pm}^h} : -\ell_{\mp}h \leq \pm x_1 \leq 3\ell_{\pm}h\} \supset \Theta^h \quad (4.4)$$

и при  $x_1 \notin (0, 1)$ . Отметим, что

$$u_{\pm}^0|_{x_1=\pm 0} \in H^{7/2}(0, 1), \quad \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}|_{x_1=\pm 0} \in H^{5/2}(0, 1) \quad \Rightarrow \quad A_{\pm} \in H^2(\Theta_{\pm}^h);$$

здесь  $H^{l+1/2}(0, 1)$  — пространство Соболева–Слободецкого на отрезке  $\Upsilon$ . Кроме того, на самой полоске  $\Theta^h$  функции  $\mathbf{u}_{\pm}^h \in H^2(\Omega_{\pm}^h)$  совпадают в силу условий сопряжения (3.7) и (3.9), означающих, что  $A_+ = A_-$ , и следовательно, условия Соболева (1.8) соблюдены. В итоге составная функция  $\mathbf{u}^h = (\mathbf{u}_+^h, \mathbf{u}_-^h)$  принадлежит пространству (1.11), и разность

$$(v_+^h, v_-^h) = v^h = u^h - \mathbf{u}^h - (L^h, L^h) \in \mathcal{H}^h \quad (4.5)$$

может быть взята в качестве пробной функции в интегральном тождестве (1.12) при любой линейной составляющей

$$L^h(x) = a^{h0} + a^{h1}x_1 + a^{h2}x_2, \quad (4.6)$$

так как  $(L^h, L^h)$  — решение однородной задачи (1.4), (1.5), (1.8).

Вычислим функционал

$$\mathcal{F}^h(v^h) = \sum_{\pm} \left( E(\mathbf{u}_{\pm}^h, v_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h) - (f_{\pm}^0, v_{\pm}^h)_{\Omega_{\pm}^h} \right) - \sum_{\pm} (\tilde{f}_{\pm}^0, v_{\pm}^h)_{\Omega_{\pm}^h}, \quad (4.7)$$

где  $f_{\pm}^0$  и  $\tilde{f}_{\pm}^0$  — слагаемые из следующего представления правых частей уравнений (1.4):

$$f_{\pm}^h(x) = f_{\pm}^0(x) + \tilde{f}_{\pm}^h(x), \quad \text{supp } f_{\pm}^0 \subset \overline{\Omega_{\pm}^0}, \quad \text{supp } \tilde{f}_{\pm}^h \subset \overline{\Omega_{\pm}^h}. \quad (4.8)$$

Кроме того, положим

$$\mathcal{N} := \sum_{\pm} \|f_{\pm}^0; L^2(\Omega_{\pm}^0)\|, \quad \tilde{\mathcal{N}} := h^{-1/2} \sum_{\pm} \|\tilde{f}_{\pm}^h; L^2(\Omega_{\pm}^h)\|. \quad (4.9)$$

Малость остатков  $\tilde{f}_{\pm}^h$  выразим соглашением: величины  $\mathcal{N}$  и  $\tilde{\mathcal{N}}$  имеют одинаковый порядок  $1 = h^0$ . Иными словами, именно выражение  $c(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}})$  послужит мажорантой в оценке близости решений  $u^h$  и  $u^0$  исходной и предельной задач.

Функции  $f_{\pm}^0$  и  $f_{\pm}^h$  подчинены условиям ортогональности (3.20) и

$$I^p(f_{+}^h; \Omega_{+}^h) + I^p(f_{-}^h; \Omega_{-}^h) = 0, \quad p = 0, 1, 2,$$

обеспечивающим разрешимость соответствующих задач. Таким образом, при условии, что сужения  $f_{\pm}^h$  на  $\Theta^h$  не обращаются в нуль тождественно на  $\Theta^h$ , остатки  $\tilde{f}_{\pm}^h$  в представлении (4.8) действительно необходимы, а определения (4.9) содержательны. Кроме того, решение  $u^0 = (u_{+}^0, u_{-}^0)$  задачи (3.1), (3.2) удовлетворяет соотношениям (3.21), однако для функций (4.2) равенства

$$I^p(u_{+}^h; \Omega_{+}^h) + I^p(u_{-}^h; \Omega_{-}^h) = 0, \quad p = 0, 1, 2, \quad (4.10)$$

гарантирующие единственность решения задачи (1.4), (1.5), (1.8), вообще говоря, нарушены. Именно поэтому в формулу (4.5) было введено вычитаемое (4.6), коэффициенты в котором можно подобрать так, чтобы для  $v^h$  были выполнены равенства (4.10), а значит, и оценка (1.21), причем множитель  $c$  в ней можно взять общим для всех  $v_{\pm}^h$  и  $h \leq 1$ , в том числе и для  $h = 0$ .

В силу интегрального тождества (1.12), формулы (4.5) и условий ортогональности (1.19) имеем

$$\mathcal{F}^h(v^h) = - \sum_{\pm} E(v_{\pm}^h, v_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h), \quad (4.11)$$

то есть согласно неравенствам (1.8) и (1.21) приемлемая оценка выражения (4.7) влечет за собой аналогичную оценку норм  $\|v_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\|$ .

Билинейные формы (1.9), фигурирующие в (4.7) и (4.11), представляют собой суммы интегралов по  $\Omega_{\pm}^h$  от разнообразных произведений вторых производных функций  $\mathbf{u}_{\pm}^h$  и  $v_{\pm}^h$ . Преобразуем типичное произведение  $\Delta_x \mathbf{u}_{\pm}^h \Delta_x v_{\pm}^h$  и в конце сформулируем результат для всего выражения (4.7). Имеем

$$\Delta_x \mathbf{u}_{\pm}^h = X_{\pm}^h \Delta_x u_{\pm}^0 + [\Delta_x, X_{\pm}^h](u_{\pm}^0 - A_{\pm}) + (1 - X_{\pm}^h) \Delta_x A_{\pm} \quad (4.12)$$



и

$$\begin{aligned}
& (\Delta_x \mathbf{u}_\pm^h, \Delta_x v_\pm^h)_{\Omega_\pm^h} \\
&= (\Delta_x u_\pm^0, \Delta_x v_\pm^h)_{\Omega_\pm^0} + ([\Delta_x, X_\pm^h](u_\pm^0 - A_\pm), \Delta_x v_\pm^h)_{\Omega_\pm^0} \\
&\quad + ((1 - X_\pm^h)\Delta_x A_\pm, \Delta_x v_\pm^h)_{\Omega_\pm^h} + ((1 - X_\pm^h)\Delta_x u_\pm^0, \Delta_x v_\pm^h)_{\Omega_\pm^0} \\
&=: J_\pm^{h0}(v_\pm^h) + J_\pm^{h1}(v_\pm^h) + J_\pm^{h2}(v_\pm^h) + J_\pm^{h3}(v_\pm^h).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Носители коэффициентов коммутатора (дифференциального оператора первого порядка)

$$[\Delta_x, X_\pm^h] = 2\nabla_x X_\pm^h \cdot \nabla_x + (\Delta_x X_\pm^h) = 2\frac{\partial X_\pm^h}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 X_\pm^h}{\partial x_1^2} \tag{4.14}$$

содержатся в множестве  $\overline{\Theta_\pm^h \cap \Omega_\pm^0}$ ; вне полосы (4.4) обращается в нуль и срезка  $1 - X_\pm^h$ . Кроме того, в силу неравенства (3.22), определений (4.9), (4.3) и включения  $u^0 \in H^4(\Omega) \subset C^2(\overline{\Omega})$  верны оценки

$$\begin{aligned}
& |u^0(x) - A_\pm(x)| \leq ch^2\mathcal{N}, \quad |\nabla_x(u^0(x) - A_\pm(x))| \leq ch\mathcal{N}, \quad x \in \Theta_\pm^h \cap \Omega_\pm^0, \\
& |\nabla_x^2 u^0(x)| \leq c\mathcal{N}, \quad x \in \Omega_\pm^0, \quad \Rightarrow \quad \|(1 - X^h)\Delta_x u^0; L^2(\Theta_\pm^h \cap \Omega_\pm^0)\| \leq ch^{1/2}\mathcal{N}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
\Delta_x A_\pm(x) &= \frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial x_2^2}(\pm 0, x_2) + x_1 \frac{\partial^3 u_\pm^0}{\partial x_1 \partial x_2^2}(\pm 0, x_2), \\
\|\Delta_x A_\pm; L^2(\Theta_\pm^h)\|^2 &\leq c \left( h \left\| \frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial x_2^2}(\pm 0, \cdot); L^2(0, 1) \right\|^2 \right. \\
&\quad \left. + h^3 \left\| \frac{\partial^3 u_\pm^0}{\partial x_1 \partial x_2^2}(\pm 0, \cdot); L^2(0, 1) \right\|^2 \right) \leq ch\mathcal{N}^2.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Следовательно, при учете формул (4.13) и (4.16) выводим искомые соотношения

$$\begin{aligned}
|J_\pm^{h1}(v_\pm^h)| &\leq c(\text{mes}_2 \Theta_\pm^h)^{1/2} \left( \frac{1}{h} \max_{x \in \Theta_\pm^h \cap \Omega_\pm^0} |\nabla_x(u^0(x) - A_\pm(x))| \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h^2} \max_{x \in \Theta_\pm^h \cap \Omega_\pm^0} |u^0(x) - A_\pm(x)| \right) \|\Delta_x v_\pm^h; L^2(\Theta_\pm^h)\| \\
&\leq ch^{1/2}\mathcal{N}\|v_\pm^h; H^2(\Omega_\pm^h)\|, \\
|J_\pm^{h2}(v_\pm^h)| + |J_\pm^{h3}(v_\pm^h)| &\leq ch^{1/2}\mathcal{N}\|v_\pm^h; H^2(\Omega_\pm^h)\|.
\end{aligned}$$

Итак, тиражируя полученные оценки, обнаруживаем, что

$$|\mathcal{F}^h(v^h) - \mathcal{J}^h(v^h)| \leq ch^{1/2}(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}) \|v^h; \mathcal{H}^h\|. \quad (4.17)$$

При этом согласно определению (1.7) операторов  $N_{\pm}^q$  и формулам Грина (1.23) в областях  $\Omega_{\pm}^0$  для решения  $u^0 \in H^4(\Omega)$  задачи (3.1), (3.2) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^h(v^h) &= \sum_{\pm} \left( E(u_{\pm}^0, v_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^0) - (f_{\pm}^0, v_{\pm}^h)_{\Omega_{\pm}^0} \right) \\ &= - \int_{\Upsilon} \left( (v_+^h(x) - v_-^h(x)) N_+^3(\nabla_x) u_+^0(x) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial v_+^h}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_-^h}{\partial x_1}(x) \right) N_+^2(\nabla_x) u_+^0(x) \right) \Big|_{x_1=0} dx_2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}^h(v^h)| &\leq c\mathcal{N} \left( \|v_+^h - v_-^h; L^2(\Upsilon)\| + \|\nabla_x v_+^h - \nabla_x v_-^h; L^2(\Upsilon)\| \right) \\ &\leq ch^{1/2}\mathcal{N} \left( \|v_+^h; H^2(\Omega_+^h)\| + \|v_-^h; H^2(\Omega_-^h)\| \right). \end{aligned}$$

Последняя мажоранта обеспечена очередной леммой.

**Лемма 4.1.** *В ситуации (1.14) функции  $v_{\pm}^h \in H^2(\Omega_{\pm}^h)$ , подчиненные условиям сопряжения Соболева (1.8), удовлетворяют неравенству*

$$\begin{aligned} &h^{-3} \|v_+^h - v_-^h; L^2(\Upsilon)\|^2 + h^{-1} \|\nabla_x v_+^h - \nabla_x v_-^h; L^2(\Upsilon)\|^2 \\ &\leq c \sum_{k=0}^2 h^{-2k-4} \|\nabla_x^k v_+^h - \nabla_x^k v_-^h; L^2(\Theta^h)\|^2 \leq c \sum_{\pm} \|\nabla_x^2 v_{\pm}^h; L^2(\Theta^h)\|^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

в котором множитель  $c$  не зависит от  $v_{\pm}^h$  и  $h \in (0, h_0]$  при некотором  $h_0 > 0$

**Доказательство.** Рассмотрим две соседние прямоугольные ячейки

$$\Xi_k^h = \{x : -\ell_-h \leq x_1 \leq \ell_+h, x_2 \in (kh, (k+1)h)\} \quad (4.20)$$

и  $\Xi_{k+1}^h$ , целиком лежащие в области  $\Omega$  и включающие множества точек  $\mathcal{P}_k^h$  и  $\mathcal{P}_{k+1}^h$  (см. формулу (1.3)). В силу требования (1.14) после растяжения координат  $x \mapsto \xi^k = (h^{-1}x_1, h^{-1}x_2 - k)$  находим в объединении  $\Xi_0 \cup \Xi_1$  ячеек единичного размера три точки

$$P^1, P^2 \in \Xi_0 \quad \text{и} \quad (P_1^1, P_2^1 + 1) \in \Xi_1, \quad (4.21)$$

которые по предположению (1.14) являются вершинами невырожденного треугольника. В силу условий сопряжения Соболева (1.8) разность

$$V_k^h(\xi^k) = v_+^h(h\xi_1^k, h(\xi_2^k + k)) - v_-^h(h\xi_1^k, h(\xi_2^k + k)) \quad (4.22)$$

обращается в нуль в точках (4.21). Любая линейная функция, обладающая там же свойством, оказывается тривиальной. Следовательно, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \|V_k^h; H^2(\overline{\Xi_0 \cup \Xi_1})\|^2 &\leq C \|\nabla_\xi^2 V_k^h; L^2(\Xi_0 \cup \Xi_1)\|^2, \\ \|V_k^h; L^2(\Upsilon_0 \cup \Upsilon_1)\|^2 + \|\nabla_\xi V_k^h; L^2(\Upsilon_0 \cup \Upsilon_1)\|^2 &\leq C \|\nabla_\xi^2 V_k^h; L^2(\Xi_0 \cup \Xi_1)\|^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $\Upsilon_k = \{\xi^k : \xi_1^k = 0, \xi_2^k \in (k, k+1)\}$ , а множитель  $C$  не зависит от  $V^h$ . Обратная замена координат  $\xi^k \mapsto x$  в формулах (4.23) дает неравенство (4.19), в котором произведены замены  $\Upsilon \mapsto \Upsilon_k^h \cup \Upsilon_{k+1}^h$  и  $\Theta^h \mapsto \Xi_k^h \cup \Xi_{k+1}^h$ .

Суммирование полученных неравенств привело бы к искомой оценке (4.19), однако отдельного обследования требуют ячейки  $\Xi_0^h$  и  $\Xi_{N-1}^h$ , прилегающие к искривленным участкам границы  $\partial\Omega$ . Для указанных ячеек вместо объединения  $\Xi_k^h \cup \Xi_{k+1}^h$  нужно ввести множества

$$\Xi_\vee^h = \{x \in \Theta^h : x_2 < 3h\} \quad \text{и} \quad \Xi_\wedge^h = \{x \in \Theta^h : x_2 > (N-3)h\} \quad (4.24)$$

и произвести растяжение координат  $x \mapsto \xi^\vee = (h^{-1}x_1, h^{-1}(x_2 - h))$  и  $x \mapsto \xi^\wedge = (h^{-1}x_1, h^{-1}(x_2 - h(N-2)))$  соответственно. Полученные таким образом множества  $\Xi_\vee(h)$  и  $\Xi_\wedge(h)$  включают точки (4.21) и представляют собой “прямоугольники” фиксированных размеров с одной слабо изогнутой стороной, которую при помощи “почти тождественного” диффеоморфизма можно спрямить. Поэтому на множествах  $\Xi_\vee(h)$  и  $\Xi_\wedge(h)$  по-прежнему выполнены соотношения (4.23), где множители  $C$  можно взять не зависящими от малого  $h > 0$ . Итак, неравенство (4.19) доказано.  $\square$

Сформулируем установленную оценку погрешности асимптотической модели пластин (1.1), соединенных несколькими рядами (1.3) заклепок.

**Теорема 4.1.** *В ситуации (1.14) решения  $u^h \in \mathcal{H}^h$  и  $u^0 \in H^4(\Omega)$  задач (1.4), (1.5), (1.8) и (3.1), (3.2), подчиненные условиям ортогональности (4.10) и (3.21) соответственно, связаны неравенством*

$$\sum_{\pm} \|u_{\pm}^h - \hat{u}_{\pm}^0; H^2(\Omega_{\pm}^h)\| \leq ch^{1/2}(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}), \quad (4.25)$$

в котором  $\hat{u}_{\pm}^0$  — решение  $u_{\pm}^0$ , продолженное в классе  $H^2$  как функции  $A_{\pm}$  на множества  $\Theta^h \setminus \Omega_{\pm}^0$  (см. формулу (4.3)), множитель  $c$  не зависит от малого параметра  $h \in (0, h_0]$  при некотором  $h_0 > 0$  и от ингредиентов представления (4.8) правых частей  $f_{\pm}^h$  уравнений (1.4), а  $\mathcal{N}$  и  $\tilde{\mathcal{N}}$  — нормы (4.9) этих ингредиентов.

**Доказательство.** Соотношения (4.17), (4.18) и (1.21), (4.9) гарантируют, что

$$\sum_{\pm} \|u_{\pm}^h - \mathbf{u}_{\pm}^h - L^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\| \leq ch^{1/2}(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}). \quad (4.26)$$

Осталось заменить функции (4.2) указанными продолжениями  $\hat{u}_{\pm}^0$  составляющих  $u_{\pm}^0$  решений предельной задачи и убрать из левой части (4.26) линейные слагаемые (4.6). На множестве  $\Theta_{\pm}^h \setminus \Omega_{\pm}^0$  функции (4.2) и (4.3) совпадают. В силу оценок (4.17) имеем

$$\begin{aligned} \| \mathbf{u}_{\pm}^h - u_{\pm}^0; H^2(\Omega_{\pm}^0) \|^2 &= \| (1 - X_{\pm}^h)(u_{\pm}^0 - A_{\pm}); H^2(\Omega_{\pm}^0) \|^2 \\ &\leq c \int_{\Theta_{\pm}^h \setminus \Omega_{\pm}^0} (|\nabla_x^2(u_{\pm}^0 - A_{\pm})|^2 + h^{-2}|\nabla_x(u_{\pm}^0 - A_{\pm})|^2 + h^{-4}|u_{\pm}^0 - A_{\pm}|^2) dx \\ &\leq c\mathcal{N}^2 \int_0^{3h\ell_{\pm}} (1 + h^{-2}x_1^2 + h^{-4}x_1^4) dx_1 \leq ch\mathcal{N}^2, \end{aligned}$$

Поскольку при  $p = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} I^p(u_{\pm}^h - \mathbf{u}_{\pm}^h - L^h; \Omega_{\pm}^h) &= 0, \quad \sum_{\pm} I^p(u_{\pm}^0; \Omega_{\pm}^0) = 0, \\ \left| \sum_{\pm} I^p(\hat{u}_{\pm}^0; \Omega_{\pm}^h) \right| &= \left| \sum_{\pm} I^p(A_{\pm}; \Omega_{\pm}^h \setminus \Omega_{\pm}^0) \right| \leq ch\mathcal{N}, \end{aligned}$$

столбец  $a^h = (a^{h0}, a^{h1}, a^{h2})$  коэффициентов линейной функции (4.6) удовлетворяет системе трех алгебраических уравнений

$$M^h a^h = b^h \quad (4.27)$$

с правой частью  $b^h \in \mathbb{R}^3$ ,  $|b^h| \leq ch\mathcal{N}$  и матрицей Грама  $M^h$ , построенной при помощи скалярного произведения в  $L^2(\Omega_{\pm}^h) \times L^2(\Omega_{\pm}^h)$  по линейно независимым функциям 1 и  $x_1, x_2$ . Заметив, что  $(a^h)^T M^h a^h \geq c_M |a^h|^2$ ,  $c_M > 0$ , выводим последнюю из нужных оценок:

$$\|L^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\| \leq c|a^h| \leq c|b^h| \leq ch\mathcal{N}. \quad \square$$

**4.2. Однорядное клепание.** Теперь займемся задачей (1.4), (1.5), (1.8) и отвечающей ей предельной задачей (3.1), (3.2), (3.7), (3.16), (3.19). Схема рассуждений остается прежней, однако в выкладках приходится учитывать сингулярности решений  $u_{\pm}^0$  в концевых точках  $Q_{\pm}^{\pm}$  отрезка  $\Upsilon$ . С этой целью в дополнение к (4.1) введем такие срезающие функции  $\chi^{h\tau} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  для индексов  $\tau = \pm$ :

$$\chi^{h\tau}(x_2) = 1 \text{ при } |x_2 - Q_2^{\tau}| < h, \quad \chi^{h\tau}(x_2) = 0 \text{ при } |x_2 - Q_2^{\tau}| > 2h. \quad (4.28)$$

Носители этих срезов содержат горизонтальные прямые, проходящие через концы  $Q^+$  и  $Q^-$  отрезка  $\Upsilon$ .

Вместо (4.2) образуем новое приближенное решение

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\pm}^h(x) &= X_{\pm}^h(x_1)u_{\pm}^0(x) \\ &+ (1 - X_{\pm}^h(x_1)) \left( \left( 1 - \sum_{\tau=\pm} \chi^{h\tau}(x_2) \right) A_{\pm}(x) + \sum_{\tau=\pm} \chi^{h\tau}(x_2) L_{\pm}^{\tau}(x) \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

в котором фигурируют выражения (4.3) и (3.34), построенные по решению  $u^0 = (u_+^0, u_-^0)$  предельной задачи и его разложению (3.28). Благодаря требованию (1.15) и равенству (3.7) приближенное решение (4.29) удовлетворяет условиям сопряжения (1.8). Его ингредиенты  $u_{\pm}^0$  и  $A_{\pm}^h$  имеют особенности в концах  $Q^{\pm}$  отрезка  $\Upsilon$ , однако эти особенности сглажены срезающими функциями (4.1) и (4.28), а значит, справедливо включение  $(\mathbf{u}_+^h, \mathbf{u}_-^h) \in \mathcal{H}^h$  и разность

$$(v_+^h, v_-^h) = v^h = u^h - \mathbf{u}^h - (L_+^h, L_-^h)$$

можно подставить как пробную функцию в интегральное тождество (1.12) при любых слагаемых

$$L_{\pm}^h(x) = a^{h0} + a_{\pm}^{h1}x_1 + a^{h2}x_2, \quad (4.30)$$

которые, как и в п. 1, §4, вводятся для соблюдения условий ортогональности

$$I^p(u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h) + I^p(u_{\mp}^h; \Omega_{\mp}^h) = 0, \quad p = 0, 2, \quad I^p(u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h) = 0, \quad (4.31)$$

где произведена замена  $u^h \mapsto v^h$ .

Оценка коэффициентов линейных функций (3.34) указаны теоремой 3.3, а для множителей из правой части (4.3) верны соотношения

$$\begin{aligned} u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) &= \tilde{u}_{\pm}^0(\pm 0, x_2) + \sum_{\tau=\pm} \chi^{\tau}(\pm 0, x_2) L_{\pm}^{\tau}(\pm 0, x_2), \\ \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) &= \frac{\partial \tilde{u}_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) + \sum_{\tau=\pm} \frac{\partial(\chi^{\tau} L_{\pm}^{\tau})}{\partial x_1}(\pm 0, x_2), \\ \tilde{u}_{\pm}^0|_{x_1=\pm 0} &\in V_{\beta}^{7/2}(0, 1), \quad \frac{\partial \tilde{u}_{\pm}^0}{\partial x_1}|_{x_1=\pm 0} \in V_{\beta}^{5/2}(0, 1). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Здесь  $V_\beta^{l+1/2}(0, 1)$  — пространство следов на  $\Upsilon$  функций из пространства Кондратьева  $V_\beta^{l+1}(\Omega_\pm^0)$ . Известно (см., например, [20] или [17, 18]), что норма в весовом следовом пространстве выглядит так:

$$\left( \sum_{k=0}^l \left\| r^{\beta+k-l-1/2} \frac{\partial^k V}{\partial x_2^k}; L^2(0, 1) \right\|^2 + \int_0^1 \int_{|x_2-y|<r/2} r^{2\beta} \left| \frac{\partial^l V}{\partial x_2^l}(x_2) - \frac{\partial^l V}{\partial y^l}(y) \right|^2 \frac{dx_2 dy}{|x_2 - y|^2} \right)^{1/2}. \quad (4.33)$$

Нормы функций (4.32) в указанных пространствах не превосходят  $c\mathcal{N}$ . Кроме того, вложение пространств Кондратьева в весовые классы Гёльдера [20] показывает, что

$$\max_{x \in \Omega_\pm^0} \left\{ r^{\beta-3} |\tilde{u}_\pm^0(x)| + r^{\beta-2} |\nabla_x \tilde{u}_\pm^0(x)| + r^{\beta-1} |\nabla_x^2 \tilde{u}_\pm^0(x)| \right\} \leq c \|\tilde{u}_\pm^0; V_\beta^4(\Omega_\pm^0)\| \leq c\mathcal{N}. \quad (4.34)$$

Как и в п. 1, §4, примем представление (4.8) и обозначение (4.9), а при вычислении функционала (4.7) ограничимся обработкой аналогичного (4.12) выражения

$$\begin{aligned} \Delta_x \mathbf{u}_\pm^h &= X_\pm^h \Delta_x u_\pm^0 + [\Delta_x, X_\pm^h] \left( u_\pm^0 - \left( 1 - \sum_{\tau=\pm} \chi^{h\tau} \right) A_\pm^h - \sum_{\tau=\pm} \chi^{h\tau} L_\pm^\tau \right) \\ &+ (1 - X_\pm^h) \left( 1 - \sum_{\tau=\pm} \chi^{h\tau} \right) \Delta_x A_\pm - (1 - X_\pm^h) \sum_{\tau=\pm} [\Delta_x, \chi^{h\tau}] (L_\pm^{h\tau} - A_\pm) \\ &= S_{1\pm}^h + S_{2\pm}^h + S_{3\pm}^h + S_{4\pm}^h. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Опять требуется оценить  $L^2(\Omega_\pm^h)$ -нормы слагаемых  $S_{j\pm}^h$  из правой части (4.35). Поскольку в силу формулы Тейлора и соотношений (4.3), (4.34) на носителях коэффициентов коммутатора (4.14) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} r^{\beta-1} |u_\pm^0(x) - A_\pm(x)| + \frac{1}{h} r^{\beta-1} |\nabla_x u_\pm^0(x) - \nabla_x A_\pm(x)| \\ \leq c \max_{x \in \Theta_\pm^h \cap \Omega_\pm^0} (r^{\beta-1} |\nabla_x^2 u_\pm^0(x)|) \leq c\mathcal{N}, \end{aligned}$$

имеем

$$\|S_{2\pm}^h; L^2(\Theta_\pm^h \cap \Omega_\pm^0)\|^2$$

$$\begin{aligned} &\leq c \int_{\Theta_{\pm}^h \cap \Omega_{\pm}^0} \left( \frac{1}{h^2} \max_{x \in \Theta_{\pm}^h \cap \Omega_{\pm}^0} |u_{\pm}^0(x) - A_{\pm}(x)| + \frac{1}{h} \max_{x \in \Theta_{\pm}^h \cap \Omega_{\pm}^0} |\nabla_x u_{\pm}^0(x) - \nabla_x A_{\pm}(x)| \right)^2 dx \\ &\leq c \int_0^1 \int_0^1 r^{2(1-\beta)} dx \mathcal{N}^2 \leq ch^{\min\{1, 2(2-\beta)\}} \mathcal{N}^2. \quad (4.36) \end{aligned}$$

Аналогично выкладкам (4.15) и (4.36) приходим к соотношению

$$\|(1 - X_{\pm}^h) \Delta_x u_{\pm}^0; L^2(\Theta_{\pm}^h \cap \Omega_{\pm}^0)\| \leq c \mathcal{N} \left( \int_{\Theta_{\pm}^h \cap \Omega_{\pm}^0} r^{2(1-\beta)} dx \right)^{1/2} \leq ch^{\min\{2-\beta, 1/2\}} \mathcal{N}.$$

Подчеркнем, что  $S_{1\pm}^h + (1 - X_{\pm}^h) \Delta_x u_{\pm}^0 = \Delta_x u_{\pm}^0$ .

Носители коэффициентов дифференциального оператора

$$(1 - X_{\pm}^h) [\Delta_x, \chi^{h\tau}]$$

расположены на множестве  $\vartheta_{\pm}^{h\tau} = \{x \in \overline{\Theta_{\pm}^h} : h \leq |x_2 - Q_2^{\tau}| \leq 2h\}$ , где  $C \geq h^{-1}r \geq c > 0$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} L_{\pm}^{\tau}(x) &= L_{\pm}^{\tau}(\pm 0, x_2) + x_1 \frac{\partial L_{\pm}^{\tau}}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) \\ \Rightarrow A_{\pm}(x) - L_{\pm}^{\tau}(x) &= \tilde{u}_{\pm}^0(\pm 0, x_2) + \frac{\partial \tilde{u}_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2), \quad x \in \vartheta_{\pm}^{h\tau}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу неравенства (4.34) верна оценка

$$\begin{aligned} &\|S_{4\pm}^h; L^2(\Theta_{\pm}^h)\|^2 \\ &\leq c \sum_{\pm} \int_{\vartheta_{\pm}^h} \left( \frac{1}{h^4} |A_{\pm}(x) - L_{\pm}^{\tau}(x)|^2 + \frac{1}{h^2} |\nabla_x A_{\pm}(x) - \nabla_x L_{\pm}^{\tau}(x)|^2 \right) dx \\ &\leq c \sum_{\pm} \int_{\vartheta_{\pm}^h} \left( \frac{1}{h^4} |\tilde{u}_{\pm}^0(\pm 0, x_2)|^2 + \frac{1}{h^2} \left| \frac{\partial \tilde{u}_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\pm}^0}{\partial x_1^2}(\pm 0, x_2) \right|^2 \right) dx \\ &\leq ch^2 \mathcal{N}^2 \left( \frac{1}{h^4} h^{2(3-\beta)} + \frac{1}{h^2} h^{2(2-\beta)} + h^{2(1-\beta)} \right) \leq ch^{\min\{1, 2(2-\beta)\}} \mathcal{N}^2. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\Delta_x A_{\pm}(x) = \frac{\partial^2 u_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(\pm 0, x_2) + x_1 \frac{\partial^3 u_{\pm}^0}{\partial x_1 \partial x_2^2}(\pm 0, x_2),$$

причем  $\frac{\partial^2 u_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(\pm 0, \cdot) \in V_{\beta}^{3/2}(0, 1)$  и  $\frac{\partial^3 u_{\pm}^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} \in V_{\beta}^{1/2}(0, 1)$ , так как двукратное дифференцирование уничтожает линейные функции. Следовательно, при

учете формул (4.34), (4.33) и (3.45) находим, что

$$\begin{aligned}
 & \|S_{3\pm}^h; L^2(\{x \in \Theta_{\pm}^h : x_2 \in (h, 1-h)\})\|^2 \\
 & \leq c \int_h^{1-h} \int_{-hl_{\mp}}^{3hl_{\pm}} \left( \left| \frac{\partial^2 u_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(\pm 0, x_2) \right|^2 + x_1^2 \left| \frac{\partial^3 u_{\pm}^0}{\partial x_1 \partial x_2^2}(\pm 0, x_2) \right|^2 \right) dx \\
 & \leq ch \int_h^{1-h} \left( \left| \frac{\partial^2 u_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(\pm 0, x_2) \right|^2 + h^2 \left| \frac{\partial^3 u_{\pm}^0}{\partial x_1 \partial x_2^2}(\pm 0, x_2) \right|^2 \right) dx_2 \quad (4.37) \\
 & \leq ch \int_h^{1-h} \left( h^{\min\{0, 3-2\beta\}} r^{2\beta-3} \left| \frac{\partial^2 u_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(\pm 0, x_2) \right|^2 \right. \\
 & \quad \left. + h^{3-2\beta} r^{2\beta-1} \left| \frac{\partial^3 u_{\pm}^0}{\partial x_1 \partial x_2^2}(\pm 0, x_2) \right|^2 \right) dx_2 \leq ch^{\min\{1, 2(2-\beta)\}} \mathcal{N}^2.
 \end{aligned}$$

Полученные оценки (4.36)–(4.37) и подобные им для других фигурирующих в билинейной форме (1.9) произведений вторых производных функций  $\mathbf{u}_{\pm}^h$  и  $v_{\pm}^h$  показывают, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{\pm} (E(\mathbf{u}_{\pm}^h, v_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h) - E(u_{\pm}^0, v_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^0)) \right| \\
 & \leq ch^{\min\{2-\beta, 1/2\}} \mathcal{N} \sum_{\pm} \|v_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\|. \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Для того чтобы закончить анализ погрешностей, хотелось бы воспользоваться интегральным тождеством (3.14) для решения  $u^0 \in \mathcal{H}^0$  предельной задачи, однако этому препятствует отсутствие включения функции  $v^h = (v_+^h, v_-^h)$  в пространство  $\mathcal{H}^0$  из (3.13), так как она не удовлетворяет условию сопряжения (3.7). Применению формулы Грина (1.23) в областях  $\Omega_+^0$  и  $\Omega_-^0$  для  $u_{\pm}^0$  и  $v_{\pm}^h$  мешают сильные особенности третьих производных решения  $u^0$  в угловых точках  $Q^+$  и  $Q^-$  (см. теорему 3.3). Для преодоления упомянутых затруднений введем вспомогательные функции

$$\mathbf{v}_{\pm}^h(x) = v_{\pm}^h(x) - \frac{1}{2} \sum_{\tau=\pm} \pm \chi_h^{\tau}(x) (v_+^h(Q^{\tau}) - v_-^h(Q^{\tau})), \quad (4.39)$$

в которых фигурируют новые срезы

$$\chi_h^{\tau}(x) = 1 \text{ при } |x - Q^{\tau}| \leq h/2, \quad \chi_h^{\tau}(x) = 0 \text{ при } |x - Q^{\tau}| \geq h. \quad (4.40)$$



Заметим, что, во-первых,

$$\mathbf{v}_+^h(+0, x_2) - \mathbf{v}_-^h(-0, x_2) = 0 \text{ при } x_2 = 0, 1, \quad (4.41)$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\pm} \left( E(u_{\pm}^0, v_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^0) - E(u_{\pm}^0, \mathbf{v}_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^0) \right) \right| \\ & \leq c \sum_{\pm} \|\nabla_x^2 u_{\pm}^0; L^2(\Omega_{\pm}^0)\| \sum_{\tau=\pm} \|\nabla_x^2 \chi_{\sqrt{h}}^{\tau}; L^2(\Omega_{\pm}^0)\| |v_+^h(Q^{\tau}) - v_-^h(Q^{\tau})| \quad (4.42) \\ & \leq c \mathcal{N} h^{-1/2} \sum_{\tau=\pm} |v_+^h(Q^{\tau}) - v_-^h(Q^{\tau})| \end{aligned}$$

и, в-третьих, в силу формул (4.29)–(4.30), (4.3) и равенства (3.7) для  $u_{\pm}^0$  имеем

$$v_+^h(+0, x_2) - v_-^h(-0, x_2) = u_+^h(+0, x_2) - u_-^h(-0, x_2) \text{ при } x_2 \in [0, 1]. \quad (4.43)$$

**Лемма 4.2.** Пусть в ситуации (1.15) функции  $v_{\pm}^h \in H^2(\Omega_{\pm}^h)$  подчинены условиям сопряжения (1.8) и условиям ортогональности (4.31). Тогда для разностей

$$\begin{aligned} v_{\ominus}^h(x_2) &= v_+^h(+0, x_2) - v_-^h(+0, x_2), \\ \mathbf{v}_{\ominus}^h(x_2) &= \mathbf{v}_+^h(+0, x_2) - \mathbf{v}_-^h(+0, x_2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

(см. формулы (4.39) и (4.41)) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & h^{-1}|v_{\ominus}^h(0)| + h^{-1}|v_{\ominus}^h(1)| + h^{-3/2}\|v_{\ominus}^h; L^2(0, 1)\| \\ & + h^{-1/2}\left\| \frac{\partial v_{\ominus}^h}{\partial x_2}; L^2(0, 1) \right\| \leq c \sum_{\pm} \|v_{\pm}^h; H^2(\Theta^h)\|, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\|r^{-3/2}(1 + |\ln r|)^{-1} \mathbf{v}_{\ominus}^h; L^2(0, 1)\| \leq c \sum_{\pm} \|v_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\|, \quad (4.46)$$

в которых множители с не зависят от  $v_{\pm}^h$  и  $h \in (0, h_0]$  при некотором  $h_0 > 0$ .

**Доказательство.** Сначала повторим рассуждения, использованные при проверке леммы 3.3, однако рассмотрим только одиночные ячейки (4.20), без дублирования. Сделаем растяжение координат

$$x \mapsto \xi^k = (h^{-1}x_1, h^{-1}x_2 - k)$$

и введем функцию (4.22). Благодаря условию Соболева  $V_k^h(P^1) = 0$  в точке  $P^1 = (0, P_2^1) \in \Xi_1$  (ср. формулы (4.43) и (1.9)) находим такую постоянную  $C_k^h$ , что справедливо неравенство

$$\|V_k^h - C_k^h \xi_1; H^1(\Xi_1)\|^2 \leq c \|\nabla_\xi^2 V_k^h; L^2(\Xi_1)\|^2.$$

Вместе с обычным следовым неравенством (см., например, [5, глава 1])

$$\|V_k^h(0, \cdot); L^2(0, 1)\|^2 + \left\| \frac{\partial V_k^h}{\partial \xi_2}(0, \cdot); L^2(0, 1) \right\|^2 \leq c \|V_k^h; H^2(\Xi_1)\|^2,$$

в котором постоянная  $C_k^h$  отсутствует по понятной причине, обратная замена  $\xi^k \mapsto x$  и суммирование по  $k = 0, \dots, N-1$  обеспечивает соотношение

$$h^{-3} \|v_\ominus^h; L^2(\Upsilon)\|^2 + h^{-1} \left\| \frac{\partial v_\ominus^h}{\partial x_2}; L^2(\Upsilon) \right\|^2 \leq c \sum_{\pm} \|\nabla_x^2 v_\pm^h; L^2(\Xi_1)\|^2. \quad (4.47)$$

Отметим, что крайние ячейки (4.24) обрабатываются так же, как и при проверке леммы 4.1.

Теперь в силу неравенства (4.47) простейшая оценка

$$\begin{aligned} |v_\ominus^h(0)|^2 + |v_\ominus^h(1)|^2 &\leq c \left( h \left\| \frac{\partial v_\ominus^h}{\partial x_2}; L^2(0, 1) \right\|^2 + \left(1 + \frac{1}{h}\right) \|v_\ominus^h; L^2(0, 1)\|^2 \right) \\ &\leq ch^2 \sum_{\pm} \|\nabla_x^2 v_\pm^h; L^2(\Xi_1)\|^2 \end{aligned}$$

полностью доказывает соотношение (4.45).

Оценка (4.46) обеспечена еще одним — теперь весовым — следовым неравенством (первым)

$$\begin{aligned} &\|r^{-3/2}(1 + |\ln r|)^{-1} \mathbf{v}_\ominus^h; L^2(\Upsilon)\|^2 \\ &\leq c \sum_{\pm} \left( \|r^{-2}(1 + |\ln r|)^{-1} \mathbf{v}_\pm^h; L^2(\Omega_\pm^h)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|r^{-1}(1 + |\ln r|)^{-1} \nabla_x \mathbf{v}_\pm^h; L^2(\Omega_\pm^h)\|^2 \right) \\ &\leq C \sum_{\pm} \|\nabla_x^2 \mathbf{v}_\pm^h; L^2(\Omega_\pm^h)\|^2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Второе по счету неравенство в (4.48) вытекает из следующих вариантов одномерного неравенства Харди (ср. неравенство (2.7)):

$$\int_0^1 \frac{1}{|\ln r|^2} |W(r)|^2 \frac{dr}{r} \leq 4 \int_0^1 \left| \frac{dW}{dr}(r) \right|^2 r dr \quad \forall W \in C^1[0, 1], \quad W(1) = 0, \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{1}{(1 + |\ln r|)^2} |V(r)|^2 \frac{dr}{r^3} \\
& \leq 4 \int_0^1 \frac{1}{(1 + |\ln r|)^2} \left| \frac{dV}{dr}(r) \right|^2 \frac{dr}{r} \quad \forall V \in C^1[0, 1], V(0) = 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Формула (4.49) — обычное неравенство Харди “с логарифмом”, а формула (4.50) доказывается так:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{1}{(1 + |\ln r|)^2} |V(r)|^2 \frac{dr}{r^3} \\
& = 2 \int_0^1 \frac{1}{r^3} \frac{1}{(1 + |\ln r|)^2} \int_0^r V(t) \frac{dV}{dt}(t) dt dr \\
& \leq 2 \int_0^1 |V(t)| \left| \frac{dV}{dt}(t) \right| \int_t^1 \frac{1}{r^3} \frac{1}{(1 + |\ln r|)^2} dr dt \\
& \leq 2 \int_0^1 |V(t)| \left| \frac{dV}{dt}(t) \right| \frac{1}{t} \frac{1}{(1 + |\ln t|)^2} \int_t^1 \frac{dr}{r^2} dr dt \\
& \leq 2 \int_0^1 |V(t)| \left| \frac{dV}{dt}(t) \right| \frac{1}{t} \frac{1}{(1 + |\ln t|)^2} \frac{1}{t} dt \\
& \leq 2 \left( \int_0^1 \frac{1}{(1 + |\ln t|)^2} |V(t)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \left( \int_0^1 \frac{1}{(1 + |\ln t|)^2} \left| \frac{dV}{dt}(t) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Весовое следовое неравенство, использованное в (4.48), проверяется по стандартной схеме (см., например, [5, глава 1]). Оценки весовых норм в  $L^2(\Omega_{\pm}^h)$  получаются подстановкой в неравенства Харди (4.49) и (4.50) соответственно произведений  $\chi^\tau \nabla_x \mathbf{v}_{\pm}^h$  и  $\chi^\tau \mathbf{v}_{\pm}^h$ , записанных в полярных координатах  $(r_\tau, \varphi_\tau)$  с центром  $Q^\tau$ . Наконец,

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\| \\
& \leq c \left( \|v_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\| + \sum_{\tau=\pm} |v_+^h(Q^\tau) - v_-^h(Q^\tau)| \|\chi_\tau^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\| \right).
\end{aligned} \tag{4.51}$$

При этом имеет место соотношение<sup>4</sup>.

$$\|\chi_h^\tau; H^2(\Omega_\pm^h)\|^2 \leq c((h^{-2})^{-2} + (h^{-1})^{-2} + 1) \text{mes}_2(\Omega_\pm^h \cap \text{supp } \chi_h^\tau) \leq ch^{-2}.$$

В результате множитель при разности  $v_+^h(Q^\tau) - v_-^h(Q^\tau)$  в (4.51) приобретает рост  $O(h^{-1})$ , который однако компенсируется благодаря вытекающей из (4.45) оценке модуля той же разности с множителем  $h$  в мажоранте.  $\square$

Теперь применим формулу интегрирования по частям и при учете краевых условий (3.19) и условий сопряжения (3.17) получим аналогично выкладке (4.18), что

$$\begin{aligned} & \sum_{\pm} \left( E(u_{\pm}^0, \mathbf{v}_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^0) - (f_{\pm}^0, \mathbf{v}_{\pm}^h)_{\Omega_{\pm}^0} \right) \\ &= - \int_0^1 (\mathbf{v}_+^h(0, x_2) - \mathbf{v}_-^h(0, x_2)) N_+^3(\nabla_x) u_+^0(0, x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Последний интеграл разобьем на три, сузив интегрирование на интервалы  $(h, 1 - h)$  и  $(0, h)$ ,  $(1 - h, 1)$ . На первом из них  $r > h$ , а значит, согласно включению  $r^{\beta-1/2} N_+^3 u_+^0 \in L^2(\Upsilon)$  (см. (4.34) и (4.33)), а также оценке (4.45) и определениям (4.44) в лемме 4.2 имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_h^{1-h} (\dots) dx_2 \right| &\leq c \mathcal{N} \left( \int_h^{1-h} r^{1-2\beta} |\mathbf{v}_{\ominus}^h(x_2)|^2 dx_2 \right)^{1/2} \\ &\leq c \mathcal{N} h^{-\beta+1/2} \left( \int_h^{1-h} |\mathbf{v}_{\ominus}^h(x_2)|^2 dx_2 \right)^{1/2} \\ &\leq c \mathcal{N} h^{-\beta+1/2} \|v_{\ominus}^h; L^2(\Upsilon)\| \leq ch^{2-\beta} \mathcal{N} \sum_{\pm} \|v_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\|, \end{aligned}$$

так как  $\mathbf{v}_{\ominus}^h(x_2) = v_{\ominus}^h(x_2)$  на интервале  $(h, 1 - h) \ni x_2$  в силу определений (4.39) и (4.40).

Кроме того, при помощи весовой оценки (4.46) и соотношения  $r < h$  на втором интервале  $(0, h) \ni x_2$ , находим, что

$$\left| \int_0^h (\dots) dx_2 \right| \leq c \left( \int_0^h r^{1-2\beta} |\mathbf{v}_{\ominus}^h(x_2)|^2 dx_2 \right)^{1/2} \|N_+^3 u_+^0; V_{\beta-1/2}^0(\Upsilon)\|$$

<sup>4</sup>Оно применялось и в формуле (4.42)

$$\begin{aligned} &\leq ch^{2-\beta}(1 + |\ln h|) \left( \int_0^h r^{-3}(1 + |\ln r|)^{-2} |\mathbf{v}_\ominus^h(x_2)|^2 dx_2 \right)^{1/2} \|u_\pm^0; V_\beta^4(\Omega_\pm^0)\| \\ &\leq ch^{2-\beta}(1 + |\ln h|) \mathcal{N} \sum_{\pm} \|v_\pm^h; H^2(\Omega_\pm^h)\|. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается интеграл по  $(1-h, 1) \ni x_2$ . Отметим, что в приведенных выкладках были приняты во внимание простые неравенства  $1-2\beta < 0$  и  $4-2\beta > 0$ . Итак,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\pm} (E(u_\pm^0, \mathbf{v}_\pm^h; \Omega_\pm^0) - (f_\pm^0, \mathbf{v}_\pm^h)_{\Omega_\pm^0}) \right| \\ &\leq ch^{2-\beta}(1 + |\ln h|) \mathcal{N} \sum_{\pm} \|v_\pm^h; H^2(\Omega_\pm^h)\|. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Теперь формулы (4.38), (4.52) и (4.42), (4.45), а также интегральное тождество (1.12) с пробной функцией  $v^h$  и соотношения (4.8), (4.9), (1.19) для правых частей  $f_\pm^h$  исходной задачи (1.4), (1.5), (1.8) показывают, что

$$\left| \sum_{\pm} E(v_\pm^h, v_\pm^h; \Omega_\pm^h) \right| \leq ch^{\min\{1/2, 2-\beta\}} (\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}).$$

Отсюда и из неравенства (1.21) вытекает вторая теорема об асимптотике.

**Теорема 4.2.** В ситуации (1.15) решения  $u^h$  и  $u^0$  задач (1.4), (1.5), (1.8) и (3.1), (3.2), (3.7), (3.17), (3.19), подчиненные условиям ортогональности (4.31) и (3.25) соответственно, связаны неравенством

$$\sum_{\pm} \|u_\pm^h - \mathbf{u}_\pm^h; H^2(\Omega_\pm^h)\| \leq c_\beta h^{\min\{1/2, 2-\beta\}} (\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}), \quad (4.53)$$

в котором  $\mathbf{u}_\pm^h$  — приближенное решение, построенное по формулам (4.35) и (4.3), (3.28), (3.34),  $\beta$  — зафиксированный весовой показатель (3.45), множитель  $c_\beta$  не зависит от малого параметра  $h \in (0, h_0]$  при некотором  $h_0 > 0$  и от ингредиентов представления (4.8) правых частей  $f_\pm^h$  уравнений (1.4), а  $\mathcal{N}$  и  $\tilde{\mathcal{N}}$  — нормы (4.9) этих ингредиентов.

**Замечание 4.1.** В неравенстве (4.53) был “забыт” множитель  $1 + |\ln h|$ , присутствующий в правой части (4.52). Это возможно потому, что в качестве  $\beta$  берется любой показатель из интервала (3.45). При дополнительных требованиях к правым частям  $f_\pm^0$  предельной задачи в  $\Omega_\pm^0 \cup \Omega_\mp^0$  используемые для вывода (4.53) весовые оценки можно уточнить при помощи результатов [20] о разрешимости эллиптических краевых задач в

весовых классах Гёльдера и тем самым получить более точную мажоранту  $c(h^{1/2} + h^b |\ln h|^m)(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}})$ , где  $m \in \mathbb{N}$  — показатель, определяемый по длинам жордановых цепочек, которые отвечают собственным числам пучка (3.40) на прямой  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = b\}$  (см. п. 6, §3). Таким образом, множитель  $c_\beta$  из теоремы 4.2 может неограниченно возрастать при  $\beta \rightarrow 2 - b + 0$  в случае  $b \leq 1/2$ .

В отличие от теоремы 4.1, относящейся к ситуации (1.14), в теореме 4.2 из асимптотического решения (4.29) не были удалены срезающие функции  $X_\pm^h$  и  $\chi^{h\pm}$ . Дело в том, что кандидат (4.3) для продолжения решения  $u_\pm^0$  с областей  $\Omega_\pm^0$  на тонкие полоски  $\Omega_\pm^h \setminus \Omega_\pm^0$  может не попасть в пространство Соболева  $H^2(\Omega_\pm^h)$  из-за неинтегрируемых квадратично особенностей  $O((\min\{x_2, 1 - x_2\})^{1+b})$  производных  $\frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial x_2^2}(\pm 0, x_2)$  на отрезках  $\{x : \pm x_1 \in (0, \ell_\pm h), x_2 = q\}$ ,  $q = 0, 1$ . Разумеется, возможно привлечение специального оператора продолжения, который правильно обрабатывает особенности решений в угловых точках, однако такой оператор никак не упрощает конструкцию приближенного решения.

**4.3. Еще раз о вариационном подходе.** Прежде всего закончим доказательство теоремы 1.1. При учете итерированного неравенства Пуанкаре обнаруживаем линейные функции

$$L_\pm^h(x) = a_\pm^{h0} + x_1 a_\pm^{h1} + x_2 a_\pm^{h2}, \tag{4.54}$$

при которых для разностей  $\hat{u}_\pm^h = u_\pm^h - L_\pm^h$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_\pm^h; H^1(\Omega_\pm^h)\|^2 &\leq c \|\nabla_x^2 \hat{u}_\pm^h; L^2(\Omega_\pm^h)\|^2 \\ &= c \|\nabla_x^2 u_\pm^h; L^2(\Omega_\pm^h)\|^2 \leq CE(u_\pm^h, u_\pm^h; \Omega_\pm^h). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Столбцы коэффициентов  $a_\pm^h = (a_\pm^{h0}, a_\pm^{h1}, a_\pm^{h2})$  из (4.54) находятся из системы линейных уравнений (ср. систему (4.27))

$$M_\pm^h a_\pm^h = b_\pm^h,$$

причем столбец  $b_\pm^h$  составлен из интегралов  $b_\pm^{hp} = I^p(u_\pm^h; \Omega_\pm^h)$  (см. (3.20)), а  $M_\pm^h$  — симметричная и положительно определенная матрица Грама, построенная при помощи скалярного произведения в  $L^2(\Omega_\pm^h)$  по линейно независимым функциям 1 и  $x_1, x_2$ . Положительные постоянные  $c$  и  $C$  в неравенствах (4.55) и

$$C|a_\pm^h|^2 \geq (a_\pm^h)^\top M_\pm^h a_\pm^h \geq c|a_\pm^h|^2$$

можно считать не зависящими от  $h \in [0, h_0]$  при некотором  $h_0 > 0$  потому, что при малом  $h$  “почти тождественный” диффеоморфизм переводит  $\Omega_{\pm}^h$  в фиксированную область  $\Omega_{\pm}^0$ .

В ситуации (1.14) условия ортогональности (1.20) с подпространством (1.17) влекут за собой равенства

$$b_{\pm}^h = -b_{\mp}^h \quad \Rightarrow \quad a_{\pm}^h = \pm(M_{\pm}^h)^{-1}b_{\pm}^h. \quad (4.56)$$

Отталкиваясь от (второго) неравенства (4.19) для разности  $u_{+}^h - u_{-}^h$  и ее производной по переменной  $x_1$  и применяя обеспеченную формулой Ньютона–Лейбница оценку

$$\|v_{\pm}^h; L^2(\Theta^h)\|^2 \leq ch\|v_{\pm}^h; H^1(\Omega_{\pm}^h)\|^2$$

к функциям  $\widehat{u}_{\pm}^h$  и  $\frac{\partial \widehat{u}_{\pm}^h}{\partial x_1}$ , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} & h|a_{+}^{h0} - a_{-}^{h0}|^2 + h|a_{+}^{h2} - a_{-}^{h2}|^2 \\ & \leq c(\|u_{+}^h - u_{-}^h; L^2(\Theta^h)\|^2 + \|\widehat{u}_{+}^h - \widehat{u}_{-}^h; L^2(\Theta^h)\|^2) \\ & \leq c \sum_{\pm} (h^4 \|u_{\pm}^h; L^2(\Omega_{\pm}^h)\|^2 + h \|\widehat{u}_{\pm}^h; H^1(\Omega_{\pm}^h)\|^2) \\ & \leq ch \sum_{\pm} E(u_{\pm}^h, u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & h|a_{+}^{h1} - a_{-}^{h1}|^2 \\ & \leq c \sum_{\pm} \left( h^2 \left\| \frac{\partial u_{+}^h}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{-}^h}{\partial x_1}; L^2(\Theta^h) \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \widehat{u}_{+}^h}{\partial x_1} - \frac{\partial \widehat{u}_{-}^h}{\partial x_1}; L^2(\Theta^h) \right\|^2 \right) \\ & \leq c \sum_{\pm} \left( h \|\nabla_x^2 u_{\pm}^h; L^2(\Omega_{\pm}^h)\|^2 + h \|\widehat{u}_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\|^2 \right) \\ & \leq ch \sum_{\pm} E(u_{\pm}^h, u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Отметим, что множитель  $h$  в левых частях (4.57) и (4.58) появился из-за соотношения  $\text{mes}_2 \Theta^h = O(h)$ . Следовательно,

$$|b_{+}^h|^2 \leq c \left| ((M_{+}^h)^{-1} + (M_{-}^h)^{-1})b_{+}^h \right|^2 = 4c|a_{+}^h - a_{-}^h|^2 \leq C \sum_{\pm} E(u_{\pm}^h, u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h)$$

и поэтому

$$|a_{\pm}^h|^2 \leq c|b_{+}^h|^2 \leq C \sum_{\pm} E(u_{\pm}^h, u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h). \quad (4.59)$$

Итак, полученные оценки (4.55) и (4.59) приводят к искомому неравенству (1.21).

В ситуации (1.15) формулы (1.20), (1.17) в дополнение к (4.56) показывают, что

$$b_{\pm}^h = 0, \tag{4.60}$$

однако неравенство (4.45) из леммы 4.2, заменяющее неравенство (4.19) в лемме 4.1, не содержит производную  $\partial v_{\ominus}^h / \partial x_1$ , то есть формула (4.58) становится недоступной. Вместе с тем, положив  $\widehat{a}_{\pm}^h = (a_{\pm}^{h0}, 0, a_{\pm}^{h2})$  и обозначив  $\widehat{M}_{\pm}^h$  сужение  $M_{\pm}^h$  на подпространство  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$  (ср. ограничение (4.60)), выводим из (4.57), что

$$\begin{aligned} |b_{+}^h|^2 &= |\widehat{b}_{+}^h|^2 \leq c \left| \left( (\widehat{M}_{+}^h)^{-1} + (\widehat{M}_{-}^h)^{-1} \right) \widehat{b}_{+}^h \right|^2 \\ &= 4c |\widehat{a}_{+}^h - \widehat{a}_{-}^h|^2 \leq C \sum_{\pm} E(u_{\pm}^h, u_{\pm}^h; \Omega_{\pm}^h). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает формула (4.59), а значит, неравенство (1.21) с не зависящим от  $h \in [0, h_0]$  множителем  $c$  установлено в обеих ситуациях.

Теперь мы осуществим предельный переход в интегральном тождестве (1.12). Зафиксировав не зависящие от  $h$  величины  $\mathcal{N}$  и  $\widetilde{\mathcal{N}}$  из (4.9), выводим из (1.21) равномерную ограниченность норм  $\|u_{\pm}^h; H^2(\Omega_{\pm}^h)\|$ , а значит,

$$u_{\pm}^h \rightarrow u_{\pm}^0 \text{ слабо в } H^2(\Omega_{\pm}^0) \text{ и сильно в } H^1(\Omega_{\pm}^0). \tag{4.61}$$

Кроме того, в силу оценок (4.19) и (4.45) имеем

$$\begin{aligned} u_{+}^h(+0, \cdot) - u_{-}^h(-0, \cdot) &\rightarrow 0 \\ &\text{сильно в } H^1(0, 1) \text{ в ситуациях (1.15) и (1.14),} \\ \frac{\partial u_{+}^h}{\partial x_1}(+0, \cdot) - \frac{\partial u_{-}^h}{\partial x_1}(-0, \cdot) &\rightarrow 0 \\ &\text{сильно в } L^2(0, 1) \text{ в ситуации (1.14).} \end{aligned} \tag{4.62}$$

Эти формулы показывают, что предел  $u^0 = (u_{+}^0, u_{-}^0)$  попадает в пространство  $\mathcal{H}^0$  (см. определение (3.13)).

Выберем составную функцию  $v^0 = (v_{+}^0, v_{-}^0)$ , для которой  $v_{\pm}^0 \in C^{\infty}(\overline{\Omega_{\pm}^0})$  и выполнено условие сопряжения (3.7), а также (3.9) в ситуации (1.14). У пробной функции  $v^h = (v_{+}^h, v_{-}^h)$  для интегрального тождества (1.12) возьмем такие компоненты:

$$v_{\pm}^h(x) = X_{\pm}^h(x_1)v_{\pm}^0(x) + (1 - X_{\pm}^h(x_1))B_{\pm}(x). \tag{4.63}$$

Здесь  $B_{\pm}(x)$  — выражение (4.3) с заменой  $u_{\pm}^0 \mapsto v_{\pm}^0$ , причем благодаря гладкости функций  $v_{\pm}^0$  дополнительные срезки (4.28) в ситуации (1.15) не



нужны. По той же причине проверка соотношений

$$\begin{aligned} \|v_{\pm}^h - v_{\pm}^0; H^2(\Omega_{\pm}^0)\| &\leq c_v h^{1/2}, \\ \|v_{\pm}^h; H^2(\Theta^h \setminus \Omega_{\pm}^h)\| &\leq c_v h^{1/2} \end{aligned} \quad (4.64)$$

вполне очевидна. Множитель  $c_v$  зависит от  $v^0$ , однако формулы (4.61) и (4.64) позволяют осуществить предельный переход  $h \rightarrow +0$  в интегральном тождестве (1.12) с пробной функцией (4.63) и как результат получить интегральное тождество (3.14), а затем по замыканию распространить его на все  $v^0 \in \mathcal{H}^0$ . В итоге заключаем, что указанный в (4.61) предел является решением предельной задачи на множестве  $\Omega_+ \cup \Omega_-$

**Предложение 4.1.** *При сделанных предположениях решения  $u^h \in \mathcal{H}^h$  и  $u^0 \in \mathcal{H}^0$  задач (1.12) и (3.14) соответственно связаны соотношением (4.61).*

Подчеркнем, что теоремы 4.1 и 4.2 были установлены без использования информации о сходимостях (4.61) и (4.62). Иными словами, естественные условия сопряжения, найденные в п. 3, §3 при помощи вариационного подхода, можно сначала считать предположением, а выкладки из п. 1, и п. 2, §4 — его оправданием. При этом названные теоремы об асимптотике не только проверяют сильную сходимость  $u_{\pm}^h \rightarrow u_{\pm}^0$  в  $H^2(\Omega_{\pm}^0)$ , но и указывают ее скорость. В ситуации (1.14) скорость  $O(h^{1/2})$  обеспечена непосредственно неравенством (4.25), а в ситуации (1.15) еще требуется “очистить” приближенное решение (4.29) от срезов  $X_{\pm}^h$  и  $\chi^{h\pm}$ . Поскольку теперь функции  $u_{\pm}^0$  и  $\mathbf{u}_{\pm}^0$  нужно сравнить только на областях  $\Omega_{\pm}^0$ , упомянутые в конце п. 2, §4 проблемы с особенностями функций (4.3) на отрезках  $\{x : \pm x_1 \in (0, \ell_{\pm}h), x_2 = q\}$ ,  $q = 0, 1$ , не возникают, и прежние выкладки с небольшими изменениями приводят к соотношению

$$\|u_{\pm}^h - u_{\pm}^0; H^2(\Omega_{\pm}^0)\| \leq ch^{\min\{1/2, \beta-2\}}(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}).$$

Обратим внимание на то, что конструкцию (4.29), включающую упомянутые срезы и отличающуюся от решения предельной задачи только вблизи тонкой полоски (1.2), можно в некотором смысле считать имитацией пограничных слоев — одномерного, возникающего около полоски  $\Theta^h$  и описываемого решениями задач (2.1)–(2.4), и двумерных, сосредоточенных вблизи концов шеренг заклепок и обсуждаемых далее в п. 2, §5.

## §5. Несколько замечаний

**5.1. Сближенные ряды заклепок.** Пусть пластины  $\Omega_{\pm}^h$  скреплены двумя рядами заклепок (рис. 1с), приближенных один к другому на расстояние  $O(h^2)$ , то есть, например,

$$J = 2, \quad \mathcal{P}(h) = \{P^1, P^{2h}\},$$

$$P^1 = (P_0, P_2^1), \quad P^{2h} = (P_0 + H_0 h, P_2^2), \quad P_2^1 \neq P_2^2, \quad H_0 \neq 0.$$

В пределе при  $h \rightarrow +0$  множество  $\mathcal{P}(0)$  подпадает под ограничение (1.15), хотя при  $h > 0$  у допредельной задачи (1.12) имеется только три линейно независимых условия разрешимости в списке (1.19). Как и в п. 2, §1, считаем, что  $P_0 = 0$ .

При помощи анализа вторых поправочных членов внутреннего и внешних разложений

$$u_{\pm}^h(x) = u_{\pm}^0(x) + hu_{\pm}^1(x) + h^2 u_{\pm}^2(x) + \dots, \quad (5.1)$$

$$w_{\pm}^h(x) = w_{\pm}^0(\xi; x_2) + hw_{\pm}^1(\xi; x_2) + h^2 w_{\pm}^2(\xi; x_2) + \dots \quad (5.2)$$

выясним условия сопряжения, связывающие предельные пластины  $\Omega_{\pm}^0 = \Omega_{\pm}$ . Согласно п. 2, §3 первые члены внутреннего разложения (3.4) приобретают вид (3.10) и (3.11). При этом правая часть (3.10) не зависит от знака плюс или минус ввиду условия сопряжения (3.7). Построим третий член  $h^2 w_{\pm}^2(\xi; x_2)$  внутреннего разложения (5.2). Принимая во внимание слагаемое  $\frac{x_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_{\pm}^0}{\partial x_1^2}(\pm 0, x_2)$  в уточненной формуле Тейлора (3.5), применим процедуру сращивания при учете второго поправочного члена  $h^2 u_{\pm}^2(x)$  во внешних разложениях (5.1) и укажем поведение функции  $w_{\pm}^2$  на бесконечности:

$$w_{\pm}^2(\xi; x_2) = \frac{\xi_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_{\pm}^0}{\partial x_1^2}(\pm 0, x_2) + \xi_1 \frac{\partial u_{\pm}^1}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) + u_{\pm}^2(\pm 0, x_2) + o(1) \text{ при } \xi_1 \rightarrow \pm\infty. \quad (5.3)$$

Уравнение (2.1) с множеством  $\mathcal{P} = \{(0, P_2^1), (0, P_2^2)\}$  выколотых точек и условия периодичности (2.2) передаются функциям  $w_{\pm}^2$  полностью. В краевых условиях на торцах  $\varpi_{\pm} = \{\xi : \xi_1 = \mp \ell_{\mp}, \xi_2 \in (0, 1)\}$  фигурируют однородные дифференциальные операторы (1.7) второго и третьего порядков. При  $\xi \in \varpi_{\pm}$  имеем

$$\begin{aligned} N_{\pm}^3(\nabla_{\xi})(w_{\pm}^0(h^{-1}x; x_2) + hw_{\pm}^1(h^{-1}x; x_2) + h^2 w_{\pm}^2(h^{-1}x; x_2)) \\ = h^{-1} N_{\pm}^3(\nabla_{\xi})w_{\pm}^2(\xi; x_2) + O(1), \end{aligned}$$

$$N_{\pm}^2(\nabla_{\xi})(w_{\pm}^0(h^{-1}x; x_2) + hw_{\pm}^1(h^{-1}x; x_2) + h^2 w_{\pm}^2(h^{-1}x; x_2))$$

$$= N_{\pm}^2(\nabla_{\xi})w_{\pm}^2(\xi; x_2) + \nu \frac{\partial^2 w_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(x_2) + O(h).$$

Производная  $\frac{\partial^2 w_{\pm}^0}{\partial x_2^2}$  присутствует, а производная  $\frac{\partial^3 w_{\pm}^0}{\partial x_1 \partial x_2^2}$  отсутствует потому, что функция  $w_{\pm}^0$  из (3.10) зависит только от медленной переменной  $x_2$ . Таким образом, краевые условия на торцах выглядят так:

$$\begin{aligned} N_{\pm}^3(\nabla_{\xi})w_{\pm}^2(\mp \ell, \xi_2; x_2) &= 0, \\ N_{\pm}^2(\nabla_{\xi})w_{\pm}^2(\mp \ell, \xi_2; x_2) &= -\nu \frac{\partial^2 w_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(x_2), \quad \xi_2 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Наконец, условия сопряжения Соболева (2.4) в точке  $P^2$ , происходящее от аналогичного условия (1.8) в “подвижной” точке  $hP^{2h}$ , становится неоднородным, так как в силу формул (3.10)–(3.12) с  $P_0 = 0$  верны соотношения

$$\begin{aligned} (w_{\pm}^0(\xi; x_2) + hw_{\pm}^1(\xi; x_2) + h^2w_{\pm}^2(\xi; x_2)) \Big|_{\xi_1=hH_0, \xi_2=P_2^2} \\ = u_{\pm}^0(\pm 0, x_2) + h \left( u_{\pm}^1(\pm 0, x_2) + hH_0 \frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}(\pm 0, x_2) \right) \\ + h^2w_{\pm}^2(0, P_2^2; x_2) + O(h^3). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Выражения (5.5) со знаками плюс и минус совпадают с точностью  $O(h^3)$  при условии

$$w_{+}^2(0, P_2^2; x_2) + H_0 \frac{\partial u_{+}^0}{\partial x_1}(+0, x_2) = w_{-}^2(0, P_2^2; x_2) + H_0 \frac{\partial u_{-}^0}{\partial x_1}(-0, x_2). \quad (5.6)$$

Подчеркнем, что в ситуации (1.15) условие сопряжения (3.9), вообще говоря, нарушено, то есть условие вида (3.7) для  $w_{\pm}^2$  — неоднородное. Условие сопряжения в “неподвижной” точке  $P^1$ , разумеется, остается однородным:

$$w_{+}^2(P^1; x_2) = w_{-}^2(P^1; x_2). \quad (5.7)$$

Компоненты решения полученной задачи (2.1), (2.2), (5.4), (5.6), (5.7) ищем в виде

$$w_{\pm}^2(\xi; x_2) = \widehat{w}_{\pm}^2(\xi; x_2) + \frac{\xi_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_{\pm}^0}{\partial x_1^2}(\pm 0, x_2), \quad (5.8)$$

где  $\widehat{w}^2 = (\widehat{w}_{+}^2, \widehat{w}_{-}^2)$  — элемент пространства (2.19). Согласно предложению 2.2 у задачи для  $\widehat{w}^2$  есть три условия разрешимости, которые позволяют определить условия сопряжения на линии  $\Upsilon$  для членов  $u_{\pm}^2$  внешних разложений. Эти же условия можно найти, подставив в формулу Грина

на множестве  $\Pi_+(R) \times \Pi_-(R)$  квадратично растущие функции (5.8) и линейные решения

$$W^0(\xi) = (1, 1), \quad W^+(\xi) = (\xi_1, 0), \quad W^-(\xi) = (0, \xi_1).$$

однородной задачи (2.1)–(2.4). При этом осуществляется предельный переход  $R \rightarrow +\infty$  в длинных прямоугольниках  $\Pi_\pm(R) = \{\xi \in \Pi_\pm : \pm\xi_1 < R\}$ .

Поскольку компоненты  $W_\pm^\pm$  векторов  $W^\pm$  вырождаются в точках  $P^1$  и  $P^2$ , а также справедливо равенство  $W_\mp^\pm = 0$ , упомянутая формула Грина принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( W_\pm^\pm(\mp\ell, \xi_2) N_\pm^3(\nabla_\xi) w_\pm^2(\mp\ell, \xi_2) \pm \frac{\partial W_\pm^\pm}{\partial \xi_1}(\mp\ell, \xi_2) N_\pm^2(\nabla_\xi) w_\pm^2(\mp\ell, \xi_2) \right) d\xi_2 \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left( W_\pm^\pm(\pm R, \xi_2) N_\pm^3(\nabla_\xi) w_\pm^2(\pm R, \xi_2) \right. \\ & \quad \left. \pm \frac{\partial W_\pm^\pm}{\partial \xi_1}(\pm R, \xi_2) N_\pm^2(\nabla_\xi) w_\pm^2(\pm R, \xi_2) \right) d\xi_2. \end{aligned}$$

Отметим, что  $N_\pm^q(\nabla_\xi) W_\pm^\pm = 0$  при  $q = 2, 3$ . Левый интеграл, найденный при помощи соотношений (5.4), равен  $\mp\nu \frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial x_2^2}(\tau 0, x_2)$ , а предел правого, вычисленный при учете соотношения (5.3), равен  $\pm \frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial x_1^2}(\pm 0, x_2)$ . В результате получаем краевые условия (3.19), выведенные в п. 3, §3 иным способом.

В силу формул (5.4) и (3.19) слагаемое  $\widehat{w}_\pm^2$  из (5.8) удовлетворяет однородным краевым условиям (2.3) на торцах  $\varpi_\pm$  полуполос  $\Pi_\pm$ , но, разумеется, привносит дополнительные неоднородности в условия сопряжения (5.6) и (5.7). Решим полученную задачу для  $\widehat{w}^2$  при помощи подхода из п. 4, §2. Отыскиваем компоненты решения в согласованном с представлением (2.28) виде

$$\widehat{w}_\pm^2(\xi) = \pm \mathbf{a}_0 \pm (G_\pm^1(\xi) - G_\pm^2(\xi)) \mathbf{b}_0 + \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_\pm \xi_1, \quad (5.9)$$

При этом постоянные  $\mathbf{c}_0$  и  $\mathbf{c}_\pm$  не фиксируются, а постоянные  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}_0$  предстоит определить. Подчеркнем, что благодаря соотношениям (2.25) и (2.26) выбор

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b}_0, -\mathbf{b}_0)^\top = \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_\perp, \quad \mathbf{e}_\perp = (1, -1)^\top, \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{e}_\perp = 0.$$

столбца коэффициентов при функциях Грина (см. общее представление (2.28)) обеспечивает однородные краевые условия на торцах.

Теперь подставим суммы (5.8) и (5.9) в условия сопряжения (5.6), (5.7). Линейные функции  $\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_\pm \xi_1$  исчезают из них. Таким образом, после несложных преобразований (ср. п. 4, §2) получим систему двух линейных уравнений относительно неизвестных  $\mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{a}_0$ , которая в матричной форме принимает вид

$$2\mathbf{a}_0\mathbf{e} + (\mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^-)\mathbf{e}_\perp\mathbf{b}_0 = \frac{1}{2}H_0(\mathbf{e} + \mathbf{e}_\perp)\mathbf{g}. \quad (5.10)$$

При этом  $\mathbf{G}^\pm$  — симметричные положительно определенные матрицы из леммы 2.2 и

$$\mathbf{g} = \left( \frac{\partial u_-^0}{\partial x_1}(-0, x_2) - \frac{\partial u_+^0}{\partial x_1}(+0, x_2) \right). \quad (5.11)$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= H_0 \left( \mathbf{e}_\perp^\top (\mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^-) \mathbf{e}_\perp \right)^{-1} \mathbf{g}, \\ \mathbf{a}_0 &= \frac{1}{4} \mathbf{e}^\top (\mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^-) \mathbf{e}_\perp \mathbf{b}_0 + \frac{1}{4} H_0 \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Выражение (5.9) для слагаемого  $\widehat{w}_\pm^2(\xi; x_2)$  в представлении (5.8) третьего члена внутреннего разложения (5.2) позволяет частично конкретизировать поведение (5.3) при  $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$  этого члена. Наличие в (5.9) произвольных коэффициентов  $\mathbf{c}_0$  и  $\mathbf{c}_\pm$  показывает, что выполненный шаг асимптотической процедуры не накладывает ограничений на производные  $\frac{\partial u_\pm^1}{\partial x_1}(\pm 0, x_2)$  и сумму  $u_+^2(+0, x_2) + u_-^2(-0, x_2)$ . Вместе с тем разность  $u_+^2(+0, x_2) - u_-^2(-0, x_2)$ , формирующая условие сопряжения вида (3.7) для  $u^2 = (u_+^2, u_-^2)$ , вычисляется полностью. Именно, при учете формул (5.9) и (5.12), (5.11) получаем, что

$$u_+^2(+0, x_2) - u_-^2(-0, x_2) = KH_0 \left( \frac{\partial u_+^0}{\partial x_1}(+0, x_2) - \frac{\partial u_-^0}{\partial x_1}(-0, x_2) \right). \quad (5.13)$$

При этом коэффициент  $K$  определяется достаточно сложным образом по решению (5.12) системы (5.10), а также по коэффициентам в представлении обобщенных функций Грина (2.23) при  $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$  (отметим, что условия ортогональности (2.24) фиксируют  $G_\pm^j$  однозначно). Явное выражение для этого коэффициента приводить не будем, так как краевые условия вида (3.19) для  $u_\pm^2$  также приобретают правые части, для определения которых нужно строить члены  $w_\pm^3$  внутренних разложений. Кроме того, в следующем пункте будет пояснено, что в асимптотические анзацы обязательно нужно включить и другие пограничные слои.

**5.2. Пограничные слои около концов рядов заклепок.** Формальные вычисления из п. 1, §5 в значительной степени бесполезны, так как уже главные члены внешних разложений (3.3) приобретают сингулярности (см. п. 6, §3), которые усугубляются у младших членов (ср. условия сопряжения (5.13) для  $u_{\pm}^2$ , содержащие производные  $\partial u_{\pm}^0/\partial x_1$ ). Иными словами, включение  $u_{\pm}^1 \in H^2(\Omega_{\pm})$  может быть нарушено из-за неинтегрируемых квадратично особенностей вторых производных в точках  $Q^{\pm}$ . Для исправления поведения членов анзацев (3.3) около концов отрезка  $\Upsilon$  требуется построить двумерные пограничные слои со степенным затуханием при удалении от названных точек. К сожалению, соответствующие асимптотические конструкции изучены мало — имеются две публикации [21, 22], предоставляющие полные асимптотические разложения решений задач для скалярного уравнения второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами в прямоугольнике и в области с малым отверстием (соответственно угловые и выколотые точки). Разработанные асимптотические процедуры подсказывают, что и в задаче о скрепленных пластинах нужны двумерные пограничные слои, которые описываются при помощи растянутых координат

$$\xi^- = (h^{-1}x_1, h^{-1}x_2) \quad \text{и} \quad \xi^+ = (h^{-1}x_1, h^{-1}(x_2 - 1)). \quad (5.14)$$

Для определенности рассмотрим окрестность точки  $Q^- = \mathcal{O}$  и первую формулу (5.14). Замена координат  $x \mapsto \xi := \xi^-$  и последующий переход к  $h = 0$  переделывает задачу (1.4), (1.5), (1.8) в задачу, поставленную на двух бесконечных секторах (рис. 2, b)

$$\Xi^{\pm} = \{\xi : \xi_2 > \xi_1 \operatorname{tg} \alpha, \pm \xi_1 > -\ell_{\pm}\},$$

где  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  — угол между касательной к контуру  $\Gamma$  и осью абсцисс. Именно, требуется найти имеющие специальное поведение на бесконечности решения бигармонических уравнений

$$\Delta_{\xi}^2 U_{\pm}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi^{\pm}, \quad (5.15)$$

снабженных краевыми условиями Неймана

$$N^q(\xi, \nabla_{\xi})U_{\pm}(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi^{\pm} \setminus \mathcal{O}, \quad (5.16)$$

и условиями сопряжения Соболева

$$U_+(\xi) = U_-(\xi), \quad \xi \in \mathcal{P}_+^{\infty} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{\xi : (\xi_1, \xi_2 - k) \in \mathcal{P}\}. \quad (5.17)$$

Из-за периодически расположенных точечных условий сопряжения задача (5.15)–(5.17) не подпадает под теорию Кондратьева [12], обслуживающую эллиптические задачи в областях с угловыми и коническими выходами на бесконечность. Имеются две работы автора [23, 24], исследующие

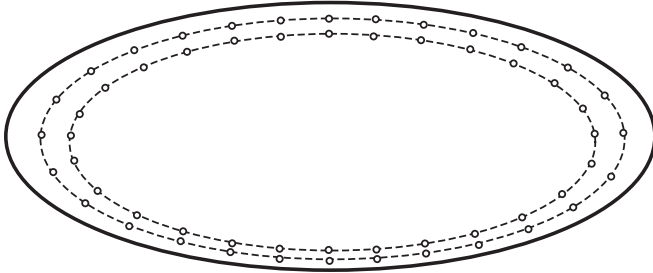


Рис. 3. Двурядное крепление пластины вдоль кромки.

асимптотику на бесконечности решений в угловых областях с периодическими возмущениями границы, однако они относятся к краевым задачам Дирихле и Неймана для формально самосопряженных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка. Приспособление метода [23, 24] к задачам для уравнений четвертого порядка может потребовать значительных усилий. Поэтому вопрос о построении бесконечных асимптотических рядов для решений задачи (1.4), (1.5), (1.8) остается полностью открытым.

**5.3. Пластина с точечным креплением вдоль кромки.** В данной работе рассмотрены прямые периодические ряды заклепок, но аналогичные постановки задач осреднения имеют смысл и в случае искривленных рядов заклепок, например, при креплении пластины мелкими шурупами или гвоздями вдоль ее кромки (см. рис. 3). Приведем одну из возможных, простейшую, формулировку задачи теории пластин Кирхгофа.

Пусть  $\Omega$  и  $(n, s)$  — область и криволинейные координаты в окрестности  $\mathcal{V}$  ее границы  $\Gamma$ , введенные в п. 1, §1, а функции  $H_1, \dots, H_J \in C^\infty(\Gamma)$  удовлетворяют неравенствам

$$0 < H_1(s) < \dots < H_{J-1}(s) < H_J(s), \quad s \in \Gamma. \quad (5.18)$$

Внутри области  $\Omega$  определим непересекающиеся контуры

$$\Gamma_j^h = \{x \in \Omega \cap \mathcal{V} : s \in \Gamma, n = -hH_j(s)\}. \quad (5.19)$$

Здесь  $h = 1/N$  — малый параметр, то есть, как и ранее,  $N$  — большое натуральное число. Масштабированием сведем длину контура  $\Gamma$  к единице и выделим на нем точки  $P_1^0, \dots, P_{J-1}^0$ , причем  $J \geq 1$ ,  $P_J^0 := P_1^0 = \mathcal{O}$  — начало декартовых координат, а расстояние между соседними точками, отмеренное на  $\Gamma$  против часовой стрелки, равно  $h$ . Наконец,  $P_k^{jh}$  — точка пересечения контура (5.19) и перпендикуляра к дуге  $\Gamma$ , восстановленного

из точки  $P_k^0$  (рис. 3). Множество указанных  $NJ$  точек обозначим  $\mathcal{P}^h$  и рассмотрим задачу

$$\Delta_x^2 u^h(x) = f(x), \quad x \in \Omega_\bullet^h = \Omega \setminus \mathcal{P}^h, \quad (5.20)$$

$$N^q(x, \nabla_x) u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad q = 2, 3, \quad (5.21)$$

с точечными условиями Соболева

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \mathcal{P}^h. \quad (5.22)$$

Расположенное около границы “почти периодическое” множество точек вызывает явление пограничного слоя, которое описывается в “растянутых” координатах

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = (-h^{-1}n, h^{-1}s)$$

при помощи решений задачи (2.1)–(2.3), (2.5), где множество  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(h)$  зависит от “медленной” переменной  $s$ ,

$$\mathcal{P}(s) = \{\xi = (H_j(s), 0) \mid j = 1, \dots, J\}. \quad (5.23)$$

Обращаем внимание на то, что множество (5.23) лежит на оси абсцисс  $\xi_1$ , параллельной линиям, на которых назначены условия периодичности (2.2). Поэтому требование (2.2) выполнено в случае  $J \geq 2$ , и лишь при  $J = 1$  приходится иметь дело с аналогичным (1.15) ограничением.

Тот факт, что точки из множества (5.23) “медленно” перемещаются вдоль оси абсцисс не играет принципиальной роли — в п. 1, §5 пояснено, что малые отклонения от периодического расположения точек не влияют на результат осреднения, однако построение младших членов пограничного слоя осложнено дополнительно тем обстоятельством, что в криволинейных координатах бигармонический оператор  $\Delta_x^2$  приобретает переменные коэффициенты и становится оператором  $\mathcal{L}(n, s, \partial_n, \partial_s)$  четвертого порядка. Как следует из рассуждений в п. 2, §3, приспособленных к условиям Соболева (5.22), в случае  $J = 2$  начальные члены  $w^0(\xi; s)$  и  $w^1(\xi; s)$  пограничного слоя обращаются в нуль, а значит, претерпевает незначительные изменения сам способ вывода краевых условий Дирихле

$$u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (5.24)$$

$$\partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (5.25)$$

замыкающих предельное для (5.20) уравнение

$$\Delta_x^2 u^0(x) = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.26)$$

В случае  $J = 1$  построение первого члена  $w^0(\xi; s) = 0$  приводит к краевому условию (5.24). Вместе с тем последующие члены  $w^1(\xi; s)$  и  $w^2(\xi; s)$  (см. п. 2, §3 и п. 1, §5), вообще говоря, нетривиальны. Влияние кривизны  $\kappa$  контура  $\Gamma$ , появляющейся в коэффициентах оператора  $\mathcal{L}(n, s, \partial_n, \partial_s)$ ,





Рис. 4. Склепанные пластины с углами (а) и пластины с широким перехлестом (b).

выясняется при помощи вариационного подхода из п. 2, §3: в силу уравнения (5.26) и устойчивого краевого условия (5.24) формула Грина (3.15) дает естественное краевое условие (см. [2] и [1, глава 4, §30])

$$\Delta_x u^0(x) - (1 - \nu)\varkappa(s)\partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.27)$$

с первым оператором  $N^2(x, \nabla_x)$  в списке (1.6). Краевая задача (5.26), (5.24), (5.25) отвечает пластине Кирхгофа с жестко защемленной кромкой, а задача (5.26), (5.24), (5.27) — пластине со свободно опертой кромкой (см. [1, глава 4, §30]). Наконец, как уже упоминалось, условия Неймана (5.21) в исходной задаче (5.20)–(5.22) имитируют свободную кромку пластины.

Сами функции (5.18) не влияют на предельных задачи. Это обстоятельство подсказывает, что превращение пластины  $\Omega_\bullet^h$  с точечными опорами в пластину  $\Omega$  с закрепленной тем или иным способом кромкой можно осуществить без анализа пограничного слоя, то есть при помощи априорных оценок и предельного перехода в аналогичном (1.12) интегральном тождестве (ср. п. 3, §4). Подчеркнем, что каких-либо результатов в этом направлении не опубликовано.

**5.4. Доступные обобщения.** Требование гладкости границы  $\Gamma = \partial\Omega$  было введено для существенного упрощения доказательства теоремы об асимптотике в ситуации (1.14) многорядного клепания. В случае кусочно-гладкой границы (рис. 4а) утверждения теорем 4.1 и 4.2 остаются практически без изменений. Действительно, угловые точки (отмечены символом  $\star$  на рис. 4а) на участках  $\Gamma^\pm = \partial\Omega_\pm \setminus \overline{\Upsilon}$  вообще никак не влияют на выкладки, приведенные в §4 к оценкам (4.25) и (4.53). Если же дуги  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  встречаются в точке  $Q^\tau$  (отмечена символом  $\bullet$  на рис. 4) под углом  $\psi^\tau \neq \pi$ , то результаты, описанные в п. 6, §3, остаются в силе для обеих ситуаций (1.15) и (1.14), однако, разумеется, величина  $b > 0$ , входящая в требование (3.45) к весовому показателю  $\beta$ , зависит от геометрии и условий сопряжения в

модельной задаче о сочленении двух бесконечных угловых пластин. Этот показатель появляется в финальной оценке точности приближения (ср. мажоранту в (4.53)), а ее вывод почти дословно повторяет вычисления, проделанные в п. 2, §4.

Пусть пластины  $\Omega_{\pm}^1$  налегают одна на другую вдоль полосы

$$\Theta^1 = \{x \in \Omega : -\ell_- < x_1 < \ell_+\}$$

единичной ширины (рис. 4b) и соединены при помощи нескольких рядов заклепок, сближенных на расстояние  $O(h)$  или удаленных на расстояние  $O(1)$  (ср. правые и левый ряды на рис. 4b). Нетрудно предсказать, что в этом случае в качестве предельной задачи выступает система четырех бигармонических уравнений в областях  $\Omega_+ \setminus \Theta^1$ ,  $\Theta_{\wedge}^1$  и  $\Omega_- \setminus \Theta^1$ ,  $\Theta_{\vee}^1$ , которые связаны группами условий сопряжения. При этом область перехлеста  $\Theta^1$  дублируется, а символы  $\wedge$  и  $\vee$  означают “покрышка” и “подложка”. Асимптотический анализ и процедура обоснования асимптотики мало отличаются от изложенных выше, но все-таки требуют изменения формулировок вспомогательных задач. Например, в исследованной в §2 задаче о пограничном слое приходится иметь дело с задачей о сопряжении трех полубесконечных пластин Кирхгофа.

### Список литературы

- [1] Михлин С. Г., *Вариационные методы в математической физике*, Наука, М., 1970.
- [2] Бирман М. Ш., *О вариационном методе Трэффца для уравнения  $\Delta^2 u = f$* , Докл. АН СССР **101** (1955) №2, 201–204.
- [3] Буттаццо Дж., Назаров С. А., *Задача оптимизации для бигармонического уравнения с условиями Соболева*, Пробл. мат. анализ. **58** (2011), 69–78.
- [4] Buttazzo G., Cardone G., Nazarov S. A., *Thin elastic plates supported over small areas. II. Variational-asymptotic models*, J. Convex Anal. **24** (2017), no. 3, 819–855.
- [5] Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [6] Анурьев В. И., *Справочник конструктора-машиностроителя*. Т. 3, 8-е изд., перераб. и доп., Машиностроение, М., 2001.
- [7] Назаров С. А., *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы*, Пробл. мат. анализ. **16** (1997), 167–192.
- [8] Назаров С. А., *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*, Успехи мат. наук **54** (1999), №5, 77–142.
- [9] Ван Дайк М. Д., *Методы возмущений в механике жидкостей*, Мир, М., 1967.
- [10] Ильин А. М., *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [11] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.
- [12] Кондратьев В. А., *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Тр. Моск. мат. о-ва **16** (1967), 209–292.

- [13] Панасенко Г. П., *Асимптотики высших порядков решений задач о контакте периодических структур*, Мат. сб. **110** (1979), №4, 505–538.
- [14] Sanchez-Palencia E., *Un problème d'écoulement lent d'un uide incompressible au travers d'une paroi finement perforée*, Homogenization Methods: Theory and Applications in Physics, Collect. Dir. Études Rech. Elec. France, vol. 57, Eyrolles, Paris, 1985, pp. 371–400.
- [15] Назаров С. А., *Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстроосциллирующей границей*, Изв. РАН. Сер. мат. **72** (2008), №3, 103–158.
- [16] Nazarov S. A., Perez M. E., *On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary*, Rev. Mat. Complut. **31** (2018), no 1, 1–62.
- [17] Nazarov S. A., Plamenevsky V. A. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, De Gruyter Expos. Math., vol. 13, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994.
- [18] Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J., *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, Math. Surveys Monogr., vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [19] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей*, Тр. Ленинград. мат. о-ва **1** (1990), 174–211.
- [20] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *Оценки в  $L_p$  и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе*, Math. Nachr. **77** (1977), 25–82.
- [21] Назаров С. А., *Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами в прямоугольнике*, Мат. сб. **182** (1991), №5, 692–722.
- [22] Назаров С. А., Слудский А. С., *Асимптотика решений краевых задач для уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами в области с малой полостью*, Мат. сб. **189** (1998), №9, 107–142.
- [23] Назаров С. А., *Асимптотика решения задачи Дирихле в угловой области с периодически изменяющейся границей*, Мат. заметки **49** (1991), №5, 86–96.
- [24] Назаров С. А., *Задача Неймана в угловых областях с периодическими и параболическими возмущениями границы*, Тр. Моск. мат. о-ва **69** (2007), 183–243.

Математико-механический  
факультет, С.-Петербургский  
государственный университет,  
Университетская набережная, 7-9,  
199034, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 17 января 2019 г.