Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Асимптотика вероятности продолжения критического ветвящегося процесса, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1977, том 22, выпуск 1, 143–149

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
20 января 2025 г., 22:11:36

[4] **К. Р. Партасарати, Р. Ранга Рао, С. Р. С. Варадхан**, Распределения вероятностей на локально компактных абелевых группах, сб. перев. «Математика», 9, 2 (1965), 115—146.

[5] **В. В. Сазонов, В. Н. Тутубалин**, Распределения вероятностей на топологических группах, Теория вероят. и ее примен., XI, 1 (1966), 3—55.

[6] **Л. С. Понтрягин**, Непрерывные группы, М., изд-во «Наука», 1973.

[7] **А. Вейль**, Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.

[8] **K. Urbanik**, Gaussian measures on locally compact Abelian topological groups, Studia Math., 19, 1 (1960), 77—88.

[9] **В. М. Золотарев**, Общая теория перемножения независимых случайных величин, ДАН СССР, 142, 4 (1962), 788—791.

[10] **А. Робертсон, В. Робертсон**, Топологические векторные пространства, М., изд-во «Мир», 1967.

[11] **H. Heyer**, Factorization of probability measures on locally compact groups, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 8, 3 (1967), 231—258.

[12] **Н. Бурбаки**, Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, М., изд-во «Наука», 1969.

ON A DECOMPOSITION OF A GAUSSIAN DISTRIBUTION ON GROUPS

G. M. FEL'DMAN (KHARKOV)

(*Summary*)

Lel X be a connected locally compact Abelian separable metric group.

The following generalization of Cramér's theorem is obtained: an arbitrary Gaussian distribution μ on the group X has only Gaussian divisors if and only if X does not contain a subgroup isomorphic to the circle group T.

It is also shown that any Gaussian distribution μ, the support of which coincides with X, has a non-Gaussian divisor if and only if the group X is isomorphic to a group of the form $R^p \times T$, $p \geqslant 0$.

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ КРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА

В. А. ВАТУТИН

Будем рассматривать ветвящийся процесс с k типами частиц $N_1, N_2, \ldots, N_k$. Пусть каждая частица типа N_i имеет случайную продолжительность жизни τ_i, независимую от эволюции других частиц. Каждая частица в конце своей жизни независимо от других частиц превращается в некоторую совокупность частиц нулевого возраста. Обозначим $p^i_{\boldsymbol\beta}(y)$, $\boldsymbol\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, условную вероятность того, что частица типа N_i превращается в конце своей жизни в совокупность частиц, состоящую из β_j частиц типа N_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, при условии, что время ее жизни $\tau_i = y$. В дальнейшем все векторы $\boldsymbol\beta$, $\mathbf{s}$ и т. д. будут векторами размерности k, соотношение $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}$ означает, что $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Кроме того, если некоторый параметр, скажем i, принимает значения $1, 2, \ldots, k$, мы будем писать $i = 1 \div k$. Введем производящие функции

$$h^i(y; \mathbf{s}) = \sum_{\boldsymbol\beta} p^i_{\boldsymbol\beta}(y)\, \mathbf{s}^{\boldsymbol\beta}, \quad \text{где} \quad \mathbf{s}^{\boldsymbol\beta} = s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} \ldots s_k^{\beta_k}, \quad i = 1 \div k. \tag{1}$$

Нам понадобится обозначение $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = (x_1y_1, \ldots, x_ky_k)$. Пусть $P^i_\beta(t)$ — вероятность того, что в момент t существует $z^i_j(t) = \beta_j$ частиц типа N_j, $j = 1 \div k$, если в момент $t = 0$ была одна частица типа N_i нулевого возраста, $\mathbf{z}^i(t) = (z^i_1(t), z^i_2(t), \ldots \ldots, z^i_k(t))$. Производящие функции

$$\Phi^i(t; \mathbf{s}) = \sum_\beta P^i_\beta(t)\,\mathbf{s}^\beta, \quad i = 1 \div k, \tag{2}$$

удовлетворяют системе уравнений (см. [1], стр. 231)

$$\mathbf{\Phi}(t; \mathbf{s}) = \int_0^t \mathbf{h}(y; \mathbf{\Phi}(t-y; \mathbf{s})) \otimes d\mathbf{G}(y) + \mathbf{s} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{G}(t)), \tag{3}$$

где $\mathbf{1} = (1,1,\ldots, 1)$, $\mathbf{G}(t) = (G^1(t), \ldots, G^k(t))$, $G^i(t) = \mathbf{P}\{\tau_i \leqslant t\}$.

Производные функций $h^i(u; \mathbf{s})$ в точке $\mathbf{s} = \mathbf{1}$ обозначим

$$a^i_j(y) = \frac{\partial h^i(y; \mathbf{1})}{\partial s_j}, \quad b^i_{jm}(y) = \frac{\partial^2 h^i(y; \mathbf{1})}{\partial s_j \partial s_m}, \quad i, j, m = 1 \div k.$$

Положим также

$$\mu_{ij}(t) = \int_0^t a^i_j(y)\,dG^i(y), \quad \mu^a_{ij}(t) = \int_0^t y a^i_j(y)\,dG^i(y), \quad q^i_{jm}(t) = \int_0^t b^i_{jm}(y)\,dG^i(y),$$

$$\mu_{ij} = \mu_{ij}(\infty) \quad \mu^a_{ij} = \mu^a_{ij}(\infty), \quad q^i_{jm} = q^i_{jm}(\infty), \quad i, j, m = 1 \div k, \quad M = \|\mu_{ij}\|.$$

Известно (см. [1], стр. 234), что система уравнений (3) при условиях $G^i(0) = 0$, $\mu_{ij} < \infty$, $i, j = 1 \div k$, имеет единственное решение $\mathbf{\Phi}(t; \mathbf{s})$, являющееся набором вероятностных производящих функций по $\mathbf{s}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что упомянутые условия выполнены и матрица M неразложима. Более того, чтобы каждый раз не оговаривать деление на μ_{ij}, будем считать, что все $\mu_{ij} > 0$ (в ходе доказательства станет ясно, что это ограничение несущественно). Перронов корень матрицы M обозначим ρ. Для критического процесса, который мы будем исследовать, $\rho = 1$.

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ обозначают правый и левый собственные векторы M соответственно:

$$\mathbf{v}M = \mathbf{v}, \quad M\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1, \quad \mathbf{u} > 0, \quad \sum_{i=1}^k u_i = 1. \tag{4}$$

Положим $B = \sum_{i,j,\nu=1}^k v_i u_j u_\nu q^i_{j\nu}$, $M_a = \sum_{i,j=1}^k v_i u_j \mu^a_{ij}$ и $h^i(\mathbf{s}) = \int_0^\infty h^i(u; \mathbf{s})\,dG^i(u)$, $i = 1 \div k$; $\mathbf{h}(\mathbf{s}) = (h^1(\mathbf{s}), \ldots, h^k(\mathbf{s}))$. Нам понадобятся итерации вектора $\mathbf{h}(\mathbf{s})$: $\mathbf{h}_0(\mathbf{s}) \equiv \mathbf{s}$, $\mathbf{h}_{n+1}(\mathbf{s}) = \mathbf{h}(\mathbf{h}_n(\mathbf{s}))$. Далее, пусть $F^{ij}_1(t) \equiv F^{ij}(t) = (\mu_{ij})^{-1}\mu_{ij}(t)$, $F^{ij}_{n+1}(t) = F^{ij}_1 \ast F^{ij}_n(t)$,

$$\mathop{\ast}_{i=1}^{n} F^{\nu_i m_i}_{p_i}(t) = F^{\nu_1 m_1}_{p_1} \ast F^{\nu_2 m_2}_{p_2} \ast \ldots \ast F^{\nu_n m_n}_{p_n}(t).$$

Наконец, определим операцию свертки для матриц: $M^0_F(t) = \|\delta_{ij}\|$, δ_{ij} — символ Кронекера; $M^1_F(t) = \|\mu_{ij} F^{ij}(t)\|$, $M^{n+1}_F(t) = M^1_F \ast M^n_F(t)$ (знак $\ast$ означает свертку вместо соответствующих произведений элементов матриц; например, элементами матрицы $M^2_F(t)$ будут суммы вида $\sum_{\nu=1}^k \mu_{i\nu}\mu_{\nu j} F^{i\nu} \ast F^{\nu j}(t)$). Таким же образом определяются $(M^n_F \ast \mathbf{G})(t)$ и $(M^n_F \ast \mathbf{1})(t)$. Теперь мы можем сформулировать основной результат данной заметки.

Теорема 1. *Если для критического ветвящегося процесса с неразложимой матрицей* M *величины* μ_{ij}, μ_{ij}^a, q_{ij}^m *конечны для* $i, j, m = 1 \div k$, $G^i(t)$ *нерешетчаты и*

$$\lim_{t\to\infty} t^2(1-G^i(t)) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} t^2(1-F^{ij}(t)) = 0, \quad i, j = 1 \div k, \tag{5}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbf{P}\{\mathbf{z}^i(t) \neq 0\} = \lim_{t\to\infty} t(1-\Phi^i(t; 0)) = \frac{2M_a}{B} u_i. \tag{6}$$

Эта теорема обобщает на более широкий класс ветвящихся процессов аналогичную теорему в [2] и усиливает основную теорему работы [3].

В недавно опубликованной работе В. М. Шуренкова [7] была доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1, *кроме, быть может,* (5), *и для всех* $i = 1 \div k$

$$\gamma_i = \int_0^\infty t dG^i(t) < \infty.$$

Тогда при положительных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *справедливо равенство*

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbf{P}\{t^{-1}z_1^i(t) \geqslant x_1, \ldots, t^{-1}z_k^i(t) \geqslant x_k\} =$$
$$= u_i \frac{2M_a}{B} \exp\left\{-\frac{2M_a}{B} \max\left(\frac{x_1 M_a}{\gamma_1 v_1}, \ldots, \frac{x_k M_a}{\gamma_k v_k}\right)\right\}.$$

Очевидно, что из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *для положительных* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *существует*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{t^{-1}z_1^i(t) \geqslant x_1, \ldots, t^{-1}z_k^i(t) \geqslant x_k \mid \mathbf{z}^i(t) \neq 0\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{2M_a}{B} \max\left(\frac{x_1 M_a}{\gamma_1 v_1}, \ldots, \frac{x_k M_a}{\gamma_k v_k}\right)\right\}.$$

Эта теорема является обобщением предельных теорем, изложенных в работах [8] и [9].

Схема доказательства соотношения (6) будет примерно такая, же, как и в [2]. Как нетрудно заметить, $\mathbf{h}(\mathbf{s})$ можно считать производящей функцией числа частиц для критического процесса Гальтона — Ватсона с несколькими типами частиц. Мы аппроксимируем $\Phi(t; 0)$ суммой итерации $\mathbf{h}_n(0)$ и некоторого остаточного члена. При помощи этой аппроксимации асимптотика вероятности продолжения для критического процесса с превращениями, зависящими от возраста частиц, будет получена из известного результата для критического процесса Гальтона — Ватсона с несколькими типами частиц.

Лемма 1. *Для любого натурального* n *и любого* t

$$\mathbf{1} - \mathbf{h}_n(0) - (M_F^n * \mathbf{1})(t) \leqslant \mathbf{1} - \Phi(t; 0) \leqslant \mathbf{1} - \mathbf{h}_n(0) + \sum_{j=0}^{n-1} M_F^j * (\mathbf{1} - \mathrm{G}(\cdot))(t). \tag{7}$$

Доказательство этой леммы почти не отличается от доказательства соответствующей леммы в [2], и мы его опускаем.

Лемма 2 (см. [1], стр. 212). *Справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} n(\mathbf{1} - \mathbf{h}_n(0)) = \frac{2}{B} \mathbf{u}.$$

Лемма 3 ([2]). *Пусть* $n = \sum_{i,j=1}^{k} n_{ij}$, n_{ij} — *целые неотрицательные числа,* $b_{ij} > 0$, $\sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} = 1$, $D = \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}\mu_{ij}^a(\mu_{ij})^{-1}$, $\varepsilon > 0$ — *любое. Тогда*

1) *если* $n = [t(1+\varepsilon) D^{-1}]$, *то существует такое* $\delta > 0$, *что при* $|n^{-1} n_{ij} - b_{ij}| < \delta$ $(i, j = 1 \div k)$

$$\lim_{t\to\infty} t \mathop{\ast}_{i=1}^{k} \mathop{\ast}_{j=1}^{k} F_{n_{ij}}^{ij}(t) = 0; \tag{8}$$

2) *если* $n = [t(1-\varepsilon) D^{-1}]$, *то существует такое* $\delta > 0$, *что при* $|n^{-1} n_{ij} - b_{ij}| < \delta$ $(i, j = 1 \div k)$

$$\lim_{t\to\infty} t \left(1 - \mathop{\ast}_{i=1}^{k} \mathop{\ast}_{j=1}^{k} F_{n_{ij}}^{ij}(t)\right) = 0. \tag{9}$$

Здесь $[x]$ — целая часть x.

Лемма 4 ([2]). *Пусть* $W = \| w_{ij} \|$ — *диагональная матрица размера* $k \times k$, *причем* $w_{ij} = \delta_{ij} u_i$, *где* u_i—i-*я компонента вектора* $\mathbf{u}: M\mathbf{u} = \mathbf{u}$. *Положим* $R = W^{-1} M W$. *Тогда*

1) $R = \| r_{ij} \|$ — *стохастическая матрица;*

2) $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) R = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, *где* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *определяются в* (4), *т. е.* $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ — *стационарная мера для цепи Маркова, порождаемой* R;

3) $M_F^n(t) = (W R_F^n W)(t)$ *для* $n \geqslant 0$, *где* $R_F^1(\cdot) = \| r_{ij} F^{ij}(\cdot) \|$ *и* $R_F^{n+1}(\cdot) = R_F^1 \ast R_F^n(\cdot)$.

Рассмотрим теперь неразложимую цепь Маркова X_n с пространством состояний $1, 2, \ldots, k$. Пусть $R = \| r_{ij} \|$ — матрица переходных вероятностей, а π — стационарная мера : $\pi R = \pi$. Пусть, далее, $S_n(i, j)$ обозначает число непосредственных переходов из i в j за n шагов и $r_i = \mathbf{P}\{X_0 = i\}$.

Лемма 5. *Существуют такие* $\lambda < 1$ *и* $A < \infty$, *что для всех* n

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n(i,j)}{n} - \pi_i r_{ij}\right| \geqslant \delta \text{ для некоторой пары } (i,j) \,\middle|\, X_0 = i_0\right\} \leqslant A\lambda^n.$$

Доказательство. Введем вспомогательную цепь Маркова X_n' с k^2 состояниями, которая строится по первоначальной следующим образом: каждой траектории первоначальной цепи $i_0, i_1, \ldots, i_n$ сопоставим траекторию $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{n-1}, i_n)$, причем $\mathbf{P}\{X_0' = (i_0, i_1)\} = r_{i_0} r_{i_0 i_1}$. Каждому состоянию (α, β) новой цепи сопоставим номер $(\alpha - 1) k + \beta$. Очевидно, что матрица переходных вероятностей полученной цепи будет иметь вид $R' = \| r_{ij}' \|$, где

$$r'_{(\alpha-1)k+i,\,(\gamma-1)k+j} = r_{ij} \delta_{ij}, \qquad i, j, \alpha, \gamma = 1 \div k.$$

Нетрудно проверить, что матрица R' обладает стационарной мерой π': $\pi'_{(i-1)k+j} = \pi_i r_{ij}$, $i, j = 1 \div k$. Докажем, что у вспомогательной цепи ровно один класс сообщающихся состояний. Пусть $E = \{1, 2, \ldots, k\}$ — первоначальный класс сообщающихся состояний. Ясно, что $E' = \{(i, j) : r_{ij} > 0\} \subset E \times E$ является классом сообщающихся состояний вспомогательной цепи и других классов сообщающихся состояний у этой цепи нет.

Нетрудно заметить, что для доказательства леммы достаточно показать, что для любой фиксированной пары (i^*, j^*) существуют такие $\lambda(i^*, j^*) < 1$ и $A(i^*, j^*) < \infty$, что для всех $n \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n(i^*, j^*)}{n} - \pi_{i^*} r_{i^* j^*}\right| > \delta \,|\, X_0 = i_0\right\} \leqslant A(i^*, j^*) \lambda^n(i^*, j^*). \tag{10}$$

Для $(i^*, j^*) \notin E'$ неравенство (10) очевидно, т. к. в этом случае $S_n(i^*, j^*) = 0$ для всех n. Если же $(i^*, j^*) \in E'$, то, применяя к вспомогательной цепи X_n' основную теорему работы [4] (это можно делать, поскольку X_n' имеет лишь один класс сообщающихся состояний), мы получаем (10). Доказательство закончено.

Прежде чем доказывать следующую лемму, введем несколько обозначений. Пусть $A(n)$ — множество цепочек $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, $0 < \nu_i \leqslant k$; $b = (b_1, b_2)$. Каждой цепочке ν и фиксированному вектору b сопоставим число $B_n(\nu, b) = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{b_1 \nu_i} \delta_{b_2 \nu_{i+1}}$.

Для $\delta > 0$ положим

$$A(n, \delta) = \left\{ \nu \in A(n): \left| \frac{B_n(\nu, b)}{n} - v_{b_1}\mu_{b_1 b_2} u_{b_2} \right| < \delta \text{ для всех } 0 < b_1, b_2 \leqslant k \right\},$$

$\overline{A}(n, \delta)$ — дополнение к множеству $A(n, \delta)$. Пусть, далее,

$$c = \max\{u_1, \ldots, u_k\} / \min\{u_1, \ldots, u_k\}$$

и $L_n(\nu) = r_{\nu_0\nu_1} r_{\nu_1\nu_2} \ldots r_{\nu_{n-1}\nu_n}$, где $0 < \nu_0 \leqslant k$ фиксировано.

Лемма 6. *Пусть выполнено условие* (5). *Для любого* $\varepsilon > 0$:

1) *если* $n = [t(1+\varepsilon)/M_a]$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} t(M_F^n * 1)(t) = 0;$ (11)

2) *если* $n = [t(1-\varepsilon)/M_a]$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} t \sum\limits_{j=0}^{n-1} M_F^j * (1 - \mathbf{G}(\cdot))(t) = 0.$ (12)

Доказательство. Первая часть леммы доказывается так же, как и лемма 2 работы [2]. Доказательство второй части леммы использует идеи работы [5]. Рассмотрим ν_0-ю компоненту вектора $t \sum\limits_{j=0}^{n-1} M_F^j * (1 - \mathbf{G}(\cdot))(t)$, которую мы, вспоминая лемму 4, представим в виде

$$t \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{A(j)} u_{\nu_0} (u_{\nu_j})^{-1} L_j(\nu) (1 - G^{\nu_j}(\cdot)) * \mathop{*}_{i=0}^{j-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(t) \leqslant$$

$$\leqslant ct \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{A(j)} L_j(\nu) (1 - G^{\nu_j}(\cdot)) * \mathop{*}_{i=0}^{j-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(t) \tag{13}$$

(мы считаем, что $\sum\limits_{A(0)} \ldots = 1 - G^{\nu_0}(t)$). Выберем τ так, чтобы было $F^{ij}(\tau) < 1$ для всех $i, j = 1 \div k$. Такое τ существует, потому что $G^i(0) = 0$, $i = 1 \div k$. Положим $\alpha = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon/2)^{-1}$. Тогда $0 < \alpha t < t - \tau < t$ для достаточно больших t. Разобьем (13) на 3 слагаемых: S_1, S_2, S_3. В первом интегрирование сверток ведется от 0 до αt, во втором от αt до $t - \tau$, в третьем от $t - \tau$ до t. Оценим каждое слагаемое отдельно:

$$S_1(t) = ct \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{A(j)} L_i(\nu) \int_{0-}^{\alpha t+} (1 - G^{\nu_j}(t-y))\, d\left(\mathop{*}_{i=0}^{j-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(y) \right) \leqslant$$

$$\leqslant ct \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{A(j)} L_j(\nu) \max_{1 \leqslant i \leqslant k} (1 - G^i(t - \alpha t +)) = ctn \max_{1 \leqslant i \leqslant k} (1 - G^i(t - \alpha t +)).$$

Последнее равенство верно в силу определения $L_j(\nu)$ и того, что R — стохастическая матрица. Так как $n = [t(1-\varepsilon) M_a^{-1}]$, то $S_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Далее,

$$S_3(t) \leqslant ct \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{A(j)} L_j(\nu) \int_{t-\tau+}^{t+} d\left(\mathop{*}_{i=0}^{j-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(y) \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 t \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{A(j+1)} L_{j+1}(\nu) \int_{t-\tau+}^{t+} (1 - F^{\nu_j \nu_{j+1}}(t-y))\, d\left(\mathop{*}_{i=0}^{j-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(y) \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 t \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{A(j+1)} L_{j+1}(\nu) \left(\mathop{*}_{i=0}^{j-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(t) - \mathop{*}_{i=0}^{j} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(t) \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 t \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{A(j)} L_j(\nu) \mathop{*}_{i=0}^{j-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(t) - \sum_{A(j+1)} L_{j+1}(\nu) \mathop{*}_{i=0}^{j} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(t) \right) =$$

$$= c_1 t \left(1 - \sum_{A(n)} L_n(\nu) \mathop{*}_{i=0}^{n-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(t) \right) \leqslant c_1 t \sum_{\overline{A}(n, \delta)} L_n(\nu) +$$

$$+ c_1 t \sum_{A(n, \delta)} L_n(\nu) \left(1 - \mathop{*}_{i=0}^{n-1} F^{\nu_i \nu_{i+1}}(t) \right).$$

Первый член последнего выражения стремится к 0 при $t\to\infty$ в силу леммы 5. Покажем, что второй член также стремится к 0 при $t\to\infty$. Это так, поскольку по лемме 3

$$\lim_{t\to\infty} t\Big(1-\mathop{\ast}_{i=0}^{n-1} F^{\nu_i\nu_{i+1}}(t)\Big)=\lim_{t\to\infty}\Big(1-\mathop{\ast}_{j=1}^{k}\Big(\mathop{\ast}_{i=1}^{k} F^{ij}_{n_{ij}}\Big)(t)\Big)=0$$

на $A(n,\delta)$ (в этом случае $b_{ij}=v_i\mu_{ij}u_j$ и, следовательно,

$$D=\sum_{i,j=1}^{k} v_i\mu_{ij}u_j\mu^{a}_{ij}(\mu_{ij})^{-1}=M_a),\ \text{а}\ \sum_{A(n,\delta)}L_n(\nu)\leqslant\sum_{A(n)}L_n(\nu)=1.$$

Перейдем к оценке $S_2(t)$. В силу условия (5) при некотором $1<p<2$ и любом $i=1\div k$ имеем $g_i=\int\limits_0^\infty t^p dG^i(t)<\infty$. Положим $g=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} g_i$. Очевидно, что $1-G^i(t-u)\leqslant g(t-u)^{-p}$, $i=1\div k$. Пусть $m=[(t-\alpha\tau)/\tau]$. Тогда

$$S_2(t)\leqslant ct\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{A(j)}L_j(\nu)\int\limits_{\alpha t+}^{t-\tau+}(1-G^{\nu_j}(t-y))\,d\Big(\mathop{\ast}_{i=0}^{j-1}F^{\nu_i\nu_{i+1}}(y)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant cgt\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{A(j)}L_j(\nu)\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{t-(l+1)\tau+}^{t-l\tau+}(t-y)^{-p}d\Big(\mathop{\ast}_{i=0}^{j-1}F^{\nu_i\nu_{i+1}}(y)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant cgt\sum_{l=1}^{m}(l\tau)^{-p}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{A(j)}L_j(\nu)\int\limits_{t-(l+1)\tau+}^{t-l\tau+}d\Big(\mathop{\ast}_{i=0}^{j-1}F^{\nu_i\nu_{i+1}}(y)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant c_1gt\sum_{l=1}^{m}(l\tau)^{-p}\Big(1-\sum_{A(n)}L_j(\nu)\mathop{\ast}_{i=0}^{n-1}F^{\nu_i\nu_{i+1}}(t-l\tau+)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant c_1gt\sum_{l=1}^{\infty}(l\tau)^{-p}\Big(1-\sum_{A(n)}L_j(\nu)\mathop{\ast}_{i=0}^{n-1}F^{\nu_i\nu_{i+1}}(\alpha t-)\Big).$$

Теперь, учитывая, что $n=[(1-\varepsilon)\,t\,M_a^{-1}]=[(1-\varepsilon/2)\,(\alpha t)\,M_a^{-1}]$, аналогично оценке $S_3(t)$ можно показать, что $\lim\limits_{t\to\infty}S_2(t)=0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из левой части (7) следует, что

$$t(\mathbf{1}-\mathbf{h}_n(0))-t(M_F^n\ast\mathbf{1})(t)\leqslant t(\mathbf{1}-\mathbf{\Phi}(t;\,0)).$$

Пусть $\varepsilon>0$. Положим $n=[t(1+\varepsilon)M_a^{-1}]$. Из лемм 2 и 6 получаем

$$\frac{2M_a}{(1+\varepsilon)B}\mathbf{u}\leqslant\liminf_{t\to\infty}t(\mathbf{1}-\mathbf{\Phi}(t;\,0)).$$

Такие же рассуждения показывают, что

$$\limsup_{t\to\infty}t(\mathbf{1}-\mathbf{\Phi}(t;\,0))\leqslant\frac{2M_a}{(1-\varepsilon)B}\mathbf{u}.$$

Устремляя ε к 0, находим, что $\lim\limits_{t\to\infty}t(\mathbf{1}-\mathbf{\Phi}(t;\,0))=\dfrac{2M_a}{B}\mathbf{u}$. Теорема доказана.

Замечание. Как отмечено в [6], Кестен (неопубликованная работа) доказал для процесса Беллмана — Харриса с одним типом частиц следующее:

Теорема. *Пусть* $h(s)$ *— производящая функция числа частиц,* $h'(1)=1$, $h''(1)=B<\infty$, $G(t)$ *— функция распределения длительности жизни* τ *одной частицы,* $\mu=\int\limits_0^\infty t\,dG(t)<\infty$. *Если*

$$\lim_{t\to\infty}t\mathbf{P}\{z(t)>0\,|\,z(0)=1\}=\frac{2\mu}{B},$$

то

$$\lim_{t\to\infty} t^2 (1 - G(t)) = 0.$$

Из этой теоремы вытекает, что условие (5) в общем случае нельзя ослабить.

Математический ин-т
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
14.11.75

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Б. А. Севастьянов**, Ветвящиеся процессы, М., изд-во «Наука», 1971.

[2] **M. I. Goldstein**, Critical age-dependent branching processes: single and multitype, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., **17**, 1 (1971), 74—88.

[3] **В. П. Чистяков**, Асимптотика вероятности продолжения критического ветвящегося процесса, Теория вероят. и ее примен., **XVI**, 4 (1971), 639—648.

[4] **M. Katz, A. J. Thomasian**, An exponential bound for functions of a Markov chain, Ann. Math. Stat., **31**, 2 (1960), 470—474.

[5] **J. M. Holte**, Extinction probability for a critical general branching process, Stoch. Proc. Appl., **2**, 3 (1974), 303—309.

[6] **J. Chover, P. Ney**, The non-linear renewal equation, J. D'Analyse Math., **21** (1968), 381—413.

[7] **В. М. Шуренков**, Две предельные теоремы для критических ветвящихся процессов, Теория вероят. и ее примен., **XXI**, 3 (1976), 548—558.

[8] **В. П. Чистяков**, Предельные теоремы для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста частиц, Теория вероят. и ее примен., **XVII**, 1 (1972), 55—70.

[9] **P. Ney**, Critical branching processes, Adv. Appl. Prob., **6**, 3 (1974), 434—445.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE NON-EXTINCTION PROBABILITY FOR A CRITICAL BRANCHING PROCESS

V. A. VATUTIN (MOSCOW)

(*Summary*)

Critical age-dependent branching process with k types $N_1, N_2, \ldots, N_k$ of particles are considered. We suppose that particles' reproduction power depends on their age. Let $z_j^i(t)$ be the number of particles of type N_j at time t given that at time $t = 0$ there was only one particle of type N_i. We derive an asymptotic formula for the probability $\mathbf{P}\{z_1^i(t) + z_2^i(t) + \ldots + z_k^i(t) > 0\}$ as $t \to \infty$. The result obtained is analogous to that of Goldstein [2].