УДК 517.956.25
DOI 10.17377/PAM.2016.16.301

*Л. М. Кожевникова, А. А. Никитина*

# КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В $\mathbb{R}_n$*

Рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями

$$-\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathrm{x}, u_{x_\alpha}))_{x_\alpha} + a_0(\mathrm{x}, u) = F_0(\mathrm{x})$$

в пространстве $\mathbb{R}_n$. Доказана теорема существования решений в локальных пространствах Соболева – Орлича без ограничений на рост данных на бесконечности. Найдены условия на структуру уравнения, достаточные для единственности решения, без ограничений на его рост на бесконечности. Установлены оценка, характеризующая поведение решения на бесконечности, и непрерывная зависимость решения от правой части уравнения.

*Ключевые слова*: анизотропное эллиптическое уравнение, нестепенные нелинейности, пространство Соболева – Орлича, неограниченная область.

## Введение

В пространстве $\mathbb{R}_n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots,\ x_n)\},\ n \geq 2$, рассматриваются квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка

$$-\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathrm{x}, u_{x_\alpha}))_{x_\alpha} + a_0(\mathrm{x}, u) = F_0(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}_n. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha),\ \alpha = 0, \ldots, n$, измеримы по $\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n$ для $s_\alpha \in \mathbb{R}$, непрерывны по $s_\alpha \in \mathbb{R}$ для почти всех $\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n$.

Пусть существуют измеримые неотрицательные функции $\psi(\mathrm{x}), \Psi(\mathrm{x}), \varphi(\mathrm{x}),\ \Phi(\mathrm{x})$ такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n$ и $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_n), \mathbf{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_{n+1},\ \mathbf{s} \neq \mathbf{t}$ справедливы неравенства

$$\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha)s_\alpha \ \geq\ \varphi(\mathrm{x})\sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(s_\alpha) - \psi(\mathrm{x}); \tag{2}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \overline{B}_\alpha(a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha)) \ \leq\ \Phi(\mathrm{x})\sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(s_\alpha) + \Psi(\mathrm{x}); \tag{3}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha) - a_\alpha(\mathrm{x}, t_\alpha))\,(s_\alpha - t_\alpha) > 0. \tag{4}$$

Здесь $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_n(z)$ — $N$-функции, а $\overline{B}_0(z), \overline{B}_1(z), \ldots, \overline{B}_n(z)$ — дополнительные к ним (см. п. 1).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 6-31-50034).

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$-\sum_{\alpha=1}^{n}(2\varphi(\mathrm{x})B'_\alpha(u_{x_\alpha})+f_\alpha(\mathrm{x}))_{x_\alpha}+2\varphi(\mathrm{x})B'_0(u)+f_0(\mathrm{x})=0 \tag{5}$$

с непрерывно дифференцируемыми $N$-функциями $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_n(z)$ (см. лемму 3).

Начиная с 70-х гг. прошлого столетия и по настоящее время ведутся интенсивные исследования качественных свойств решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями как второго, так и высокого порядка. Решения краевых задач для уравнений вида

$$-\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathrm{x},u,\nabla u))_{x_\alpha}+a_0(\mathrm{x},u,\nabla u)=f(\mathrm{x})$$

с функциями $a_0(\mathrm{x},\mathbf{s}), a_1(\mathrm{x},\mathbf{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x},\mathbf{s})$, имеющими не обязательно полиноминальный рост по переменным $s_0, s_1, \ldots, s_n$, рассматривались, в основном, в ограниченных областях (см. [1–5]).

Краевые задачи в неограниченных областях для квазилинейных эллиптических уравнений со степенными нелинейностями также исследовались в многочисленных работах (см. обзоры в [6; 7]). Следует отметить, что решение эллиптической задачи в неограниченной области с несуммируемыми данными принадлежит соответствующему пространству локально сумммируемых функций. Как правило, для обеспечения единственности решения соответствующей краевой задачи в неограниченной области необходимо наложить условие на рост решения на бесконечности, а для существования решения из выделенного класса единственности обычно требуются ограничения на рост входных данных.

Например, А. Л. Гладковым в [8] рассматривалась задача Дирихле в неограниченной области с компактной границей для уравнения

$$-\sum_{\alpha=1}^{n}\left(|u_{x_\alpha}|^{p-2}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}+a_0(\mathrm{x})u=f(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in\Omega,\quad p>2,$$

$a_0(\mathrm{x})\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega),\ a_0(\mathrm{x})\geq 0,\ f(\mathrm{x})\in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$. В частности, в этой работе доказано, что для уравнения с функцией $a_0(\mathrm{x})$ такой, что $c_1(c_2+|\mathrm{x}|^2)^\beta\leq a_0(\mathrm{x})\leq c_3(c_4+|\mathrm{x}|^2)^\gamma$ для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ с положительными постоянными $c_1,\ldots,c_4$ и $0\leq\beta\leq\gamma$, решение задачи Дирихле единственно в классе функций, удовлетворяющих для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ при достаточно малой постоянной $M$ неравенству

$$|u(\mathrm{x})|\leq M(c_5+|\mathrm{x}|^2)^{(2\beta+p)/(2(p-2))}.$$

В этом же классе функций доказано существование решения.

В 1984 г. Х. Брезис [9] на примере полулинейного уравнения

$$-\Delta u+|u|^{p_0-2}u=f(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in\mathbb{R}_n,\quad p_0>2,$$

показал, что имеются эллиптические уравнения, для которых существуют единственные решения краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности. А именно, Х. Брезис установил существование и единственность обобщенного решения $u\in L_{p_0-1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ при $f\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$.

Обобщение результатов Х. Брезиса на уравнения высокого порядка было проведено Ф. Бернисом [10]. В частности, он доказал существование единственного обобщенного решения полулинейного эллиптического уравнения $2m$-порядка, заданного во всем пространстве

$$(-\Delta)^m u + |u|^{p_0-2}u = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}_n,$$

где $m \in \mathbb{N}$, $p_0 > 2$, если $1 \leq n \leq 2m$; и $p_0 \in \left(2, \frac{2m+n}{n-2m}\right]$, если $n > 2m$, с функцией $f \in L_{p_0/(p_0-1),\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$.

В работе [11] О. А. Олейник и Ж. И. Диаз, пользуясь методом интеграла энергии и устанавливая априорные оценки решения, доказали существование и единственность решения краевой задачи с однородными граничными условиями первого и второго типа (в частности задач Дирихле и Неймана) для полулинейных уравнений с переменными коэффициентами

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(\mathrm{x})u_{x_j}\right)_{x_\alpha} + a_0(\mathrm{x})|u|^{p_0-2}u = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad p_0 > 2, \tag{6}$$

где $a_{ij}(\mathrm{x}) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}$, $a_0(\mathrm{x}) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $a_0(\mathrm{x}) \geq a_0 > 0$, без условий на бесконечности.

В работе [12] М. М. Бокало, Е. В. Доманская исследовали краевые задачи в неограниченных областях для эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейности, модельным примером которых является уравнение

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} \left(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha(\mathrm{x})-2}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega.$$

Корректность постановки краевых задач доказана без ограничений на рост решений и данных задач на бесконечности.

В работе [13] для некоторого класса уравнений с нестепенными нелинейностями Л. М. Кожевниковой, А. А. Хаджи установлено существование решений задачи Дирихле в неограниченных областях без ограничений на рост данных на бесконечности. В настоящей статье рассматриваются анизотропные эллиптические уравнения с нестепенными нелинейностями во всем пространстве $\mathbb{R}_n$. Здесь найдены условия, налагаемые на структуру уравнения (1), достаточные для однозначной разрешимости без ограничений на рост данных и решения на бесконечности. Кроме того, установлены степенная оценка, характеризующая поведение решения на бесконечности, и непрерывная зависимость решения от правой части уравнения (1).

## 1. *N*-функции и пространства Соболева – Орлича

Приведем некоторые сведения из теории $N$-функций и пространств Соболева – Орлича [14]. Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $M(z)$, $z \in \mathbb{R}$, называется $N$-функцией, если она четна и

$$\lim_{z\to 0} M(z)/z = 0, \quad \lim_{z\to\infty} M(z)/z = \infty.$$

Отметим, что $M(\epsilon z) \leq \epsilon M(z)$ при $0 < \epsilon \leq 1$. Для $N$-функции $M(z)$ имеет место интегральное представление $M(z) = \int_0^{|z|} m(\theta)\, d\theta$, где $m(\theta)$ — положительная при $\theta > 0$, не убывающая и непрерывная справа при $\theta \geq 0$ такая, что $m(0) = 0$, $\lim\limits_{\theta\to\infty} m(\theta) = \infty$. Очевидно, справедливо неравенство

$$M(z) \leq |z|m(|z|), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

$N$-функция

$$\overline{M}(z) = \sup_{y\geq 0}(y|z| - M(y))$$

называется дополнительной к $N$-функции $M(z)$. Известны следующие неравенства:

$$|zy| \leq M(z) + \overline{M}(y), \quad z, y \in \mathbb{R} \tag{8}$$

(неравенство Юнга) [14. Гл. I, § 2, неравенство (2.6)],

$$z \leq M^{-1}(z)\overline{M}^{-1}(z) \leq 2z, \quad z \geq 0 \tag{9}$$

(верхний индекс $-1$ означает обратную функцию) [14. Гл. I, § 2, неравенство (2.10)] и равенство

$$|z|m(z) = M(|z|) + \overline{M}(m(|z|)), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Для $N$-функций $P(z), M(z)$ записывают $P(z) \prec M(z)$, если существуют числа $l > 0$, $z_0 \geq 0$ такие, что

$$P(z) \leq M(lz), \quad |z| \geq z_0.$$

$N$-функции $P(z), M(z)$ называются сравнимыми, если имеет место одно из соотношений $P(z) \prec M(z)$ или $M(z) \prec P(z)$. $N$-функции $P(z)$ и $M(z)$ называются эквивалентными, если $P(z) \prec M(z)$ и $M(z) \prec P(z)$.

$N$-функция $P(z)$ растет медленнее $N$-функции $M(z)$ ($P(z) \prec\prec M(z)$), если для любого числа $l > 0$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{M(lz)} = 0.$$

$N$-функция $M(z)$ удовлетворяет $\Delta_2$-условию при больших значениях $z$, если существуют такие числа $c > 0$, $z_0 \geq 0$, что $M(2z) \leq cM(z)$ для любых $|z| \geq z_0$. $\Delta_2$-условие эквивалентно выполнению при $|z| \geq z_0$ неравенства

$$M(lz) \leq c(l)M(z), \tag{11}$$

где $l$ — любое число больше единицы, $c(l) > 0$.

$N$-функция $M(z)$ удовлетворяет $\Delta_2$-условию тогда и только тогда, когда существуют положительные числа $c > 1$, $z_0 \geq 0$ такие, что при $|z| \geq z_0$ справедливо неравенство

$$|z|m(|z|) < cM(z) \tag{12}$$

[14. Гл. I, § 4, теорема 4.1]. В каждом классе эквивалентных $N$-функций, подчиняющихся $\Delta_2$-условию, имеются $N$-функции удовлетворяющие неравенствам (11), (12) при всех $z$. В дальнейшем в работе предполагается, что $\Delta_2$-условие для рассматриваемых $N$-функций выполняется при всех значениях $z \in \mathbb{R}$ (т. е. $z_0 = 0$).

Для $N$-функции $M(z)$ ввиду выпуклости и оценки (11) справедливо неравенство

$$M(y + z) \leq cM(z) + cM(y), \quad z, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Пусть $Q$ — произвольная область пространства $\mathbb{R}_n$. Классом Орлича $K_M(Q)$, соответствующим $N$-функции $M(z)$, называется множество измеримых в $Q$ функций $v$ таких, что

$$\int\limits_Q M(v(\mathrm{x}))\,d\mathrm{x} < \infty.$$

Пространством Орлича $L_M(Q)$ называется линейная оболочка $K_M(Q)$. Будем рассматривать пространство Орлича $L_M(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_M(Q)} = \|v\|_{M,Q} = \inf\Big\{k > 0 \mid \int\limits_Q M\big(v(\mathrm{x})/k\big)\,d\mathrm{x} \le 1\Big\}.$$

Нормы в пространствах $L_1(Q)$, $L_\infty(Q)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{1,Q}$ и $\|\cdot\|_{\infty,Q}$ соответственно. Класс Орлича $K_M(Q)$ совпадает с пространством Орлича $L_M(Q)$ тогда и только тогда, когда $M(z)$ удовлетворяет $\Delta_2$-условию [14. Гл. II, § 8, теорема 8.2]. Если $N$-функция $M(z)$ удовлетворяет $\Delta_2$-условию, то сходимость в среднем эквивалентна сходимости по норме пространства $L_M(Q)$ [14. Гл. II, § 9, теорема 9.4].

Для функции $v \in L_M(Q)$ справедлива оценка

$$\|v\|_{M,Q} \le \int\limits_Q M(v)\,d\mathrm{x} + 1 \tag{14}$$

[14. Гл. II, § 9, неравенство (9.12)].

Для функций $u \in L_M(Q)$, $v \in L_{\overline{M}}(Q)$ имеет место неравенство Гельдера [14. Гл. II, § 9, неравенства (9.24), (9.27)]:

$$\Big|\int_Q u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}\Big| \le 2\|u\|_{M,Q}\|v\|_{\overline{M},Q}. \tag{15}$$

Пусть $B_1(z),\ldots,B_n(z)$ — $N$-функции, определим пространство Соболева–Орлича $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q}.$$

Положим

$$h(\theta) = \theta^{-\frac{1}{n}}\left(\prod_{\alpha=1}^{n} B_\alpha^{-1}(\theta)\right)^{\frac{1}{n}}$$

и будем предполагать, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{h(\theta)}{\theta}d\theta$ сходится. Тогда можно определить $N$-функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int\limits_0^{|z|} h(\theta)/\theta\,d\theta.$$

Приведем теорему вложения А. Г. Королева [15], доказанную для ограниченных областей $Q$.

**Лемма 1.** *Пусть $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$.*

1) *Если*

$$\int_1^\infty h(\theta)/\theta\, d\theta = \infty, \tag{16}$$

*то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_{B^*}(Q)$ и*

$$\|v\|_{B^*,Q} \le A_1 \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)};$$

2) *если*

$$\int_1^\infty h(\theta)/\theta\, d\theta < \infty, \tag{17}$$

*то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_\infty(Q)$ и*

$$\|v\|_{\infty,Q} \le A_2 \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}.$$

*Здесь $A_1 = \frac{n-1}{n}$, $A_2 = \int\limits_0^\infty h(\theta)/\theta\, d\theta$.*

## 2. Формулировка результатов

Пусть $Q$ — ограниченная область в $\mathbb{R}_n$, $N$-функции $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_n(z)$ и дополнительные к ним $N$-функции $\overline{B}_0(z), \overline{B}_1(z), \ldots, \overline{B}_n(z)$ удовлетворяют $\Delta_2$-условию. Через $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)$ обозначим пространство $L_{\overline{B}_0}(Q) \times L_{\overline{B}_1}(Q) \times \ldots \times L_{\overline{B}_n}(Q)$ с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)} = \|g_0\|_{\overline{B}_0,Q} + \|g_1\|_{\overline{B}_1,Q} + \ldots + \|g_n\|_{\overline{B}_n,Q}, \quad \mathbf{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_n) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q).$$

Определим пространства Соболева–Орлича $W^1_{\mathbf{B}}(Q)$, $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(Q)$ как пополнения пространств $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{W^1_{\mathbf{B}}(Q)} = \|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(Q)} = \|v\|_{B_0,Q} + \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}.$$

В случае выполнения условия (16), будем считать, что

$$B_0(z) \prec B^*(z), \tag{18}$$

а при выполнении (17) $B_0(z)$ — произвольная $N$-функция.

Определим $L_{\overline{B}_0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$, $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$, $W^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ как пространства, состоящие из измеримых функций $v(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n$, таких, что $v \in L_{\overline{B}_0}(Q)$, $L_1(Q)$, $W^1_{\mathbf{B}}(Q)$ соответственно для любой ограниченной области $Q$. Аналогично определяется пространство $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$.

Будем считать, что неотрицательные функции $\psi, \Psi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$, $\varphi, 1/\varphi, \Phi \in L_\infty(\mathbb{R}_n)$, $F_0 \in L_{\overline{B}_0,\mathrm{loc}}$, поэтому существуют положительные числа $\overline{a} \le \widehat{a}, \widehat{A}$ такие, что $\overline{a} \le \varphi(\mathrm{x}) \le \widehat{a}$, $\Phi(\mathrm{x}) \le \widehat{A}$ для п. в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n$.

Определим оператор $\mathbf{B} : W^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n) \to L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ формулой

$$\mathbf{B}(v) = B_0(v) + \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(v_{x_\alpha}), \quad v \in W^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n).$$

Обозначим

$$\mathbf{a}(\mathrm{x}, \mathbf{s}) = (a_0(\mathrm{x}, s_0), a_1(\mathrm{x}, s_1), \ldots, a_n(\mathrm{x}, s_n)).$$

Из условия (3), пользуясь (14), для $u \in W^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ для любой ограниченной области $Q$ выводим оценку

$$\|\mathbf{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)} = \sum_{\alpha=0}^{n} \|a_\alpha(\mathrm{x},u_{x_\alpha})\|_{\overline{B}_\alpha,Q} \le$$
$$\le \sum_{\alpha=0}^{n} \int\limits_Q \overline{B}_\alpha(a_\alpha(\mathrm{x},u_{x_\alpha}))\,d\mathrm{x} + n + 1 \le \widehat{A}\|\mathbf{B}(u)\|_{1,Q} + \|\Psi\|_{1,Q} + n + 1. \quad (19)$$

Далее, по элементу $\mathbf{a}(\mathrm{x},u,\nabla u) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ для $v(\mathrm{x}) \in W^1_{\mathbf{B}}(\mathbb{R}_n)$ с ограниченным носителем ($\mathrm{supp}\, v = \overline{Q}$) определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством

$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha v_{x_\alpha} + a_0 v\Big)\,d\mathrm{x}\,. \quad (20)$$

Используя неравенство Гельдера (15), для функций $u(\mathrm{x}) \in W^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$, $v(\mathrm{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(Q)$ выводим неравенства

$$|\langle \mathbf{A}(u), v\rangle| \le 2\sum_{\alpha=1}^{n} \|a_\alpha\|_{\overline{B}_\alpha,Q}\|v_{x_\alpha}\|_{B_\alpha,Q} + 2\|a_0\|_{\overline{B}_0,Q}\|v\|_{B_0,Q} \le$$
$$\le 2\|\mathbf{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)\|_{\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(Q)}\|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(Q)}. \quad (21)$$

Таким образом, согласно (19), (21), функционал $\mathbf{A}(u)$, определяемый равенством (20) в пространстве $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(Q)$, является ограниченным.

**Определение 1.** Обобщенным решением уравнения (1) назовем функцию $u\,(\mathrm{x}) \in$ $\in W^1_{\mathbf{B},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle = (F_0, v) \quad (22)$$

для любой функции $v(\mathrm{x}) \in W^1_{\mathbf{B}}(\mathbb{R}_n)$ с ограниченным носителем. Здесь использовано обозначение $(F_0,v) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} F_0 v\,d\mathrm{x}$.

Будем считать, что существует такое $0 < \epsilon < 1$, что выполнены условия

$$B_\alpha(z^{1+\epsilon}) \prec B_0(z), \quad \alpha = 1,2,\ldots,n. \quad (23)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (2)–(4), (18), (23), *тогда существует обобщенное решение* $u(\mathrm{x})$ *уравнения* (1).

В [13] доказано существование решения задачи Дирихле для уравнения (1). Доказательство теоремы 1 происходит аналогичным образом и поэтому здесь не приводится.

Степенная оценка и теорема единственности решения задачи (1) устанавливается при условии, что

$$B_\alpha(z) = c_\alpha |z|^{p_\alpha}, \quad |z| \le 1, \quad p_\alpha > 1, \quad c_\alpha > 0, \quad \alpha = 0,1,\ldots,n. \quad (24)$$

Заметим, что для произвольной $N$-функции $\widetilde{B}(z)$ такую функцию легко построить:

$$B(z) = \begin{cases} \widetilde{B}(1)|z|^p, \ |z| \le 1; \\ \widetilde{B}(z), \ |z| > 1, \end{cases} \qquad p = \frac{\widetilde{B}(1)}{\widetilde{B}(1)} > 1.$$

При этом функции $\widetilde{B}(z), B(z)$ эквивалентны.

Будем считать, что показатели $p_\alpha,\ \alpha = 1,\ldots,n$, упорядочены: $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_n$, и подчиняются условиям

$$p_0 > p_1, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} > 1. \tag{25}$$

Тогда числа $q_\alpha = \frac{p_0 p_\alpha}{p_0 - p_\alpha},\ \alpha = 1,\ldots,n$, также упорядочены: $q_1 \ge q_2 \ge \ldots \ge q_n$. Будем предполагать, что

$$q_n > n. \tag{26}$$

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия (2)–(4), (23)–(25). Тогда существует положительное число $\mathcal{M}$ такое, что для обобщенного решения (1) справедлива оценка*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,U(r/2)} \le \mathcal{M}\left(r^{n-q_n} + \|\overline{B}_0(F_0)\|_{1,U(r)} + \|\psi + \Psi\|_{1,U(r)}\right), \quad r \ge 1, \tag{27}$$

*в которой $U(r) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n \mid |\mathrm{x}| < r\}$.*

Пусть существуют измеримые неотрицательные функции $\varphi_\alpha(\mathrm{x})$ такие, что для п. в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n$, $s_\alpha, t_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 0,\ldots,n$, справедливы неравенства

$$(a_0(\mathrm{x}, s_0) - a_0(\mathrm{x}, t_0))(s_0 - t_0) \ge \varphi_0(\mathrm{x}) B_0(s_0 - t_0), \tag{28}$$

$$0 \le (a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha) - a_\alpha(\mathrm{x}, t_\alpha))(s_\alpha - t_\alpha) \le \varphi_\alpha(\mathrm{x}) B_\alpha(s_\alpha - t_\alpha), \quad \alpha = 1,\ldots,n. \tag{29}$$

Предполагаем, что $1/\varphi_0(\mathrm{x}), \varphi_\alpha(\mathrm{x}) \in L_\infty(\mathbb{R}_n)$, поэтому существуют положительные числа $\overline{a}_0, \widehat{a}_\alpha$ такие, что $\overline{a}_0 \le \varphi_0(\mathrm{x})$, $\varphi_\alpha(\mathrm{x}) \le \widehat{a}_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,n$, для п. в. $x \in \mathbb{R}_n$. Очевидно, что неравенства (28), (29) обеспечивают условие (4).

Доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия (23)–(29), тогда обобщенное решение $u(\mathrm{x})$ уравнения (1) единственно. Пусть $\{u^k(\mathrm{x})\}_{k=0}^{\infty}$ — решения уравнений (1) с правыми частями $\{F^k(\mathrm{x})\}_{k=0}^{\infty}$ соответственно. Тогда если $F^k \to F^0$ в $L_{\overline{B}_0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$, то $u^k \to u^0$ в $L_{B_0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ при $k \to \infty$.*

## 3. Подготовительные сведения

**Лемма 2.** *Пусть $N$-функции $B_0(z), B_1(z),\ldots,B_n(z)$ подчиняются условиям (23), тогда*

$$B_\alpha(z) \prec\prec B_0(z), \quad \alpha = 1,2,\ldots,n. \tag{30}$$

Доказательство леммы см. [13. Замечание 6].

**Лемма 3.** *Если функции $b_\alpha(s_\alpha) = B'_\alpha(s_\alpha)$, $s_\alpha \ge 0$, $\alpha = 0,1,\ldots,n$, непрерывны и строго монотонны, $\varphi(\mathrm{x})$ неотрицательная, $\varphi,\ 1/\varphi \in L_\infty(\mathbb{R}_n)$, $\mathbf{f} = (f_0, f_1,\ldots,f_n) \in \mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$, то функции*

$$a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha) = 2\varphi(\mathrm{x}) B'_\alpha(s_\alpha) + f_\alpha(\mathrm{x}) = 2\varphi(\mathrm{x}) b_\alpha(|s_\alpha|)\operatorname{sign} s_\alpha + f_\alpha(\mathrm{x}), \quad \alpha = 0,\ldots,n,$$

*удовлетворяют условиям (2)–(4).*

Доказательство леммы см. [13. Замечание 5].

В этом параграфе и ниже через $C_\alpha$ будем обозначать положительные константы.

**Лемма 4.** *Пусть $N$-функции $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_n(z)$ подчиняются условиям (23), тогда для $N$-функций $T_\alpha(z) = B_\alpha\left(\overline{M}_\alpha(z)\right)$, ($M_\alpha(z) = B_\alpha^{-1}(B_0(z))$ существуют числа $c > 0$, $\tau \geq q_n$ такие, что справедливы неравенства*

$$T_\alpha(z) \leq c|z|^\tau, \quad |z| \geq 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{31}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функций $\overline{M}_\alpha(z)$ справедливы оценки [13. Лемма 7]

$$\overline{M}_\alpha(z) \leq C_1 z^{1+1/\epsilon}, \quad z \geq z_0 > 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{32}$$

Поскольку $N$-функции $B_\alpha(z)$ удовлетворяют $\Delta_2$-условию, то найдутся числа $\beta > 1$, $C_2 > 0$ такие, что при $z \geq 1$ справедливы неравенства $B_\alpha(z) \leq C_2 z^\beta$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Тогда, согласно (32), существуют числа $\tau > 1, C_3 > 0$ такие, что при $z \geq \max(z_0, 1)$ выполнены неравенства $T_\alpha(z) \leq C_2 z^\tau$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Ввиду непрерывности и четности функций $T_\alpha(z)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, за счет выбора константы $c$ неравенства (31) имеют место при $|z| \geq 1$. □

**Лемма 5.** *Пусть $N$-функции $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_n(z)$ подчиняются условиям (24), (25), тогда для $N$-функций $T_\alpha(z) = B_\alpha\left(\overline{M}_\alpha(z)\right)$, существует число $c > 0$ такое, что справедливы неравенства*

$$T_\alpha(z) \leq c|z|^{q_\alpha}, \quad |z| \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{33}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию (24) $M_\alpha(z) = B_\alpha^{-1}(B_0(z)) = \left(\frac{c_0}{c_\alpha}\right)^{1/p_\alpha} |z|^{p_0/p_\alpha}$, $|z| \leq z_1$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Поэтому несложно вычислить, что

$$\overline{M}_\alpha(z) = C_1 |z|^{p_0/(p_0 - p_\alpha)}, \quad |z| \leq z_2 \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{34}$$

Из (34) следуют равенства

$$T_\alpha(z) = C_2 |z|^{q_\alpha}, \quad |z| \leq z_2 \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

Ввиду непрерывности функций $T_\alpha(z)$, $\alpha = 1, \ldots, n$, за счет выбора константы $c$ неравенства (33) имеют место при $|z| \leq 1$. □

## 4. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 3 основано на следующем утверждении.

**Утверждение 1.** *Пусть выполнены условия (23)–(25), (28), (29). Тогда для любого $r_0 > 0$ и обобщенных решений $u^1(\mathrm{x}), u^2(\mathrm{x})$ уравнения (1) с правыми частями $F^1(\mathrm{x}), F^2(\mathrm{x})$ при $r > r_0$, $r \geq 1$ справедлива априорная оценка*

$$\left\|B_0(u^2 - u^1)\right\|_{1,U(r_0)} \leq \mathcal{M}_1 \Big(\frac{r}{r - r_0}\Big)^p \Big\{ r^{n-q_n} + \left\|\overline{B}_0(F^2 - F^1)\right\|_{1,U(r)} \Big\}, \quad p \geq q_n. \tag{35}$$

*Число $\mathcal{M}_1$ зависит лишь от $B_\alpha(z), \varphi_\alpha(\mathrm{x})$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $r > r_0$, рассмотрим срезающую функцию $\xi(\mathrm{x}) = \frac{1}{r}(r^2 - |\mathrm{x}|^2)$ для $|\mathrm{x}| < r$, $\xi(\mathrm{x}) = 0$ для $|\mathrm{x}| \geq r$. Впервые такая функция была введена Х. Брезисом в [9].

Введем обозначения

$$a_0(\mathrm{x}, u^i) = a_0^i(\mathrm{x}), \quad a_\alpha(\mathrm{x}, u^i_{x_\alpha}) = a^i_\alpha(\mathrm{x}), \quad \alpha = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Записывая равенство (22) дважды для $u^1(\mathrm{x})$ и $u^2(\mathrm{x})$, вычитая из второго первое, получаем тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \Big( \sum_{\alpha=1}^n (a^2_\alpha - a^1_\alpha) v_{x_\alpha} + (a^2_0 - a^1_0) v \Big)\, d\mathrm{x} = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \left( F^2 - F^1 \right) v\, d\mathrm{x}.$$

Полагая $v(\mathrm{x}) = \xi^p(\mathrm{x})(u^2 - u^1)(\mathrm{x})$, $p \geq \tau$ (см. лемму 4), выводим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \Big( \sum_{\alpha=1}^n (a^2_\alpha - a^1_\alpha)(u^2 - u^1)_{x_\alpha} + (a^2_0 - a^1_0)(u^2 - u^1) \Big)\, d\mathrm{x} \leq$$

$$\leq p \sum_{\alpha=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}_n} |a^2_\alpha - a^1_\alpha||u^2 - u^1||\xi_{x_\alpha}|\xi^{p-1}\, d\mathrm{x} + \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p |F^2 - F^1||u^2 - u^1|\, d\mathrm{x} = p \sum_{\alpha=1}^n J^1_\alpha + J. \quad (36)$$

Применяя (8), для $\varepsilon \in (0, 1)$ устанавливаем неравенства

$$J \leq \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \varepsilon B_0(u^2 - u^1) d\mathrm{x} + \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \overline{B}_0 \left( \varepsilon^{-1}(F^2 - F^1) \right) d\mathrm{x}, \quad (37)$$

$$J^1_\alpha \leq \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \varepsilon \overline{B}_\alpha (a^2_\alpha - a^1_\alpha) d\mathrm{x} + \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p B_\alpha \left( \frac{(u^2 - u^1)}{\varepsilon} \frac{\xi_{x_\alpha}}{\xi} \right) d\mathrm{x} = J^{11}_\alpha + J^{12}_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \quad (38)$$

Оценим интегралы $J^{12}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Поскольку имеют место соотношения (30), то справедливы представления $N$-функции $B_0(z) = B_\alpha(M_\alpha(z))$ в виде композиций двух $N$-функций $M_\alpha(z), B_\alpha(z)$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Далее, применяя (8), (13), получаем

$$J^{12}_\alpha \leq \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p B_\alpha \Big( M_\alpha(\varepsilon(u^2 - u^1)) + \overline{M}_\alpha \Big( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \Big) \Big)\, d\mathrm{x} \leq$$

$$\leq C_1 \Big( \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p B_0(u^2 - u^1)\, d\mathrm{x} + J^{13}_\alpha \Big), \quad (39)$$

где

$$J^{13}_\alpha = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p T_\alpha \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{|\nabla \xi|}{\xi} \right) d\mathrm{x}, \quad T_\alpha(z) = B_\alpha \left( \overline{M}_\alpha(z) \right), \quad \alpha = 1, \ldots, n. \quad (40)$$

Оценим интегралы $J^{11}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Применяя неравенства (9), (7) и используя условие (29), для $\mathrm{x} \in \mathbb{R}_n$ таких, что $u^2_{x_\alpha}(\mathrm{x}) \neq u^1_{x_\alpha}(\mathrm{x})$, выводим

$$\overline{B}_\alpha(a^2_\alpha - a^1_\alpha) \le B^{-1}_\alpha\Big(\overline{B}_\alpha(a^2_\alpha - a^1_\alpha)\Big)\left|a^2_\alpha - a^1_\alpha\right| \le B^{-1}_\alpha\Big(\overline{B}_\alpha\Big(\widehat{a}_\alpha\frac{B_\alpha(u^2_{x_\alpha} - u^1_{x_\alpha})}{|u^2_{x_\alpha} - u^1_{x_\alpha}|}\Big)\Big)\left|a^2_\alpha - a^1_\alpha\right| \le$$
$$\le B^{-1}_\alpha\Big(\overline{B}_\alpha\Big(\widehat{a}_\alpha b_\alpha(|u^2_{x_\alpha} - u^1_{x_\alpha}|)\Big)\Big)\left|a^2_\alpha - a^1_\alpha\right|.$$

Далее, пользуясь (11), (10), (12) и вогнутостью функций $B^{-1}_\alpha(z)$, устанавливаем

$$\overline{B}_\alpha(a^2_\alpha - a^1_\alpha) \le B^{-1}_\alpha\left(C_2\overline{B}_\alpha\left(b_\alpha(|u^2_{x_\alpha} - u^1_{x_\alpha}|)\right)\right)\left|a^2_\alpha - a^1_\alpha\right| \le$$
$$\le B^{-1}_\alpha\left(C_3 B_\alpha(u^2_{x_\alpha} - u^1_{x_\alpha})\right)\left|a^2_\alpha - a^1_\alpha\right| \le C_3|u^2_{x_\alpha} - u^1_{x_\alpha}|\left|a^2_\alpha - a^1_\alpha\right|.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$J^{11}_\alpha \le \varepsilon C_3\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p|u^2_{x_\alpha} - u^1_{x_\alpha}|\left|a^2_\alpha - a^1_\alpha\right| d\mathrm{x}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{41}$$

Соединяя (38), (39), (41), получаем

$$J^1_\alpha \le \varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\left(C_3(u^2 - u^1)_{x_\alpha}(a^2_\alpha - a^1_\alpha) + C_1 B_0(u^2 - u^1)\right)d\mathrm{x} + C_1 J^{13}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{42}$$

Из (36), (37), (42), применяя (28), выводим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\Big(\overline{a}_0 B_0(u^2 - u^1) + \sum_{\alpha=1}^n (u^2 - u^1)_{x_\alpha}(a^2_\alpha - a^1_\alpha)\Big)d\mathrm{x} \le$$
$$\le \varepsilon C_4\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\Big(B_0(u^2 - u^1) + \sum_{\alpha=1}^n (u^2 - u^1)_{x_\alpha}(a^2_\alpha - a^1_\alpha)\Big)d\mathrm{x} +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\overline{B}_0\Big(\varepsilon^{-1}(F^2 - F^1)\Big)d\mathrm{x} + C_5\sum_{\alpha=1}^n J^{13}_\alpha.$$

Выбирая $\varepsilon$ достаточно малым, применяя (11), устанавливаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p B_0(u^2 - u^1)\,d\mathrm{x} \le C_6\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\overline{B}_0\left(F^2 - F^1\right)d\mathrm{x} + C_6\sum_{\alpha=1}^n J^{13}_\alpha. \tag{43}$$

Обоснуем конечность интегралов $J^{13}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что $|\nabla\xi| \le 2$, применяя (31), (33), получаем неравенства

$$J^{13}_\alpha \le \int\limits_{U(r)}\xi^p T_\alpha\left(\frac{C_7}{\xi}\right)d\mathrm{x} \le C_8\int\limits_{U(r)\cap\{\mathrm{x}\,|\,C_7/\xi(\mathrm{x})<1\}}\xi^{p-q_n}\,d\mathrm{x} + C_8\int\limits_{U(r)\cap\{\mathrm{x}\,|\,C_7/\xi(\mathrm{x})\ge 1\}}\xi^{p-\tau}\,d\mathrm{x}. \tag{44}$$

В итоге имеем

$$J^{13}_\alpha \le C_8 r^{n-q_n+p}, \quad r \ge 1, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{45}$$

Очевидно, $\xi(\mathrm{x}) \ge r - r_0$ при $|\mathrm{x}| \le r_0$, поэтому из (43), (45) следует неравенство (35).

$\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Теорема 3). Предполагая, что существуют два решения $u^1, u^2$ уравнения (1), из оценки (35) получим

$$\left\|B_0(u^2 - u^1)\right\|_{1,U(r_0)} \le \mathcal{M}_1\Big(\frac{r}{r - r_0}\Big)^p r^{n-q_n}, \quad p \ge q_n, \quad r > r_0.$$

Устремляя $r$ к бесконечности, устанавливаем, что $\|B_0(u^1-u^2)\|_{1,U(r_0)}=0$ для любого $r_0>0$. Отсюда следует, что $B_0(u^1-u^2)=0$ в $\mathbb{R}_n$, поэтому $u^1=u^2$ в $\mathbb{R}_n$.

Далее, запишем неравенство (35) для решений $u^0, u^k$ уравнения (1) с функциями $F^0, F^k$ в правой части, получим

$$\left\|B_0(u^k-u^0)\right\|_{1,U(r_0)} \le \mathcal{M}_1\Big(\frac{r}{r-r_0}\Big)^p\left\{r^{n-q_n}+\left\|\overline{B}_0(F^k-F^0)\right\|_{1,U(r)}\right\}, \quad p\ge q_n, \quad r>r_0. \tag{46}$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное. Для любого $r_0>0$ выберем $r\ge\max\{1,2r_0\}$ так, чтобы

$$\mathcal{M}_1\left(\frac{r}{r-r_0}\right)^p r^{n-q_n}<\varepsilon/2. \tag{47}$$

Из сходимости по норме $\|F^k-F^0\|_{\overline{B}_0,U(r)}\to 0$ следует сходимость в среднем $\|\overline{B}_0(F^k-$ $-F^0)\|_{1,U(r)}\to 0$ при $k\to\infty$. Поэтому существует $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что при $k>k_0$ справедливо неравенство

$$\mathcal{M}_1\Big(\frac{r}{r-r_0}\Big)^p\left\|\overline{B}_0(F^k-F^0)\right\|_{1,U(r)}<\varepsilon/2. \tag{48}$$

Соединяя (46)–(48), выводим неравенство

$$\left\|B_0(u^k-u^0)\right\|_{1,U(r_0)}<\varepsilon, \quad k>k_0.$$

Поскольку $N$-функция $B_0$ удовлетворяет $\Delta_2$-условию, из сходимости в среднем следует сходимость по норме $\|u^k-u^0\|_{B_0,U(r_0)}\to 0$ при $k\to\infty$ для любого $r_0>0$.

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Теорема 2). Полагая в (22) $v(\mathrm{x})=\xi^p(\mathrm{x})u(\mathrm{x})$, $p\ge\tau$, выводим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\Big(\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha u_{x_\alpha}+a_0u\Big)\,d\mathrm{x}\le$$
$$\le p\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}_n}|a_\alpha|\cdot|u|\cdot|\xi_{x_\alpha}|\xi^{p-1}\,d\mathrm{x}+\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p|F_0|\cdot|u|\,d\mathrm{x} = pJ^1+J. \tag{49}$$

Применяя (8), для $\varepsilon\in(0,1)$ устанавливаем неравенства

$$J \le \int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\varepsilon B_0(u)\,d\mathrm{x}+\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\overline{B}_0\left(F_0/\varepsilon\right)\,d\mathrm{x}, \tag{50}$$

$$J^1\le\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^p\varepsilon\overline{B}_\alpha(a_\alpha)\,d\mathrm{x}+\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^pB_\alpha\left(\frac{u}{\varepsilon}\frac{\xi_{x_\alpha}}{\xi}\right)\,dx = J^{11}+J^{12}. \tag{51}$$

Интеграл $J^{12}$ оценивается так же, как интегралы $J^{12}_\alpha$ (см. (39), (40)):

$$J^{12}\le C_1\Big(\varepsilon n\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^pB_0(u)\,d\mathrm{x}+J^{13}\Big), \tag{52}$$

где

$$J^{13}=\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}_n}\xi^pT_\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{|\nabla\xi|}{\xi}\right)d\mathrm{x}, \quad T_\alpha(z)=B_\alpha\left(\overline{M}_\alpha(z)\right).$$

Применяя неравенство (3), выводим

$$J^{11} \le \varepsilon C_2 \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \mathbf{B}(u)\, d\mathrm{x} + C_2 \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \Psi(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}. \tag{53}$$

Соединяя (51), (52), (53), получаем

$$J^1 \le \varepsilon C_3 \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \mathbf{B}(u) d\mathrm{x} + C_2 \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \Psi(\mathrm{x}) d\mathrm{x} + C_1 J^{13}. \tag{54}$$

Из (49), (50), (54), применяя (2), выводим неравенство

$$\overline{a} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \mathbf{B}(u)\, d\mathrm{x} \le \varepsilon C_4 \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \mathbf{B}(u)\, d\mathrm{x} + C_4 \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p (\Psi + \psi)\, d\mathrm{x} + \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \overline{B}_0 \left(F_0/\varepsilon\right)\, d\mathrm{x} + C_4 J^{13}.$$

Выбирая $\varepsilon$ достаточно малым, применяя (11), устанавливаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \mathbf{B}(u)\, d\mathrm{x} \le C_5 \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p \overline{B}_0 \left(F_0\right)\, d\mathrm{x} + C_5 \int\limits_{\mathbb{R}_n} \xi^p (\Psi + \psi)\, d\mathrm{x} + C_5 J^{13}. \tag{55}$$

Используя (45), из (55) для $r > r_0,\ r \ge 1$ выводим

$$\big\|\mathbf{B}(u)\big\|_{1,U(r_0)} \le C_6 \Big(\frac{r}{r - r_0}\Big)^p \big(r^{n-q_n} + \|\overline{B}_0(F_0)\|_{1,U(r)} + \|\psi + \Psi\|_{1,U(r)}\big), \quad p \ge q_n.$$

Полагая $r_0 = r/2$, устанавливаем оценку (27).

## 5. Пример

Класс уравнений, удовлетворяющих условиям теорем 1, 2, довольно широк, примеры таких уравнений с нестепенными нелинейностями приведены в других работах авторов. Однако условия (28), (29) для функций $a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha),\ \alpha = 0, 1, \ldots, n$, являются весьма ограничительными. Здесь приведен пример анизотропного уравнения с меняющимися степенными нелинейностями, для которого выполнены условия теоремы 3.

Введем обозначение

$$z^{[\overline{p},\widehat{p}]} = \begin{cases} z^{\overline{p}}, & 0 < z < 1, \\ z^{\widehat{p}}, & z \ge 1. \end{cases}$$

**Лемма 6.** *Пусть $2 \le \overline{p}_0 < \widehat{p}_0$, $1 < \widehat{p} < \overline{p} \le 2$, тогда для любых $y, z \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства*

$$\Big(|z|^{[\overline{p}_0-2,\widehat{p}_0-2]} z - |y|^{[\overline{p}_0-2,\widehat{p}_0-2]} y\Big)(z - y) \ge \gamma_0 |z - y|^{[\overline{p}_0,\widehat{p}_0]}, \tag{56}$$

$$0 \le \Big(|z|^{[\overline{p}-2,\widehat{p}-2]} z - |y|^{[\overline{p}-2,\widehat{p}-2]} y\Big)(z - y) \le \gamma |z - y|^{[\overline{p},\widehat{p}]} \tag{57}$$

*с константами $\gamma_0, \gamma$, зависящими только от $\overline{p}_0, \widehat{p}_0$ и $\overline{p}, \widehat{p}$ соответственно.*

**Пример 1.** Пусть $n \ge 2,\ 1 < \widehat{p}_\alpha < \overline{p}_\alpha \le 2$,

$$B_\alpha(z) = \begin{cases} |z|^{\overline{p}_\alpha}/\overline{p}_\alpha, & |z| < 1 \\ |z|^{\widehat{p}_\alpha}/\widehat{p}_\alpha + 1/\overline{p}_\alpha - 1/\widehat{p}_\alpha, & |z| \ge 1 \end{cases}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

и справедливы неравенства

$$\overline{p}_1 \geq \overline{p}_2 \geq \ldots \overline{p}_n, \quad 1 < \sum_{\alpha=1}^{n} 1/\overline{p}_\alpha \leq n/\overline{p}_n < 1 + n/2, \quad 1 < \sum_{\alpha=1}^{n} 1/\widehat{p}_\alpha < 1 + n/2. \tag{58}$$

Поскольку

$$h(\theta) = C_1 \theta^{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/\overline{p}_\alpha - 1\right)/n}, \quad 0 \leq \theta < \theta_1 < 1;$$
$$C_2 \theta^{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/\widehat{p}_\alpha - 1\right)/n} \leq h(\theta) \leq C_3 \theta^{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/\widehat{p}_\alpha - 1\right)/n}, \quad \theta > \theta_2 > 1,$$
$$\int_0^1 \theta^{-1} h(\theta)\, d\theta < \infty, \quad \int_1^\infty \theta^{-1} h(\theta)\, d\theta = \infty,$$

то можно определить функцию $B^*(z)$. При этом справедливы неравенства

$$C_4 |z|^{n/\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/\widehat{p}_\alpha - 1\right)} \leq B^*(z) \leq C_5 |z|^{n/\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/\widehat{p}_\alpha - 1\right)}, \quad |z| \geq z_0 > 1.$$

Положим

$$B_0(z) = \begin{cases} 1/\overline{p}_0 |z|^{\overline{p}_0}, & |z| < 1 \\ 1/\widehat{p}_0 |z|^{\widehat{p}_0} + 1/\overline{p}_0 - 1/\widehat{p}_0, & |z| \geq 1 \end{cases},$$

где

$$\widehat{p}_0 = n\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} 1/\widehat{p}_\alpha - 1\Big)^{-1}. \tag{59}$$

Показатель $\overline{p}_0$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$2 \leq \overline{p}_0 < \widehat{p}_0, \quad \overline{p}_0 < \frac{n\overline{p}_n}{n - \overline{p}_n}. \tag{60}$$

Ввиду условий (58) такой выбор возможен. Кроме того, из (59), (58), (60) следует выполнение условий (18), (23), (25), (26).

Рассмотрим функции

$$a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha) = 2\varphi_\alpha(\mathrm{x}) |s_\alpha|^{[\overline{p}_\alpha - 2, \widehat{p}_\alpha - 2]} s_\alpha + f_\alpha(\mathrm{x}),$$

с $1/\varphi_\alpha(\mathrm{x}),\ \varphi_\alpha(\mathrm{x}) \in L_\infty(\mathbb{R}_n),\ f_\alpha(\mathrm{x}) \in L_{\overline{B}_\alpha,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n),\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $a_\alpha(\mathrm{x}, s_\alpha) = 2\varphi_\alpha(\mathrm{x}) B'_\alpha(s_\alpha) + f_\alpha(\mathrm{x}),\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$, то по лемме 3 выполнены условия (2)–(4). Кроме того, согласно лемме 6 справедливы неравенства (28), (29). Таким образом, по теоремам 1–3 существует единственное обобщенное решение уравнения (1), которое подчиняется оценке (27).

## Список литературы

1. *Donaldson T.* Nonlinear Elliptic Boundari Value Problems in Orlicz–Sobolev Spaces // J. Diff. Eq. 1971. Vol. 10. No. 3. P. 507–528.

2. *Климов В. С.* Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к краевым задачам // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 2. С. 334–348.

3. *Fougeres A.* Operateurs Elliptiques du Calcul des Variations a Coefficients Tres Fortement non Lineaires // C. R. Acad. Sei. Paris Ser. A–B. 1972. Vol. 274. P. 763–766.

4. *Gossez J.-P.* Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems for Equations with Rapidly (or Slowly) Increasing Coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 190. P. 163–206.

5. *Gwiazda P., Wittbold P., Wróblewska A., Zimmermann A.* Renormalized Solutions of Nonlinear Elliptic Problems in Generalized Orlicz Spaces // Ph.D. Programme: Mathematical Methods in Natural Sciences (MMNS). Preprint No. 2011–013 (2011).

6. *Каримов Р. Х., Кожевникова Л. М.* Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях // Уфимск. мат. журн. 2010. Т. 2, вып. 2. С. 53–66

7. *Кожевникова Л. М., Хаджи А. А.* Решения анизотопных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Вып. 1 (30). С. 90–96.

8. *Гладков А. Л.* Задача Дирихле для некоторых вырожденных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. С. 267–273.

9. *Brezis H.* Semilinear Equations in $R_N$ without Condition at Infnity // Appl. Math. Optim. 1984. Vol. 12. No. 3. P. 271–282.

10. *Brezis H.* Elliptic and Parabolic Semilinear Problems without Conditions at Infnity // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. Vol. 106. No. 3. P. 217–241.

11. *Diaz J. I., Oleinik O. A.* Nonlinear Elliptic Boundary-Value Problems in Unbounded Domains and the Asymptotic Behaviour of its Solution // C. R. Acad, Sci. Paris Ser. I Math. 1992. Vol. 315. No. 1. P. 787–792.

12. *Bokalo M., Domanska O.* On Well-Posedness of Boundary Problems for Elliptic Equations in General Anisotropic Lebesgue–Sobolev Spaces // Mathematychni Studii. 2007. Vol. 28. No. 1. P. 77–91.

13. *Кожевникова Л. М., Хаджи А. А.* Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // Мат. сб. 2015. Т. 206, вып. 8. С. 99–126.

14. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958.

15. *Королев А. Г.* Об ограниченности обобщенных решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями // Мат. заметки. 1987. Т. 42, № 2. С. 244–255.

*Материал поступил в редколлегию 25.12.2015*

**Адреса авторов**

КОЖЕВНИКОВА Лариса Михайловна
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия
kosul@mail.ru

НИКИТИНА Анна Александровна
Тюменский государственный университет
ул. Володарского, 6, Тюмень, 625003, Россия
anna_5955@mail.ru