Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, А. И. Штерн, Деривации групповых алгебр, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2016, том 21, выпуск 6, 65–78

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
9 февраля 2025 г., 04:11:03

Деривации групповых алгебр

А. А. АРУТЮНОВ
Московский физико-технический институт
email: andronick.arutyunov@gmail.com

А. С. МИЩЕНКО
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
email: asmish.prof@gmail.com

А. И. ШТЕРН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: aishtern@mtu-net.ru

УДК 517.986.3+514.169+512.544.42

Ключевые слова: некоммутативная геометрия, групповые алгебры, дифференцирования в групповых алгебрах, комплексы Кэли.

Аннотация

В работе даётся метод описания внешних дериваций групповой алгебры конечно представимой группы. Описание дериваций дается в терминах характеров группоида присоединённого действия группы.

Abstract

A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, A. I. Shtern, Derivations of group algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 6, pp. 65—78.

In the paper, a method of describing the outer derivations of the group algebra of a finitely presentable group is given. The description of derivations is given in terms of characters of the groupoid of the adjoint action of the group.

Памяти Ю. П. Соловьёва посвящается

1. Введение

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ и некоторый бимодуль E над алгеброй $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathbf{Der}(\mathcal{A}, E)$ пространство всех дериваций из алгебры $\mathcal{A}$ в бимодуль E, т. е. множество отображений

$$D\colon \mathcal{A} \to E,$$

которые удовлетворяют условию

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \quad a, b \in \mathcal{A}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 6, с. 65—78.
© 2016 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

(см. [5,7]). Среди дериваций $\mathbf{Der}(\mathcal{A}, E)$ выделяются так называемые внутренние деривации $\mathbf{Int}(\mathcal{A}, E) \subset \mathbf{Der}(\mathcal{A}, E)$, которые задаются присоединёнными представлениями

$$\mathbf{ad}_x(a) \stackrel{\text{def}}{=} xa - ax, \quad x \in E, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Проблема дериваций формулируется следующим образом: все ли деривации являются внутренними? Эта задача рассматривалась не для всяких алгебр, а для групповых алгебр $\mathcal{A} = C[G]$ некоторой группы G. Более точно, рассматривается групповая алгебра $\bar{\mathcal{A}} = L^1(G)$ и бимодуль $E = M(G)$, где $M(G)$ есть алгебра всех ограниченных мер на группе G с операцией умножения, задаваемой свёрткой мер.

Вопрос из [4] (вопрос 5.6.B, с. 746) формулируется следующим образом. Пусть G — локально компактная группа. Всякая ли деривация из алгебры $\mathcal{A} = L^1(G)$ в бимодуль $E = M(G)$ является внутренней деривацией? Утвердительный ответ оправдывается следующим соображением.

В случае, когда группа G является дискретной свободной абелевой группой с конечным числом образующих, т. е. $G \approx \mathbb{Z}^n$, то алгебру $\bar{\mathcal{A}} = L^1(G)$ можно можно отождествить с алгеброй Фурье $A(\mathbb{T}^n)$ непрерывных функций на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$, коэффициенты Фурье которых образуют абсолютно сходящийся кратный ряд, $\mathcal{A} = A(\mathbb{T}^n) \subset C(\mathbb{T}^n)$ (эта алгебра Фурье меньше алгебры непрерывных функций). Дериваций на алгебре $A(\mathbb{T}^n)$ нет, поскольку в ней достаточно много негладких функций, впрочем и внутренних дериваций тоже нет, поскольку алгебра $\bar{\mathcal{A}} = L^1(G)$ коммутативна.

Нас же интересует не вся банахова алгебра $\bar{\mathcal{A}} = L^1(G)$, а только её плотная подалгебра $\mathcal{A} = C[G] \subset \bar{\mathcal{A}}$, состоящая из гладких элементов в алгебре $\bar{\mathcal{A}} = L^1(G)$ по терминологии А. Кона [2, с. 247]. Для групповой алгебры $\mathcal{A} = C[G]$ тоже можно сформулировать аналогичную задачу: описать алгебру всех внешних дериваций групповой алгебры $\mathcal{A} = C[G]$.

2. Групповая алгебра $C[G]$

Рассмотрим групповую алгебру $\mathcal{A} = C[G]$. Мы предполагаем, что группа G является конечно представимой дискретной группой.

Произвольный элемент $u \in \mathcal{A}$ — это конечная линейная комбинация

$$u = \sum_{g \in G} \lambda^g \cdot g.$$

Рассмотрим произвольный линейный оператор

$$X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

Линейный оператор X имеет матричный вид

$$X(u) = \sum_{h \in G} \left(\sum_{g \in G} x_g^h \lambda^g \right) \cdot h, \tag{1}$$

где x_g^h определяется равенством

$$X(g) = \sum_h x_g^h \cdot h \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

Поскольку сумма в равенстве (2) должна быть конечной, это значит, что матрица $X = \|x_g^h\|_{g,h\in G}$ должна удовлетворять естественному условию

(F1) для любого индекса $g \in G$ множество тех индексов $h \in G$, для которых x_g^h отлично от нуля, конечно.

В частности, из условия (F1) следует, что в матричном представлении (1) внешняя сумма тоже конечна.

Разумеется, верно и обратное утверждение: если матрица $X = \|x_h^g\|_{g,h\in G}$ удовлетворяет условию (F1), то она корректно задаёт линейный оператор $X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ по формуле (1). Всё это оправдывает обозначение оператора X и его матрицы $X = \|x_g^h\|_{g,h\in G}$ одним и тем же символом X.

Рассмотрим теперь так называемое дифференцирование (деривацию) в алгебре $\mathcal{A}$, т. е. такой оператор X, для которого выполнено условие

(F2) $X(u \cdot v) = X(u) \cdot v + u \cdot X(v), \quad u, v \in \mathcal{A}.$

Множество всех дериваций алгебры $\mathcal{A}$ обозначается через $\mathbf{Der}(\mathcal{A})$ и образует алгебру Ли по отношению к коммутатору операторов.

Естественная задача заключается в том, чтобы описать все дифференцирования алгебры $\mathcal{A}$. Для этого нужно соблюсти условия (F1) и (F2). Каждое условие в отдельности проверяется более или менее просто. Одновременное выполнение этих условий составляет содержание настоящей работы.

Имеется класс так называемых внутренних дифференцирований, т. е. операторов вида

$$X = \mathbf{ad}(u), \quad X(v) = \mathbf{ad}(u)(v) = [u, v] = u \cdot v - v \cdot u, \quad u, v \in \mathcal{A}.$$

Все внутренние деривации автоматически удовлетворяют обоим условиям (F1) и (F2). Они обозначаются через $\mathbf{Int}(\mathcal{A})$ и образуют подалгебру Ли в алгебре Ли $\mathbf{Der}(\mathcal{A})$,

$$\mathbf{Int}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{Der}(\mathcal{A}).$$

Предложение 1. *Подалгебра* $\mathbf{Int}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{Der}(\mathcal{A})$ — *идеал.*

Действительно, требуется проверить выполнение условия

$$[\mathbf{Int}(\mathcal{A}), \mathbf{Der}(\mathcal{A})] \subset \mathbf{Int}(\mathcal{A}).$$

Если $\mathbf{ad}(u) \in \mathbf{Int}(\mathcal{A})$, $X \in \mathbf{Der}(\mathcal{A})$, то коммутатор $[\mathbf{ad}(u), X]$ вычисляется по формуле

$$[\mathbf{ad}(u), X](v) = \mathbf{ad}(u)\big(X(v)\big) - X\big(\mathbf{ad}(u)(v)\big) =$$
$$= [u, X(v)] - X([u, v]) = [u, X(v)] - [X(u), v] - [u, X(v)] = -\,\mathbf{ad}\big(X(u)\big)(v),$$

т. е. $[\mathbf{ad}(u), X] \in \mathbf{Int}(\mathcal{A})$.

3. Описание дериваций как функций на группоиде $\mathcal{G}$

Обозначим через $\mathcal{G}$ группоид, ассоциированный с присоединённым действием группы G (или группоид действия, см., например, [1, с. 18, пример j]).

Группоид $\mathcal{G}$ состоит из объектов $\mathrm{Obj}(\mathcal{G}) = G$ и морфизмов

$$\mathrm{Mor}(a, b) = \{g \in G\colon ga = bg \text{ или } b = \mathrm{Ad}(g)(a)\}, \quad a, b \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G}).$$

Элементы множества всех морфизмов

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{G}) = \coprod_{a,b \in \mathrm{Obj}(\mathcal{G})} \mathrm{Mor}(a, b)$$

удобно обозначать в виде столбца

$$\xi = \left(\frac{a \to b}{g}\right) \in \mathrm{Mor}(a, b), \quad b = gag^{-1} = \mathrm{Ad}(g)(a).$$

Композиция $*$ двух морфизмов задаётся формулой

$$\left(\frac{a \to c}{g_2 g_1}\right) = \left(\frac{b \to c}{g_2}\right) * \left(\frac{a \to b}{g_1}\right),$$
$$b = \mathrm{Ad}(g_1)(a), \quad c = \mathrm{Ad}(g_2)(b) = \mathrm{Ad}(g_2)\bigl(\mathrm{Ad}(g_1)(a)\bigr) = \mathrm{Ad}\bigl(g_2 \mathrm{Ad}(g_1)(a)\bigr),$$

которая соответствует диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ad}(g_1)(a) \arrow[d, equal] & \mathrm{Ad}(g_2 g_1)(a) \arrow[d, equal] \\
a \arrow[r, "g_1"] \arrow[rr, bend right, "g_2 g_1"'] & b \arrow[r, "g_2"] & c
\end{tikzcd}$$

Другое изображение морфизма:

$$\xi = \left(a \xrightarrow[ga=bg]{g} b \right),$$

композиции двух морфизмов:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g_1", "g_1 a = b g_1"'] \arrow[rr, bend left=60, "g_2 g_1", "g_2 g_1 a = c g_2 g_1"'] & b \arrow[r, "g_2", "g_2 b = c g_2"'] & c
\end{tikzcd}.$$

Операторы как функции на группоиде

Линейный оператор $X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ описывается матрицей $X = \|x_g^h\|_{g,h\in G}$, которая удовлетворяет условию

(F1) для любого индекса $g \in G$ множество тех индексов $h \in G$, для которых x_g^h отлично от нуля, конечно.

Матрица $X = \|x_g^h\|_{g,h\in G}$ задаёт функцию на группоиде $\mathcal{G}$

$$T^X\colon \mathrm{Mor}(\mathcal{G}) \to R,$$

ассоциированную с оператором X, которая определяется следующим образом: если

$$\xi = \left(\frac{a \to b}{g}\right) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{G}),$$

то полагаем

$$T^X(\xi) = T^X\left(\frac{a \to b}{g}\right) = x_g^{ga=bg}.$$

Условие (F1), налагаемое на коэффициенты матрицы X, можно переформулировать в терминах функции T:

(T1) для любого индекса $g \in G$ множество морфизмов вида

$$\xi = \left(\frac{a \to b}{g}\right),$$

для которых $T^X(\xi) \neq 0$, конечно.

Множество всех морфизмов $\mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ представляется в виде несвязного объединения

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{G}) = \coprod_{g\in G} \mathcal{H}_g,$$

где

$$\mathcal{H}_g = \left\{\xi = \left(\frac{a \to b}{g}\right) : a \in G,\ b = gag^{-1} \in G\right\}.$$

Тогда условие (T1), налагаемое на функцию T, можно эквивалентным образом переформулировать следующим образом.

Предложение 2. *Функция*

$$T^X\colon \mathrm{Mor}(\mathcal{G}) \to \mathbf{C},$$

задаётся линейным оператором

$$X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$ ограничение $(T^X)|_{\mathcal{H}_g}\colon \mathcal{H}_g \to \mathbf{C}$ является финитной функцией.

Такие функции $T\colon \mathrm{Mor}(\mathcal{G}) \to \mathbf{C}$, которые удовлетворяют условию финитности на каждом подмножестве $\mathcal{H}_g$, $g \in G$, будем называть локально финитными функциями на группоиде $\mathcal{G}$.

Рассмотрим два морфизма

$$\xi = \left(\frac{a \to b}{g}\right), \quad \eta = \left(\frac{b \to c}{g'}\right),$$

которые допускают, следовательно, композицию

$$\eta * \xi = \left(\frac{a \to c}{g'g}\right).$$

Теорема 1. *Оператор $X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является дифференцированием* (*т. е. деривацией*) *тогда и только тогда, когда для ассоциированной с оператором X функции T^X на группоиде $\mathcal{G}$ выполняется условие*

(T2) $T^X(\eta * \xi) = T^X(\eta) + T^X(\xi)$

для любой пары морфизмов ξ и η, допускающих композицию $\eta * \xi$.

Доказательство. Пусть матрица оператора X имеет вид $X = \|x_g^h\|_{g,h\in G}$. Значит, функция T^X принимает значение

$$T^X(\xi) = T^X\left(\frac{a \to b}{g}\right) = x_g^{ga=bg}.$$

Пусть

$$\xi = \left(\frac{a \to b}{g_1}\right), \quad \eta = \left(\frac{b \to c}{g_2}\right), \quad \eta * \xi = \left(\frac{a \to c}{g_2 g_1}\right).$$

Тогда

$$T^X(\eta * \xi) = x_{g_2 g_1}^{g_2 g_1 a = c g_2 g_1} = x_{g_2 g_1}^h,$$
$$T^X(\xi) = x_{g_1}^{g_1 a = b g_1} = x_{g_1}^{g_2^{-1}h}, \quad T^X(\eta) = x_{g_2}^{g_2 b = c g_2} = x_{g_2}^{h g_1^{-1}}.$$

С другой стороны,

$$X(g_2 g_1) = X(g_2) g_1 + g_2 X(g_1).$$

Другими словами,

$$X(g_2 g_1) = \sum_{h\in G} x_{g_2 g_1}^h \cdot h = \sum_{h\in G} x_{g_2}^h \cdot h \cdot g_1 + g_2 \cdot \sum_{h\in G} x_{g_1}^h \cdot h = \sum_{h\in G} x_{g_2}^{h g_1^{-1}} \cdot h + \sum_{h\in G} x_{g_1}^{g_2^{-1}h} \cdot h.$$

Значит,

$$x_{g_2 g_1}^h = x_{g_2}^{h g_1^{-1}} + x_{g_1}^{g_2^{-1}h}.$$

Таким образом,

$$T^X(\eta * \xi) = T^X(\eta) + T^X(\xi). \qquad \square$$

Функцию $T\colon \mathrm{Mor}(\mathcal{G}) \to R$ на группоиде $\mathcal{G}$, удовлетворяющую условию аддитивности (T2), будем называть характером, а множество всех характеров на группоиде $\mathcal{G}$ обозначать через $T(\mathcal{G})$. Пространство всех локально финитных характеров группоида $\mathcal{G}$ будем обозначать через $T_f(\mathcal{G}) \subset T(\mathcal{G})$.

Таким образом существует отображение

$$\mathbf{Der}(\mathcal{A}) \xrightarrow{T} T_f(\mathcal{G}),$$

которое является взаимно-однозначным отображением.

4. О внутренних деривациях

Имеются работы (см., например, [7]), связанные с так называемыми внутренними дифференцированиями или внутренними деривациями групповой алгебры. Коммутатор в алгебре является деривацией, которая называется внутренней деривацией.

Возникает естественный вопрос: как внутренние деривации описываются в терминах матрицы оператора деривации?

Ответ можно сформулировать следующим образом. Пусть $a \in G$, $\mathbf{ad}(a)$ — коммутатор:

$$\mathbf{ad}(a)(x) = [a, x], \quad x \in C^\infty(G).$$

Это внутренняя деривация. Обозначим через $\|A_g^h\|$ матрицу деривации $\mathbf{ad}(a)$. Тогда

$$\mathbf{ad}(a)(g) = \sum_{h\in G} A_g^h \cdot h.$$

Поскольку $\mathbf{ad}(a)(g) = ag - ga$, то

$$A_g^h = \delta_h^{ag} - \delta_h^{ga}.$$

Матрица оператора $\mathbf{ad}(a)$ задаёт функцию $T^{\mathbf{ad}(a)}$ на множестве всех морфизмов $\mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ категории $\mathcal{G}$. Пусть

$$\xi = \left(\frac{\alpha \to \beta}{g}\right) \; -$$

морфизм в категории $\mathcal{G}$, $g\alpha = \beta g (= h)$. Тогда

$$T^{\mathbf{ad}(a)}(\xi) = T^{\mathbf{ad}(a)}\left(\frac{\alpha \to \beta}{g}\right) = A_g^{g\alpha=\beta g} = \delta_{g\alpha=\beta g}^{ag} - \delta_{g\alpha=\beta g}^{ga}.$$

Первое слагаемое функции $T^{\mathbf{ad}(a)}(\xi)$ равно единице тогда и только тогда, когда $\beta = a$, т. е. когда $\xi \in \mathrm{Mor}(g^{-1}ag, a)$. Аналогично второе слагаемое функции $T^{\mathbf{ad}(a)}(\xi)$ равно минус единице тогда и только тогда, когда $\alpha = a$, т. е. когда $\xi \in \mathrm{Mor}(a, gag^{-1})$. Другими словами, на морфизмах $\mathrm{Mor}(g^{-1}ag, a)$ матрица $\mathbf{ad}(a)$ равна единице, на морфизмах $\mathrm{Mor}(a, gag^{-1})$ равна минус единице и на морфизмах $\mathrm{Mor}(u,u)$ равна нулю, равно как и на морфизмах $\mathrm{Mor}(a,a)$ и $\mathrm{Mor}(v,v)$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd} u \arrow[loop above, "T=0"] \arrow[r] \arrow[r, bend right, "T=+1"'] & a \arrow[loop above, "T=0"] \arrow[r] \arrow[r, bend right, "T=-1"'] & v \arrow[loop above, "T=0"] \end{tikzcd}.$$

Отсюда получаем теорему.

Теорема 2 (о внутренних деривациях)**.** *Характеры внутренних дериваций тривиальны на* $\mathrm{Mor}(a,a)$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Int}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\cap"'] & \mathbf{Der}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\approx"', "T"] & \\ \ker p_a \arrow[r] & T_f(\mathcal{G}) \arrow[r, "p_a"] & T_f\big(\mathrm{Mor}(a,a)\big) \end{tikzcd}.$$

Множество $T_f\big(\mathrm{Mor}(a,a)\big)$ *совпадает с группой всех характеров*:

$$T_f\big(\mathrm{Mor}(a,a)\big) = T\big(\mathrm{Mor}(a,a)\big).$$

Заметим, что если характер $T \in T(\mathcal{G})$ равен нулю на $\mathrm{Mor}(a,a)$, то он равен нулю на всяком $\mathrm{Mor}(u,u)$ для сопряжённого элемента $u \in [a]$, $u = gag^{-1}$, так что диаграмма имеет следующий вид:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Int}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\cap"', "T"] & \mathbf{Der}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\approx"', "T"] & \\ \ker p_a \arrow[r] & T_f(\mathcal{G}) \arrow[r, "p_a"] & T\big(\mathrm{Mor}(a,a)\big) \end{tikzcd}.$$

С точки зрения деривационной проблемы Джонсона [6] о деривациях естественно обозначить через $\mathbf{Out}(\mathcal{A})$ фактор-группу $\mathbf{Out}(\mathcal{A}) = \mathbf{Der}(\mathcal{A})/\,\mathbf{Int}(\mathcal{A})$ и назвать её алгеброй внешних дериваций алгебры $\mathcal{A}$. Таким образом, предыдущая диаграмма дополняется до диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{Int}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\cap"', "T"] & \mathbf{Der}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"', "T"] & \mathbf{Out}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker p_a \arrow[r] & T_f(\mathcal{G}) \arrow[r, "p_a"] & T\big(\mathrm{Mor}(a,a)\big) & \end{tikzcd}.$$

Описание внутренних дериваций

Прежде всего заметим, что множество морфизмов $\mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ группоида $\mathcal{G}$ распадается на несвязное объединение морфизмов по классам сопряжённых элементов группы G, являющихся по определению объектами группоида $\mathcal{G}$. Сама группа G разлагается в несвязное объединение классов сопряжённых элементов:

$$G = \coprod_{g\in G} [g], \quad [g] = \{h\colon \text{найдётся } a \in G, \text{ такой что } h = aga^{-1}\}.$$

Множество морфизмов тоже представляется в виде несвязного объединения:

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{G}) = \coprod_{[g]} \mathrm{Mor}(\mathcal{G}_{[g]}).$$

Это значит, что построение любой деривации можно строить в виде дериваций $\mathbf{Der}_{[g]}(\mathbf{A})$ независимо в каждой подкатегории $\mathcal{G}_{[g]}$ как локально финитные характеры на каждой из них.

Естественная проблема заключается в том, чтобы установить, верно ли, что множество всех дифференцирований, тривиальных на всех $\mathrm{Mor}(u,u)$, совпадает с множеством внутренних дифференцирований. Другими словами, верно ли, что вложение

$$\mathbf{Int}_{[u]}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\subset} \ker p_u$$

является изоморфизмом:

$$\mathbf{Int}_{[u]}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\subset} \ker p_u \xrightarrow{\subset} T_f(\mathcal{G}) \xrightarrow{p_u} T\big(\mathrm{Mor}(u,u)\big)\ .$$

Анализ этой проблемы позволяет сформулировать конкретные условия на локально финитный характер $T\colon \mathrm{Mor}(\mathcal{G}) \to R$, который реализует внутреннюю деривацию $X \in \mathbf{Int}(\mathcal{G})$,

$$T = T^X.$$

Случай единичного элемента $[e]$

В частности, одна из подкатегорий соответствует единичному элементу $e \in G$, у которого $[e] = \{e\}$. В этом частном случае подкатегория $\mathcal{G}_{[e]}$ состоит из одного объекта $e \in G$, а множество морфизмов изоморфно группе G, $\mathrm{Mor}(e,e) \approx G$. В частности, множество локально финитных характеров $T_f(\mathcal{G}_{[e]}) \approx T(\mathcal{G}_{[e]}) \approx T(G)$ изоморфно группе всех характеров на группе G. Каждый характер на группе $T \in T(G)$ реализуется деривацией $X \in \mathbf{Der}(G)$, $T^X = T$. Действительно, характер $T \in T(G)$ — это характер на категории $\mathcal{G}$, который равен T на $\mathrm{Mor}(e,e)$ и равен нулю на всех остальных слагаемых $\mathrm{Mor}(\mathcal{G}_{[g]})$, $g \neq e$. Поэтому соответствующая матрица $\|X_g^h\|$ оператора X задаётся формулой

$$X_g^h = T(g)\delta_g^h.$$

Никакие деривации, соответствующие характерам на подкатегории $\mathcal{G}_{[e]}$, не являются внутренними деривациями.

Аналогичные рассуждения годятся и для других классов сопряжённости, состоящих из конечного числа элементов, т. е. когда $\#[g] < +\infty$. В частности, это справедливо для элементов из центра $g \in Z(G)$.

Точная последовательность

Если отказаться от ограничения на характеры локальной финитности, то можно установить точность последовательности, как сформулировано в следующей теореме.

Теорема 3. *Последовательность*

$$0 \to \ker p_a \to T(\mathcal{G}_{[a]}) \xrightarrow{p_a} T\big(\mathrm{Mor}(a,a)\big) \to 0, \quad a \in U,$$

точна.

Доказательство. Надо проверить только эпиморфность отображения $p(a)$.

Пусть $\chi \in \mathbf{X}(G^a)$. Фиксируем элемент $a \in U$ и фиксируем произвольные элементы $g_{a,b} \in \mathrm{Mor}(a,b)$ для всех $b \in U$, удовлетворяющие условию $g_{a,a} = e$. Такие элементы существуют, поскольку $\mathrm{Mor}(a,b)$ не пусто. Далее полагаем

$$g_{b,c} = g_{a,c} g_{a,b}^{-1} \in \mathrm{Mor}(b,c).$$

Заметим, что условие $g_{b,c} \in \mathrm{Mor}(b,c)$ означает, что

$$g_{b,c} b = c g_{b,c}.$$

Проверим это условие. Во-первых, по построению

$$g_{a,b} a = b g_{a,b}.$$

Далее,

$$g_{b,a} = g_{a,a} g_{a,b}^{-1} = g_{a,b}^{-1} \in \mathrm{Mor}(b,a),$$

т. е.

$$g_{b,c} = g_{a,c} g_{b,a}.$$

Значит,

$$g_{b,c} b = g_{a,c} g_{b,a} b = g_{a,c} a g_{b,a} = c g_{a,c} g_{b,a} = c g_{b,c},$$

т. е.

$$g_{b,c} \in \mathrm{Mor}(b,c).$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$g_{c,d} g_{b,c} = g_{b,d} \in \mathrm{Mor}(b,d).$$

В самом деле,

$$g_{c,d} g_{b,c} = g_{a,d} g_{c,a} g_{a,c} g_{b,a} = g_{a,d} g_{b,a} = g_{b,d} \in \mathrm{Mor}(b,d).$$

Теперь построим характер X на группоиде $\mathcal{G}_U$, $X\colon \mathrm{Mor}(U) \to \mathbf{R}$. Пусть $x_{b,c} \in \mathrm{Mor}(b,c)$ — произвольный морфизм. Тогда

$$g_{c,a} x_{b,c} g_{a,b} \in \mathrm{Mor}(a,a) = G^a.$$

Полагаем

$$X(x_{b,c}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \chi(g_{c,a} x_{b,c} g_{a,b}).$$

Легко проверить, что отображение $X\colon \operatorname{Mor}(U) \to \mathbf{R}$ аддитивно:

$$\begin{aligned} X(x_{c,d}x_{b,c}) = \chi(g_{d,a}(x_{c,d}x_{b,c})g_{a,b}) = \chi(g_{d,a}x_{c,d}g_{a,c}g_{c,a}x_{b,c}g_{a,b}) = \\ = \chi(g_{d,a}x_{c,d}g_{a,c})\chi(g_{c,a}x_{b,c}g_{a,b}) = X(x_{c,d})X(x_{b,c}). \end{aligned}$$

Ограничение характера X на $\operatorname{Mor}(a,a) = G^a$ совпадает с χ:

$$X(x_{a,a}) = \chi(g_{a,a}x_{a,a}g_{a,a}) = \chi(x_{a,a}). \qquad \square$$

Редукция к группам коцепей

Вернёмся к изучению характеров T, тривиальных на подпространстве $\operatorname{Mor}(a,a)$:

$$\mathbf{Int}_a\,\mathcal{A} \xrightarrow{\subset} \ker p_a^f \xrightarrow{\subset} T_f(\mathcal{G}_{[a]}) \xrightarrow{p_a^f} T\bigl(\operatorname{Mor}(a,a)\bigr)\ .$$

Обозначим через $\Delta(\mathcal{G}_{[a]})$ симплекс, вершинами которого являются элементы класса сопряжённости $[a] \subset G = \operatorname{Obj}(\mathcal{G}_{[a]})$.

Поскольку каждый характер $T \in \ker p_a^f$ принимает одно и то же значение на множестве всех морфизмов $\operatorname{Mor}(b,c)$, $b, c \in [a] \subset G$, то существует естественное вложение

$$\varphi\colon\ \ker p_a^f \hookrightarrow \mathbf{C}^1\bigl(\Delta(\mathcal{G}_{[a]})\bigr)$$

в группу коцепей симплекса $\Delta(\mathcal{G}_{[a]})$, причём каждый характер $T \in \ker p_a^f$ является коциклом:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}^0_f\bigl(\Delta(\mathcal{G}_{[a]})\bigr) \arrow[r, hook] & \mathbf{C}^0\bigl(\Delta(\mathcal{G}_{[a]})\bigr) \arrow[r, "\delta"] & \mathbf{C}^1\bigl(\Delta(\mathcal{G}_{[a]})\bigr) \arrow[r, "\delta"] & C^2\bigl(\Delta(\mathcal{G}_{[a]})\bigr) \\ \mathbf{Int}_a(\mathcal{A}) \arrow[u, hook, "\varphi_{i0}"] \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook, "T"'] & \ker p_a^f \arrow[u, hook, "\varphi_0"] \arrow[ur, hook, "\varphi"] \arrow[r] & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Вложение φ_{i0} является изоморфизмом. Образ

$$\delta\Bigl(\varphi_{i0}\bigl(\mathbf{Int}_a(\mathcal{A})\bigr)\Bigr) \subset \delta\Bigl(C^0_f\bigl(\Delta(\mathcal{G}_{[a]})\bigr)\Bigr) \subset \ker p_a^f \subset \mathbf{C}^1\bigl(\Delta(\mathcal{G}_{[a]})\bigr)$$

может быть описан как некоторое множество коциклов, удовлетворяющих определённым условиям. Рассмотрим класс сопряжённости $[a]$, на котором действует группа G при помощи присоединённого действия

$$G \times [a] \overset{\mathbf{ad}}{\to} [a], \quad \mathbf{ad}_g(b) = gbg^{-1}, \quad b \in [a].$$

Для произвольного элемента $g \in G$ рассмотрим граф $\Gamma_{g,a} \subset \Delta(\mathcal{G}_{[a]})$, составленный из ориентированных рёбер, началами которых являются элементы $b \in [a]$, а концы равны $gbg^{-1} \in [a]$. Таким образом, каждое ребро имеет вид направленного отрезка $[b, gbg^{-1}]$. Граф Γ_g разлагается в несвязное объединение направленных путей, составленных из направленных рёбер

$$\Gamma_{g,a} = \coprod_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{g,a}.$$

Каждый направленный путь $\Gamma^{\alpha}_{g,a}$ может быть бесконечным в обе стороны или конечным, и тогда является циклическим путём.

Теорема 4. *Пусть* $X \in \mathbf{Int}_{[a]}(\mathcal{A})$*. Тогда коцепь* $\varphi(T^X) \in \mathbf{C}^1\bigl(\Delta(\mathcal{G}_{[a]})\bigr)$ *удовлетворяет следующему условию:*

(FF) *коцепь* $\varphi(T^X)$ *является финитной на графе* $\Gamma_{g,a}$*, а сумма значений коцепи* $\varphi(T^X)$ *на каждом направленном пути* $\Gamma^{\alpha}_{g,a}$ *равна нулю.*

Обратно, если оператор $X \in \mathbf{Der}(\mathcal{A})$*,* $T^X \in \ker p^f_a \subset T_f(\mathcal{G}_{[a]})$*, удовлетворяет условию* (FF)*, то*

$$X \in \mathbf{Int}_{[a]}(\mathcal{A}).$$

Ядро $\ker p^f_a$ не совпадает с внутренними деривациями

Существуют примеры групп, для которых имеются локально финитные характеры $T \in \ker p^f_a$, которые не удовлетворяют условию (FF). Рассмотрим в качестве простейшего примера свободную группу с двумя образующими $G = F\langle x_1, x_2\rangle$. В качестве класса сопряжённых элементов возьмём класс $[x_1] \subset G$. Рассмотрим характер $T\colon \mathrm{Mor}(\mathcal{G}_{[x_1]}) \to R$, задавая значения характера на образующих группоида $\mathrm{Mor}(\mathcal{G}_{[x_1]})$ независимо друг от друга. Множество образующих группоида $\mathrm{Mor}(\mathcal{G}_{[x_1]})$ состоит из морфизмов вида

$$\xi = \left(\frac{\alpha \to \beta}{g}\right), \quad g = x_1, x_2, \quad \beta = g\alpha g^{-1}, \quad \alpha \in [x_1].$$

Полагаем

$$T\left(\frac{x_2 x_1 x_2^{-1} \to x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{1}}{x_1}\right) = 1,$$

на остальных образующих характер T равен нулю. Поскольку в свободной группе нет соотношений, кроме естественных сокращений в словах, то функцию T можно по аддитивности продолжить до некоторого характера на группоиде $\mathcal{G}_{[x_1]}$.

Следовательно, на одном из направленных путей вида $\Gamma^{\alpha}_{x_1,x_1}$ характер E имеет только одно значение, равное 1, а на всех остальных направленных путях этот характер тождественно равен 0. Это означает, что условие (T1) выполнено, но условие (FF) не выполняется.

5. Дополнение: группы с конечным числом образующих

Пусть группа G конечно представима, т. е. имеет конечное число образующих $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ и конечное число определяющих соотношений $\{S_1, S_2, \dots, S_l\}$:

$$G = F\langle g_1, g_2, \dots, g_k rangle/\{S_1, S_2, \dots, S_l\}.$$

Каждое соотношение S_i — это слово длины s_i, составленное из образующих элементов $g_1, g_2, \ldots, g_k$ или обратных к образующим элементов $g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_k^{-1}$, так что соотношение S_i представляется в виде

$$S_i = g_{j_{(i,1)}}^{\varepsilon(i,1)} g_{j_{(i,2)}}^{\varepsilon(i,2)} g_{j_{(i,3)}}^{\varepsilon(i,3)} \ldots g_{j_{(i,s_i)}}^{\varepsilon(i,s_i)} \equiv 1, \quad \varepsilon_{(i,j)} = \pm 1.$$

Каждое соотношение S_i индуцирует целую серию соотношений на группоиде $\mathcal{G}$:

$$\xi_{(i,1)}\xi_{(i,1)}\xi_{(i,3)} \ldots \xi_{(i,s_i)} \equiv \left(\frac{\alpha_{(i,1)} \to \alpha_{(i,1)}}{1}\right),$$

где морфизмы $\xi_{(i,j)}$ определяются по правилу

$$\xi_{(i,j)} = \left(\frac{\alpha_{(i,j)} \to \beta_{(i,j)}}{g_{j_{(i,j)}}^{\varepsilon_{(i,j)}}}\right),$$

$$\beta_{(i,j)} = g_{j_{(i,j)}}^{\varepsilon_{(i,j)}} \alpha_{(i,j)} g_{j_{(i,j)}}^{-\varepsilon_{(i,j)}},$$

$$\beta_{(i,j)} = \alpha_{(i,j+1)}, \quad \beta_{(i,s_i)} = \alpha_{(i,1)}.$$

Таким образом, чтобы задать локально финитный характер T на группоиде $\mathcal{G}$, достаточно определить значения локально финитного характера T на множестве образующих

$$\coprod_{i=1}^{k} \mathcal{H}_{g_i}$$

таким образом, чтобы на каждом соотношении

$$\xi_{(i,1)}\xi_{(i,1)}\xi_{(i,3)} \ldots \xi_{(i,s_i)} \equiv \left(\frac{\alpha_{(i,1)} \to \alpha_{(i,1)}}{1}\right)$$

выполнялось условие аддитивности

$$T(\xi_{(i,1)}) + T(\xi_{(i,1)}) + T(\xi_{(i,3)} + \ldots + T(\xi_{(i,s_i)}) = 0.$$

Первым автором работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ (соглашение № 02.a03.21.0008 от 24.06.2016), второй и третий авторы частично поддержаны грантом РФФИ № 14-01-00007.

Литература

[1] Ершов А. В. Категории и функторы. — Саратов: Наука, 2012.

[2] Connes A. Noncommutative Geometry. — London: Academic Press, 1994.

[3] Dales H. G. Automatic continuity: a survey // Bull. London Math. Soc. — 1978. — Vol. 10. — P. 129—183.

[4] Dales H. G. Banach Algebras and Automatic Continuity // Oxford: Clarendon press, 2000.

[5] Ghahramani F., Runde V., Willis G. Derivations on group algebras // Proc. London Math. Soc. — 2000. — Vol. 80. — P. 360—390.

[6] Johnson B. E. The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups // J. London Math. Soc. — 2001. — Vol. 63, No. 2. — P. 441—452.

[7] Losert V. The derivation problem for group algebras // Ann. Math. — 2008. — Vol. 168. — P. 221—246.