Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. Д. Кан, Уточнение правила сравнения континуантов, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 3, 72–75

DOI: 10.4213/dm341

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
21 марта 2025 г., 08:03:06

Дискретная математика

том 12 выпуск 3 * 2000

УДК 519.216

Уточнение правила сравнения континуантов

© 2000 г. И. Д. Кан

Доказывается теорема, позволяющая в ряде случаев сравнивать значения континуантов знаменателей конечных цепных дробей, не прибегая к их вычислению.

Для натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ через $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ обозначим цепную дробь

$$\alpha = 1/(a_1 + 1/(a_2 + \dots + 1/a_n)) \dots),$$

а через $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ — ее знаменатель, называемый континуантом чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Тогда числитель дроби α равен $\langle a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ (см. книгу А. Я. Хинчина [1]). Континуант может быть также определен индуктивно: если положить

$$x_0 = 1, \quad x_1 = a_1, x_{j+1} = a_{j+1}x_j + x_{j-1}, \quad 1 \leqslant j < n,$$

то

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = x_n.$$

Для пустой последовательности $\varnothing$ обычно полагают $[\varnothing] = 0$, $\langle \varnothing \rangle = 1$.

Начало изучения континуантов положил Эйлер [2]. Проблемы, связанные с континуантами, актуальны и в наше время: так, недавно вышедшая книга [3] (см. стр. 333–352) содержит ряд конкретных формул и приложений континуантов. Однако о сравнении континуантов известно немного.

Информация о том, в каких нетривиальных случаях можно непосредственно узнать, который из двух континуантов больше, не вычисляя их значений, содержится в лемме статьи [4]. Именно, если для натуральных b, c, e, f выполнено неравенство

$$(b - f)(c - e) > 0, \tag{1}$$

то

$$\langle \overrightarrow{a}, b, c, \overrightarrow{d}, e, f, \overrightarrow{g} \rangle \geqslant \langle \overrightarrow{a}, b, e, \overleftarrow{d}, c, f, \overrightarrow{g} \rangle, \tag{2}$$

где, здесь и далее, переменная без стрелки — натуральное число, переменная со стрелкой (вправо или влево) — последовательность натуральных чисел (возможно пустая), переменная со стрелкой влево по отношению к той же переменной со стрелкой вправо обозначает последовательность, записанную в обратном порядке. Так, если

$$\overrightarrow{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, d_k\},$$

то

$$\overleftarrow{d} = \{d_k, d_{k-1}, \dots, d_2, d_1\}$$

и наоборот.

В настоящей статье доказана следующая теорема, обобщающая правило (1), (2), вплоть до критерия выполнения равенства (2).

Теорема 1. *Неравенство*

$$\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{q} \rangle \geqslant \langle \overrightarrow{p}, \overleftarrow{m}, \overrightarrow{q} \rangle \tag{3}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$([\overleftarrow{p}] - [\overrightarrow{p}])([\overrightarrow{m}] - [\overleftarrow{m}]) \geqslant 0.$$

Кроме того, неравенства (3) *и* (4) *могут обращаться в равенства только одновременно.*

Доказательству теоремы предпошлем ряд замечаний. Прежде всего отметим, что, как известно [1], для сравнения цепных дробей вычислений не требуется. Так, результат сравнения цепных дробей $[y_1, y_2, \dots, y_n]$ и $[z_1, z_2, \dots, z_k]$ зависит, в общих чертах, от четности минимального индекса j такого, что $y_j \neq z_j$, и от знака разности $y_j - z_j$. Если, скажем, $y_1 > z_1$, то

$$[y_1, y_2, \dots, y_n] \leqslant [z_1, z_2, \dots, z_k].$$

Равенство здесь возможно, только если одновременно выполнен ряд условий: $y_1 = z_1 + 1$, $z_2 = 1$, $n = 1$, $r = 2$.

Следовательно, импликация неравенств (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из теоремы 1 при подстановках

$$\overrightarrow{p} = (\overrightarrow{a}, b), \quad \overrightarrow{m} = (c, \overrightarrow{d}, e), \quad \overrightarrow{q} = (f, \overrightarrow{g}). \tag{4}$$

С другой стороны, применение правила (1), (2) к задаче о вычислении минимума в множестве континуантов, составленных из четырех единиц и четырех двоек, дает два кандидата на решение: это континуанты

$$\langle 1,2,1,2,1,2,2,1 \rangle, \qquad \langle 1,2,1,2,2,1,2,1 \rangle,$$

не сравнимые в рамках метода. Между тем, положив $\overrightarrow{m} = \{2,1,2,2\}$ и применив теорему 1, получаем, что

$$\langle 1,2,1,\overrightarrow{m},1 \rangle > \langle 1,2,1,\overleftarrow{m},1 \rangle,$$

и минимум интересующего нас множества равен

$$\langle 1,2,1,2,2,1,2,1 \rangle.$$

В силу сказанного, теорема 1 сильнее правила (1), (2).

Более сложные примеры использования теоремы 1 основаны на следующем соображении. Если π — циклическая перестановка индексов $1, \dots, n$, $n \geqslant 3$, то неравенства

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \leqslant \langle a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)} \rangle$$

и

$$\langle a_2, a_3, \dots, a_{n-1} \rangle \geqslant \langle a_{\pi(2)}, a_{\pi(3)}, \dots, a_{\pi(n-1)} \rangle$$

могут быть выполнены или не выполнены только одновременно (в том числе как равенства). Это следует из того, что сумма левых частей двух последних неравенств представляет собой след матричного произведения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$$

(см. [3, стр. 351, упр. 87]), инвариантный относительно циклических перестановок матриц-сомножителей.

Пример 1. Для сравнения континуантов

$$\langle 1,2,2,1,1,2,1,2 \rangle, \qquad \langle 1,1,2,1,2,1,2,2 \rangle,$$

связанных некоторой циклической перестановкой, рассмотрим континуанты

$$\langle 2,2,1,1,2,1 \rangle, \qquad \langle 1,2,1,2,1,2 \rangle.$$

Полагая $\overrightarrow{m} = (2,1)$ и используя теорему 1, находим, что

$$\begin{aligned} \langle 2,2,1,1,2,1 \rangle &= \langle 2, \overrightarrow{m}, 1,2,1 \rangle > \langle 2, \overleftarrow{m}, 1,2,1 \rangle \\ &= \langle 1,2,1, \overrightarrow{m} = (2,1), 2 \rangle = \langle 1,2,1,2,1,2 \rangle, \end{aligned}$$

здесь в выкладке порядок записи элементов континуанта был заменен на противоположный. Отсюда, в силу сказанного выше о циклических перестановках в континуантах, следует, что

$$\langle 1,2,2,1,1,2,1,2 \rangle < \langle 1,1,2,1,2,1,2,2 \rangle.$$

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $\overrightarrow{m} \neq \overleftarrow{m}$, для которого последовательность $\overrightarrow{m}$ состоит не менее, чем из двух элементов. Если каждая из последовательностей $\overrightarrow{p}$ и $\overleftarrow{q}$ непуста, то, полагая, что $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$ имеют вид (5), и применяя к вычислению континуантов правило азбуки Морзе (см. [3, стр. 334]), находим, что

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{q} \rangle &= \langle \overrightarrow{p} \rangle \langle \overrightarrow{m} \rangle \langle \overrightarrow{q} \rangle + \langle \overrightarrow{a} \rangle \langle \overrightarrow{d} \rangle \langle \overrightarrow{g} \rangle + \langle \overrightarrow{a} \rangle \langle \overrightarrow{d}, e \rangle \langle \overrightarrow{q} \rangle + \langle \overrightarrow{p} \rangle \langle c, \overrightarrow{d} \rangle \langle \overrightarrow{g} \rangle, \\ \langle \overrightarrow{p}, \overleftarrow{m}, \overrightarrow{q} \rangle &= \langle \overrightarrow{p} \rangle \langle \overrightarrow{m} \rangle \langle \overrightarrow{q} \rangle + \langle \overrightarrow{a} \rangle \langle \overrightarrow{d} \rangle \langle \overrightarrow{g} \rangle + \langle \overrightarrow{a} \rangle \langle c, \overrightarrow{d} \rangle \langle \overrightarrow{q} \rangle + \langle \overrightarrow{p} \rangle \langle \overrightarrow{d}, e \rangle \langle \overrightarrow{g} \rangle, \end{aligned}$$

откуда

$$\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{q} \rangle - \langle \overrightarrow{p}, \overleftarrow{m}, \overrightarrow{q} \rangle = (\langle \overrightarrow{a} \rangle \langle \overrightarrow{q} \rangle - \langle \overrightarrow{p} \rangle \langle \overrightarrow{q} \rangle)(\langle \overrightarrow{d}, e \rangle - \langle c, \overrightarrow{d} \rangle)$$

(разложение этой разности на множители содержится в [4]). Проводя деление обеих частей последнего равенства на $\langle\overrightarrow{p}\rangle\langle\overrightarrow{m}\rangle\langle\overrightarrow{q}\rangle$ получаем, что

$$\frac{\langle\overrightarrow{p},\overrightarrow{m},\overrightarrow{q}\rangle-\langle\overrightarrow{p},\overleftarrow{m},\overrightarrow{q}\rangle}{\langle\overrightarrow{p}\rangle\langle\overrightarrow{m}\rangle\langle\overrightarrow{q}\rangle}=([\overleftarrow{p}]-[\overrightarrow{q}])([\overrightarrow{m}]-[\overleftarrow{m}]).$$

Аналогичный вывод этого равенства при $\overrightarrow{p}=\varnothing$ или $\overrightarrow{q}=\varnothing$ оставляем читателю.

Теорема доказана.

Теорема 1 является скорее инструментом, чем конечным результатом. Для формулировки следствия введем следующие обозначения. Пусть $\overrightarrow{r}=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, $V_n(\overrightarrow{r})$ — множество континуантов последовательностей, начинающихся с единицы и состоящих из r_j раз встречающихся чисел j, $j=1,\ldots,n$.

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$\max V_n(\overrightarrow{r})=\langle 1,\ldots,1,2,\ldots,2,\ldots,n,\ldots,n\rangle,$$

где число j встречается ровно r_j раз, $j=1,\ldots,n$.

Список литературы

1. Хинчин А. Я., *Цепные дроби.* Физматгиз, Москва, 1961.
2. Eulero L., Specimen algorithmi singularis. *Opera Omnia* (1762) **15**, 31–49.
3. Грехем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика. Основание информатики.* Мир, Москва, 1998.
4. Motzkin T. S., Straus E. G., Some combinatorial extremum problems. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1956) **7**, 1014–1021.

Статья поступила 09.0=6.1999.