ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 1 (2010)

Труды VII Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы

ГРАДУИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА ЧАСТНЫХ ПОЛУПЕРВИЧНЫХ ГРАДУИРОВАННЫХ КОЛЕЦ[1]

И. Н. Балаба, В. А. Ефремов (Тула)

Аннотация

В работе рассматриваются градуированные кольца частных полупервичных градуированных колец, изучаются свойства градуированного расширенного центроида.

В последние десятилетия отмечается значительный интерес к алгебраическим объектам, снабженным градуировкой, в частности, к первичным и полупервичным градуированным кольцам и супералгебрам. В связи с этим значительный интерес представляет изучение колец частных градуированных колец. При изучении колец частных градуированных колец естественно рассматривать кольца, наследующие градуировку исходного кольца и обладающие свойствами, характерными для колец частных.

Используя конструкцию Утуми, Джесперс и Ваутерс [10] определили градуированные аналоги максимального, мартиндейловских и симметрического колец частных; установили связь между этими кольцами и их неградуированными аналогами. Другой подход к определению максимального градуированного кольца частных можно найти в монографии Настасеску и Ойстайна [14], там же был определен градуированный аналог классического кольца частных.

Свойства максимального градуированного кольца частных изучались одним из авторов при условии полупервичности исходного кольца. В [4] рассматривалось максимальное суперкольцо частных и исследовались свойства его суперцентра для полупервичного суперкольца. Заметим, что в этой работе под расширенным центроидом понимался суперцентр максимального суперкольца частных, в отличие от работы [9], в которой данному понятию предавался обычный смысл.

Всюду далее: G – мультипликативная группа с единичным элементом e, все рассматриваемые кольца – ассоциативные G-градуированные с единицей 1.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 08-01-00790-а

Напомним некоторые определения.

Для градуированного кольца $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ через $h(A)$ обозначается множество однородных элементов $\bigcup_{g\in G} A_g$, а ненулевой элемент $a \in A_g$ называется *однородным элементом степени* g (пишут $\deg a = g$).

Идеал I кольца A называется *градуированным* (или *однородным*), если $I = \bigoplus_{g\in G}(I \cap A_g)$. Для любого (левого, правого или двустороннего) идеала I в A, всюду далее I_{gr} – наибольший градуированный идеал, содержащийся в I.

Градуированный идеал P градуированного кольца A называется *gr-первичным*, если для любых градуированных идеалов I, J кольца A из включения $IJ \subseteq P$ следует, что либо $I \subseteq P$, либо $J \subseteq P$. Ясно, что градуированный идеал P является gr-первичным тогда и только тогда, когда для любых однородных элементов $a, b \in A$ из включения $aAb \subseteq P$ следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$.

Градуированное кольцо A называется *gr-первичным*, если 0 является gr-первичным идеалом, и *gr-полупервичным*, если пересечение всех его *gr*-первичных идеалов равно нулю (см., например, [14]).

Нетрудно заметить, что всякое gr-первичное кольцо является gr-полупервичным, а всякое первичное (полупервично) градуированное кольцо является gr-первичным (соответственно, gr-полупервичным).

В то же время gr-полупервичное (даже gr-простое) кольцо может не быть полупервичным.

Действительно, в теории групповых колец известно, что:

1) первичность группового кольца AG равносильна первичности кольца A и отсутствию в G конечных нормальных делителей [2, теорема 21];

2) групповое кольцо AG полупервично тогда и только тогда, когда кольцо A полупервично и порядки нормальных подгрупп группы G не являются делителями нуля в A (см. [5, теорема 13.2]).

Таким образом, групповое кольцо kG, где k – поле характеристики $p \neq 0$ является градуированным телом, а следовательно, gr-простым кольцом, но при определенном выборе группы G не является полупервичным.

В то же время для некоторого класса групп данные понятия совпадают. В частности, если G упорядочиваемая группа, т.е. на ней можно определить линейный порядок $\leqslant$, устойчивый относительно умножения, то всякое gr-полупервичное кольцо является и полупервичным [1, предложение 4].

Градуированный правый идеал I кольца A называется *gr-плотным*, если для любых однородных элементов $a_1, a_2 \in h(A)$, $a_1 \neq 0$, найдется такой однородный элемент $a \in h(A)$, для которого $a_1 a \neq 0$ и $a_2 a \in I$.

Ясно, что если градуированный правый идеал I является плотным, то он является и gr-плотным. Верно и обратное, градуированный gr-плотным правый идеал градуированного кольца является плотным (см.[1, 10]).

Если S – подмножество, а I — правый градуированный идеал кольца A, то обозначим через $(I : S)_A = \{a \in A \mid Sa \subseteq I\}$. Под правым аннулятором $r_A(S)$ (или просто $r(S)$) множества S понимают множество $\{a \in A \mid Sa = 0\}$.

Аналогично определяется и левый аннулятор

$$l(S) = \{a \in A \mid aS = 0\}.$$

Заметим, что если S состоит из однородных элементов, т.е. $S \subseteq h(A)$, то аннуляторы $r(S)$ и $l(S)$ являются соответственно левым и правым градуированными идеалами кольца A, а правый идеал $(I : S)_A$ является градуированным.

В качестве определения градуированного плотного правого идеала можно рассматривать следующее свойство.

Предложение 1 ([10]). *Пусть J — градуированный правый идеал градуированного кольца A. Тогда J является плотным идеалом в том и только том случае, если $l_A(J : a) = 0$ для всех $a \in h(A)$.*

Обозначим через $\mathcal{D}_{gr}(A)$ — совокупность всех градуированных плотных правых идеалов кольца A. Легко показать, что $\mathcal{D}_{gr}(A)$ является градуированной топологией в кольце A, которая называется *градуированной топологией Ламбека* ([14, с.137]). Градуированное кольцо частных, соответствующее топологии $\mathcal{D}_{gr}(A)$, называется *максимальным* (*полным*) *градуированным правым кольцом частных* градуированного кольца A и обозначается $Q^{gr}(A)$.

Так как $t_{\mathcal{D}_{gr}(A)}(A) = 0$, то

$$Q^{gr}(A) = \varinjlim_{I \in \mathcal{D}_{gr}(A)} \mathrm{HOM}_A(I, A)$$

и кольцо A является градуированным подкольцом градуированного кольца $Q^{gr}(A)$.

Максимальное градуированное правое кольцо частных является градуированным аналогом максимального (полного) правого кольца частных кольца A

$$Q(A) = \varinjlim_{I \in \mathcal{D}(A)} \mathrm{Hom}_A(I, A),$$

(здесь $\mathcal{D}(A)$ — топология всех плотных правых идеалов кольца A), конструкцию которого, впервые введенную Утуми, можно найти в монографиях [3, 7].

Максимальное градуированное правое кольцо частных обладает свойствами, характерными для колец частных.

Предложение 2 ([10], предложение 1.4). *Максимальное градуированное правое кольцо частных $Q^{gr}(A)$ градуированного кольца A обладает следующими свойствами:*

1) A градуированное подкольцо кольца $Q^{gr}(A)$;

2) для каждого $q \in Q^{gr}(A)$ существует $I \in \mathcal{D}_{gr}(A)$ такой, что $qI \subseteq A$;

3) если $q \in Q^{gr}(A)$ и $qI = 0$ для некоторого $I \in \mathcal{D}_{gr}(A)$, то $q = 0$;

4) если $I \in \mathcal{D}_{gr}(A)$ и $f \in \mathrm{HOM}(I_A, A_A)$, то существует $q \in Q^{gr}(A)$ такой, что $f(x) = qx$ для всех $x \in I$.

Свойства 1) – 4) характеризуют градуированное кольцо $Q^{gr}(A)$ с точностью до изоморфизма.

Следствие 1 ([10], предложение 1.6). *Пусть A – градуированное кольцо. Тогда*

$$Q^{gr}(A) = \bigoplus_{\sigma\in G} Q^{gr}(A)_\sigma = \bigoplus_{\sigma\in G}\{x \in Q(A) \mid \text{ существует } I \in \mathcal{D}_{gr}(A) \text{ такой, что } xI_t \subseteq A_{\sigma t} \text{ для всех } t \in G\}.$$

Предложение 3 ([10], предложение 1.9). *Пусть A и B – градуированные кольца, причем $A \subseteq B \subseteq Q^{gr}(A)$. Тогда $Q^{gr}(A) = Q^{gr}(B)$.*

Следствие 2. *Если A – градуированное кольцо, то*

$$Q^{gr}(Q^{gr}(A)) = Q^{gr}(A).$$

Градуированный правый идеал J градуированного кольца A называется *gr-существенным*, если $J \cap K \neq 0$ для любого ненулевого градуированного правого идеала K кольца A. Из [14, лемма I.2.8] следует, что градуированный правый идеал является gr-существенным в том и только том случае, когда он является существенным правым идеалом.

Хорошо известно, что каждый плотный правый идеал кольца является существенным правым идеалом (см., например, [7, замечание 2.1.3]).

Лемма 1. *Пусть A – gr-полупервичное кольцо и I – градуированный идеал кольца A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $l(I) = 0$;

2) I – плотный правый идеал;

3) I – существенный правый идеал.

Доказательство. Равносильность условий 1) и 2) следует из [3, с. 155, следствие].

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) хорошо известна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть I – существенный правый идеал кольца A и $aI = 0$ для некоторого ненулевого $a \in h(A)$. Так как $I \cap aA \neq 0$, то существует однородный элемент $b \in h(A)$, такой что $0 \neq ab \in I$. Тогда $abAab \subseteq aI = 0$, что противоречит gr-полупервичности кольца A. □

Лемма 2. *Пусть I – градуированный идеал gr-полупервичного кольца A. Тогда:*

1) $l(I) = r(I)$;

2) $l(I) \cap I = 0$;

3) $I + l(I)$ – плотный правый идеал.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $a \in l(I)$ – ненулевой однородный элемент, не принадлежащий $r(I)$, тогда существует $b \in h(I)$, для которого $ba \neq 0$. Но поскольку $baAba \subseteq baI = 0$, получим противоречие с gr-полупервичностью кольца A. Следовательно, $l(I) \subseteq r(I)$. Обратное включение доказывается аналогично.

Докажем утверждение 2). Пусть $l(I) \cap I \neq 0$, и a – ненулевой однородный элемент, принадлежащий $l(I) \cap I$. Тогда $aAa \subseteq aI = 0$, что противоречит gr-полупервичности кольца A.

Для доказательства утверждения 3) заметим, что в нашем случае

$$l(I + l(I)) = l(I) \cap l(l(I)) = 0.$$

Откуда в силу леммы 1 получим, что $I + l(I)$ – плотный правый идеал. □

Таким образом, из лемм 1–2 следует, что градуированный идеал gr-полупервичного кольца является плотным правым идеалом в том и только том случае, если он является плотным левым идеалом.

Предложение 4. *Пусть D – градуированный плотный правый идеал gr-полупервичного кольца A и B – такое градуированное подкольцо, что $D \subseteq B \subseteq Q^{gr}(A)$. Тогда B – gr-полупервичное кольцо.*

Доказательство. Пусть I – ненулевой градуированный нильпотентный идеал кольца B, и $0 \neq q \in I$. Из предложения 2 следует, что $qJ \subseteq A$ для некоторого идеала $J \in \mathcal{D}_{gr}(A)$. Тогда $0 \neq q(K \cap J) \subseteq I \cap A$ является ненулевым градуированным нильпотентным правым идеалом кольца A, получили противоречие. □

Лемма 3. *Пусть A – gr-полупервичное кольца и B – градуированное кольцо, такое что $A \subseteq B \subseteq Q^{gr}(A)$. Тогда:*

1) правый градуированный идеал J кольца B является плотным тогда и только тогда, когда $J \cap A$ – градуированный плотный идеал кольца A;

2) правый градуированный идеал J кольца S является существенным тогда и только тогда когда $J \cap A$ – существенный правый градуированный идеал кольца A.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $J \in \mathcal{D}_{gr}(B)$ и $a_1 \neq 0, a_2 \in h(A)$. Тогда существует $b \in h(B)$, такой, что $a_1 b \neq 0$ и $a_2 b \in J$. Из предложения 2 следует, что существует $I \in \mathcal{D}_{gr}(A)$ такой, что $qI \subseteq A$, откуда получим, что $I \subseteq (A : b)_A \in \mathcal{D}_{gr}(A)$, следовательно, $a_1 b a' \neq 0$ для некоторого $a' \in (A : b)_A$. Так как $a_2 b a' \in J \cap A$, то $J \cap A \in \mathcal{D}_{gr}(A)$.

Обратно, пусть $J \cap A \in \mathcal{D}_{gr}(A)$ для некоторого градуированного правого идеала J кольца B, и пусть $b_1 \neq 0, b_2 \in h(B)$. Так как $(A : b_1)_A \cap (A : b_2)_A \in \mathcal{D}_{gr}(A)$, то $b_1 a' \neq 0$ для некоторого $a' \in h((A : b_1)_A \cap (A : b_2)_A)$. Поскольку $b_1 a', b_2 a' \in A$, и $J \cap A \in \mathcal{D}_{gr}(A)$, то $(J \cap A : b_2 a') \in \mathcal{D}_{gr}(A)$, и, следовательно, $b_1 a' a'' \neq 0$ для некоторого $a'' \in h(J \cap A : b_2 a')$. Таким образом, $b_1 a' a'' \in J \cap A \subseteq J$, и $J \in \mathcal{D}_{gr}(B)$.

Докажем утверждение 2). Пусть J – существенный правый градуированный идеал кольца B, и $I = J \cap A$. Пусть K – ненулевой градуированный правый идеал кольца A. Из gr-полупервичности кольца B следует, что $KB \neq 0$

– градуированный правый идеал B, и, следовательно, $J \cap KB \neq 0$. Пусть $0 \neq q = \sum_{i=1}^{n} k_i q_i \in J \cap KB$, где $k_i \in h(K), q_i \in h(B)$. Из предложения 2 следует, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует $I_i \in \mathcal{D}_{gr}(A)$ такой, что $q_i I_i \subseteq A$. Тогда для $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i \in \mathcal{D}_{gr}(A)$ имеем $0 \neq qI \subseteq M \cap (J \cap A)$, следовательно, $J \cap A$ – существенный правый градуированный идеал кольца A.

Обратно, пусть $J \cap A$ – существенный правый градуированный идеал кольца A, и $P \neq 0$ – правый градуированный идеал кольца B. Для $0 \neq p \in P$ существует $I \in \mathcal{D}_{gr}(A)$ такой, что $pI \subseteq A$. Таким образом, $P \cap A \neq 0$, и $0 \neq (P \cap A) \cap (J \cap A) \subseteq (J \cap P)$, что и требовалось доказать. □

Правым градуированным сингулярным идеалом $\mathrm{sing}_{gr}(A)$ градуированного кольца A назовем наибольший градуированный идеал, содержащийся в сингулярном идеале $\mathrm{sing}(A)$ кольца A, т.е. $\mathrm{sing}_{gr}(A) = \mathrm{sing}(A)_{gr}$.

Из определения следует, что если $a \in h(A) \cap \mathrm{sing}_{gr}(A)$ то множество $r_A(a)$ – градуированный существенный правый идеал кольца A. Более того, $a \in \mathrm{sing}_{gr}(A)$ тогда и только тогда когда $aI = 0$ для некоторого существенного градуированного правого идеала I кольца A

Заметим, что если G является упорядочиваемой группой, то правый сингулярный идеал $\mathrm{sing}(A)$ G-градуированного кольца A является градуированным [14, лемма II.9.14], и, следовательно, в этом случае $\mathrm{sing}_{gr}(A) = \mathrm{sing}(A)$.

Лемма 4. *Пусть A – градуированное кольцо и $\mathrm{sing}_{gr}(A) = 0$. Тогда каждый существенный градуированный правый идеал кольца A является плотным.*

Доказательство. Пусть J – существенный правый градуированный идеал кольца A. Тогда для любого $a \in h(A)$ градуированный правый идеал $(J : a)_A$ является существенным. Действительно, пусть $L \neq 0$ – правый градуированный идеал кольца A. Если $aL = 0$, то $L \subseteq (J : a)_A$ и поэтому $0 \neq L = L \cap (J : a)$. Предположим теперь, что $aL \neq 0$. Так как aL-правый градуированный идеал кольца A, а J - существенный, то $aL \cap J \neq 0$. Но $aL \cap J = a[L \cap (J : a)]$. Следовательно $L \cap (J : a) \neq 0$ и поэтому $(J : a)$ является существенным идеалом.

Следовательно, $l_A(a : J) = 0$ для всех $a \in A$ и J - плотный идеал (предложение 1). □

Лемма 5. *Пусть A – gr-полупервичное кольца, и B – градуированное кольцо, такое что $A \subseteq B \subseteq Q^{gr}(A)$. Тогда:*

$$\mathrm{sing}_{gr}(A) = A \cap \mathrm{sing}_{gr}(B).$$

Доказательство. Заметим, что $r_A(x) = r_B(x) \cap A$ для всех $x \in h(A)$. В силу леммы 3 градуированный идеал $r_A(x)$ является существенным правым идеалом кольца A тогда и только тогда когда $r_B(x)$ является существенным правым идеалом кольца B. Следовательно, $\mathrm{sing}_{gr}(A) = A \cap \mathrm{sing}_{gr}(B)$. □

Напомним, что градуированное кольцо A называется *gr-регулярным*, если для каждого однородного элемента $a \in h(A)$ найдется элемент $x \in A$, такой,

что $axa = a$. Очевидно, что если $a \in A_g$, то мы можем заменить x его однородной компонентой x_τ степени $\tau = g^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть A — gr-полупервичное градуированное кольцо и $Q = Q^{gr}(A)$ — максимальное градуированное правое кольцо частных кольца A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $Q^{gr}(A)$ — gr-регулярное кольцо;

2) $\mathrm{sing}_{gr}(A) = 0$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $Q = Q^{gr}(A)$ — gr-регулярное кольцо и $0 \neq q \in h(Q)$. Тогда $qxq = q$ для некоторого $x \in h(Q)$. Ясно, что $(xq)^2 = xq \in Q_e$ и $r_Q(xq) = r_Q(x)$, и, следовательно, $r_Q(xq) = (1-xq)Q$. Следовательно, $(1-xq)Q \bigcap xqQ = 0$, и градуированный правый идеал $(1-xq)Q$ не являться существенным. Таким образом, $\mathrm{sing}_{gr}(Q) = 0$, откуда в силу леммы 5 получим, что $\mathrm{sing}_{gr}(A) = \mathrm{sing}_{gr}(Q) \cap A = 0$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3) Пусть $\mathrm{sing}_{gr}(A) = 0$. Тогда из леммы 4 следует, что множество всех плотных градуированных правых идеалов $\mathcal{D}_{gr}(A)$ кольца A совпадает с множеством всех его существенных градуированных правых идеалов. Пусть $q \in Q_g$, тогда в силу предложения 2 существует идеал $I \in \mathcal{D}_{gr}(A)$ такой, что $qI \subseteq A$, и пусть $L = kerl_q$, где $l_q : I \to A$ — левое умножение на элемент q. Среди градуированных правых идеалов кольца A выберем максимальный идеал K, обладающий свойствами: $K \cap L = 0$ и $K \subseteq I$. Легко проверить, что градуированный правый идеал $K \oplus L$ является существенным, а, значит, и плотным.

Выберем далее градуированный правый идеал M кольца A, максимальный относительно свойства $M \cap qK = 0$, тогда $M \oplus qK$ – существенный правый идеал и, следовательно, $M \oplus qK \in \mathcal{D}_{gr}(A)$. Ясно, что отображение $f : M \oplus qK \to A$, где $f(m+qk) = k$ для всех $m \in M,\ k \in K$ определяет однородный гомоморфизм правых градуированных A-модулей степени g^{-1}. Таким образом, f определяет некоторый элемент $p \in Q_{g^{-1}}$, такой, что $pa = f(a)$ для всех $a \in M \oplus qK$. Ясно, что при этом $qpq(k + l) = q(k + l)$ для всех $k \in K, l \in L$, и, следовательно, $qpq = q$, и Q является gr-регулярным кольцом. □

Мартиндейл [13] впервые использовал для построения колец частных первичных колец двусторонние идеалы, поэтому эти кольца называют также *мартиндейловскими кольцами частных*. Амицур [6] продолжил эту конструкцию на случай полупервичных колец, а Пассман [15] на случай произвольных колец.

Используя идею Пассмана, Джесперс и Ваутерс в [10] определили правое градуированное мартиндейловское и градуированное симметрическое кольца частных. Для построения правого градуированного мартиндейловского кольца частных $Q_r^{gr}(A)$ они вместо множества градуированных плотных правых идеалов $\mathcal{D}_{gr}(A)$ использовали, множество всех двусторонних идеалов, являющихся плотными правыми идеалами. В работе были установлены свойства этих колец и их взаимосвязь друг с другом.

Если A – gr-полупервичное кольцо, то обозначим через $\mathcal{I}_{gr}(A)$ – множество всех градуированных идеалов I кольца A таких, что $l_A(I) = 0$. В силу лемм 1–2 каждый градуированный идеал $I \in \mathcal{I}_{gr}(A)$ является плотным и существенным как правый (и как левый) идеал. В этом случае

$$Q_r^{gr}(A) = \{q \in Q^{gr}(A) \mid qL \subseteq A \text{ для некоторого } L \in \mathcal{I}_{gr}(A)\}.$$

Положив

$$Q_s^{gr}(A) = \{q \in Q^{gr}(A) \mid qL \cup qL \subseteq A \text{ для некоторого } L \in \mathcal{I}_{gr}(A)\},$$

получим *симметричное градуированное кольцо частных* кольца A, его можно охарактеризовать с помощью четырех свойств, подобных тем, которые характеризуют максимальное градуированное кольцо частных.

Предложение 5 ([10], предложение 1.5). *Симметричное градуированное кольцо частных $Q_s^{gr}(A)$ gr-полупервичного кольца A обладает следующими свойствами:*

1) A градуированное подкольцо кольца $Q_s^{gr}(A)$;

2) для каждого $q \in Q_s^{gr}(A)$ существует $I \in \mathcal{I}_{gr}(A)$ такой, что $qI \subseteq A$;

3) если $q \in Q_s^{gr}(A)$ и $qI = 0$ (или $Iq = 0$) для некоторого $I \in \mathcal{I}_{gr}(A)$, то $q = 0$;

4) если $I \in \mathcal{I}_{gr}(A)$, $f \in \mathrm{HOM}(I_A, A_A)$ и $g \in \mathrm{HOM}({}_AI, {}_AA)$ такие, что $xf(y) = g(x)y$ для всех $x, y \in I$, то существует $q \in Q_s^{gr}(A)$ такой, что $f(x) = qx$, $xq = g(x)$ для всех $x \in I$.

Свойства 1) – 4) характеризуют градуированное кольцо $Q_s^{gr}(A)$ с точностью до изоморфизма.

Напомним, что *расширенным центроидом* $C(A)$ полупервичного кольца A называется центр мартиндейловского правого кольца частных. А поскольку центр градуированного кольца может не быть градуированным, то *градуированным расширенным центроидом* $C^{gr}(A)$ назовем максимальное градуированное подкольцо центра градуированного мартиндейловского правого кольца частных $Q_r^{gr}(A)$. Свойства градуированных расширенных центроидов первичных колец, градуированных абелевой группой изучались в работах [8, 11], и первичных супералгебр в [9].

Теорема 2. *Пусть A - gr-полупервичное кольцо. Тогда*

$$C^{gr}(A) \cap h(A) = h(Z(Q_s^{gr}(A))) = h(Z(Q^{gr}(A))) =$$
$$= \{q \in Q^{gr}(A) \ \mid \ qr = rq \ \text{ для всех } \ a \in h(A)\}$$

Доказательство. Пусть $c \in h(Z((Q^{gr}(A)),\ x \in (A : c)_A,\ a \in h(A)A$. Тогда $c(ax) = a(cx) \in A$ и $ax \in (A : c)_A$ и следовательно $J = (A : c)_A$ – градуированный плотный идеал кольца A. Так как $Jc = cJ \subseteq A$, то $c \in Q_s^{gr}(A)$ и, следовательно, $h(Z(Q^{gr}(A))) \subseteq h(Z(Q_s^{gr}(A)))$.

Так как следует, что $Q^{gr}(Q_s^{gr}(A)) = Q^{gr}(A)$, то $Z(Q_s^{gr}(A)) \subseteq Z(Q^{gr}(A))$, и, следовательно, $h(Z(Q_s^{gr}(A))) = h(Z(Q^{gr}(A)))$. Аналогичным образом получим, что $h(Z(Q_r^{gr}(A))) = h(Z(Q^{gr}(A)))$.

Пусть $q \in h(Q^{gr}(A))$ и $qr = rq$ для всех $a \in h(A)$. Тогда $(qx - xq)a = q(xa) - xqa = xaq - xaq = 0$ для всех $x \in h(Q^{gr}(A))$ и $a \in (A : x)_A$. Таким образом, $q \in C$. □

Следствие 3. *Градуированный расширенный центроид gr-полупервичного кольца является градуированным подкольцом расширенного центроида.*

Теорема 3. *Пусть A — gr-полупервичное G-градуированное кольцо, $Q = Q^{gr}(A)$ — градуированное максимальное правое кольцо частных кольца A и $C = C^{gr}(A)$ градуированный расширенный центроид кольца A. Тогда C является gr-регулярным и gr-самоинъективным кольцом.*

Доказательство. Пусть $c \in C$ — однородный элемент степени s, тогда $I = cQ^g$ и $J = c^2Q^g$ — градуированные идеалы кольца Q. Поскольку в силу предложения 4 кольцо Q является gr-полупервичным, а c — ценральный элемент,то $K = r_Q(I) = r_Q(J)$ и градуированные идеалы $I \oplus K$ и $J \oplus K$ являются плотными, а, следовательно, плотным будет и идеал $P = (I \oplus K) \cap (J \oplus K) = (I \cap J) \oplus K$.

Ясно, что отображение $f : P \to Q$, заданное правилом $f(c^2 + k) = cq$ определяет центральный однородный элемент кольца $Q(Q)$ степени s^{-1}. Так как $Q(Q) = Q(R)$, то $p \in C$. Ясно, что $cpc(cq + k) = c^2q = c(cq + k)$ для любого $q \in Q,\ k \in K$, откуда $cpc = c$, и, следовательно $C(Q)$ — gr-регулярное кольцо.

Пусть K — градуированный идеал кольца C и $\varphi : K \to C$ — градуированный морфизм. Для доказательства gr-самоинъективности кольца C достаточно показать, что существует такой однородный элемент $c \in C$, для которого $\varphi(x) = cx$ для всех $x \in K$.

В силу gr-регулярности кольца C все градуированные левые C - модули являются gr-плоскими, т.е. плоскими [14, замечание I.5.4, с.259]. Тогда из [3, предложение 1] следует, что имеет место канонический изоморфизм $f : Q \otimes_C K \to QK$ задаваемый правилом $f(\sum_{i=1}^n q_i \otimes k_i) = \sum_{i=1}^n q_i k_i$ $(q_i \in Q,\ k_i \in K)$.

Следовательно, найдется градуированный морфизм, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes_C K & \xrightarrow{1\otimes\varphi} & Q \otimes_C C \\ \downarrow f & & \downarrow h \\ QK & \xrightarrow{\psi} & Q \end{array}$$

Ясно, что $I = QK$ — градуированный идеал кольца Q и $\psi(aq) = \psi(a)q$, $\psi(qa) = q\psi(a)$ для всех $q \in Q,\ a \in I$ Положим $J = r_Q I$, тогда $I \oplus J$ — градуированный плотный правый идеал кольца Q. Следовательно, отображение $\phi : I \oplus J \to Q$, где $\phi(a + b) = \psi(a)$ $(a \in I,\ b \in J)$ определяет центральный однородный элемент $c \in Q(Q)) = Q$. Заметим, что $ck = \phi(k) = \psi(k) = h[(1 \otimes \varphi)(1 \otimes k)] = \varphi(k)$ для всех $k \in K$, что и требовалось доказать. □

Хорошо известно, что расширенный центроид первичного кольца является полем, а в [11] было показано, что каждый однородный элемент градуированного расширенного центроида первичного кольца, градуированная абелевой группой, обратим, и, следовательно, является градуированным полем. Аналогичным образом доказывается и следующее

Предложение 6. *Градуированный расширенный центроид gr-первичного кольца является градуированным полем.*

Теорема 4. *Пусть A – gr-полупервичное кольцо, $Q = Q^{gr}(A)$, $C = C^{gr}(A)$, ${}_AU_A$ – градуированный подбимодуль A-A-бимодуля Q и $f :_A U_A \longrightarrow_A Q_A$ – сохраняющий градуировку гомоморфизм бимодулей. Тогда существует элемент $\lambda \in C_e$, такой что $f(u) = \lambda u$ для всех $u \in U$.*

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $W = U \cap A$ является ненулевым градуированным идеалом кольца A. Положим $I(w) = (A : f(w))_A$ и $V = \sum_{w\in W} wI(w)$. Так как $f(aw) = af(w)$ для всех $a \in A$ и $w \in W$, то $f(aw)I(w) \subseteq A$ и $I(w) \subseteq I(rw)$, и значит V – градуированный левый идеал кольца A. С другой стороны V является суммой градуированных правых идеалов, следовательно, V является градуированным идеалом кольца A. Заметим, что $f(V) = \sum f(w)(A : f(w)) \subseteq A$. Определим отображение $g : V \bigoplus r_A(V) \longrightarrow A$, полагая $g(v+v') = f(v)+v'$ для всех $v \in V$, $v' \in r_A(V)$. Легко проверить, что g является сохраняющим градуировку гомоморфизмом $A-A$-бимодулей. Так как $V \bigoplus r_A(V) \in \mathcal{D}_{gr}(A)$, то существует элемент $\lambda \in C$ такой что $g(x) = \lambda x$ для всех $x \in V \bigoplus r_A(V)$. Тогда $\lambda rx = g(rx) = rg(x) = r\lambda x$ для всех $x \in V \bigoplus r_A(V)$, $r \in A$. Следовательно, $r\lambda = \lambda r$ для всех $r \in A$ и в силу теоремы 2 получим $\lambda \in C$. Далее, пусть $u \in h(U)$, $D = (A : u)_A$ и $d \in D$. Тогда $udr \in V$ для всех $r \in (A : f(ud)_A$ и $f(u)dr = f(udr) = g(udr) = \lambda udr$, $(f(u) - \lambda u)dr = 0$. Следовательно $f((u) - \lambda u)d = 0$ для всех $d \in D$ и поэтому $f(u) = \lambda u$ для всех $u \in U$. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Балаба И.Н. Кольца частных полупервичных градуированных колец // Труды международного семинара "Универсальная алгебра и ее приложения". – Волгоград, 2000, с. 21-28.

[2] Бовди А.А. Групповые кольца. – Ужгород: Изд-во Ужгород. ун-та, 1974

[3] Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971.

[4] Лимаренко С.В. Слабо примитивные суперкольца // Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. - Москва, 2005

[5] Залесский А.Е., Михалев А.В. Групповые кольца //Итоги науки и техники.Современные проблемы математики. – Т. 2. – М: ВИНИТИ. - 1973. С. 5-118.

[6] Amitsur S.A. On rings of quotients // Symposia Mathematica. 1972. V. 8. P. 149–164

[7] Beidar K.I., Martindale W.S., Mikhalev A.V. Rings with generalized identities. – New York: Marcel Dekker, Inc, 1996.

[8] Cohen M., Rowen L.H. Group-graded rings. // Comm. Alg. 1983. V. 11. №1. P. 1253-1270.

[9] Fošner M. In the extended centroid of prime superalgebras with applications to superderivations // Comm. Alg. 2004. V. 32. N 2. P. 689-705.

[10] Jespers E., Wauters P. A general notion of noncommutative Krull rings.// J. of Algebra, 1988. V. 112. P. 388-398.

[11] Jespers E. Commputing the extended centroid of Abelian-group graded-rings// Comm. Alg. 1992. V. 20 , N 12. P. 3603-3608.

[12] Jespers E. Jacobson rings and rings strongly graded by an abelian group// Israel J.Nath. 1988. V. 63 . P. 67– 78.

[13] Martinda1e W. S. Prime rings satisfying a generalized polynomial identity// J. Alg. 1969. V. 12. P. 576-584

[14] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded ring theory. – Amsterdam e. a.: North-Holland, 1982.

[15] Passman D.S. Commputing the symmetric rings of quotients // J. Alg. 1987. V. 105. P. 207–235.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 8.06.2010