



P. V. Antonenko, P. A. Valinevich, Boltzmann weights and fusion procedure for the rational seven-vertex SOS model, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2023, Volume 520, 17–49

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

January 14, 2025, 08:32:04



П. В. Антоненко, П. А. Валиневич

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЕСА И ПРОЦЕДУРА СЛИЯНИЯ ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ СЕМИВЕРШИННОЙ SOS МОДЕЛИ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Среди известных интегрируемых моделей, решаемых с помощью квантового метода обратной задачи рассеяния, существует большой класс статистических моделей, определенных на двумерной решетке [1]. В данной работе мы будем иметь дело с двумя классами таких моделей: вершинными моделями [9, 11, 15], и моделями типа SOS (solid-on-solid) [1, 3, 20]. Для первого класса моделей состояние решетки определяется состоянием ее ребер, а статистический вес приписывается узлу решетки (вершине); для второго – параметры состояния лежат в вершинах решетки, а статистические веса приписываются ячейкам, ограниченными ребрами. Для обоих этих классов условие интегрируемости имеет вид нелинейного уравнения на статистические веса – уравнения Янга–Бакстера (зависящего, кроме этого, и от накладываемых граничных условий [14]).

На заре квантового метода обратной задачи рассеяния Р. Бакстером [19] был предложен метод, позволяющий для некоторых интегрируемых вершинных моделей построить соответствующие им интегрируемые SOS модели. Этот метод, изначально сформулированный для восьмивершинной модели, впоследствии был обобщен в работах [2, 3, 10, 13]. Ключевую роль в нем играют сплетающие векторы. Статистические веса получаемых данным методом SOS моделей являются матричными элементами  $R$ -оператора в базисе сплетающих векторов.

---

*Ключевые слова:* статистические модели на двумерной решетке, уравнение Янга–Бакстера, вершинно-граневое соответствие, процедура слияния.

Исследование П. В. Антоненко выполнено в С.-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение №. 075-15-2022-289).

В настоящей работе мы применим метод сплетающих векторов к рациональной семивершинной модели, которая получается в специальном пределе из восьмивершинной модели [12]. Ключевым элементом конструкции является представление  $R$ -матрицы (матрицы статистических весов) как оператора, действующего на пространстве однородных полиномов. Для рассматриваемой модели оно было получено в [4]. Подобный подход был использован в [5] для шестивершинной модели, а в нашем случае позволил существенно упростить вычисления.

Результатом работы является выражение для статистического веса  $W^{(n,m)}$  модели SOS при произвольных  $n, m$  – количествах состояний ребер решетки. Оно представляется в виде гипергеометрического ряда  ${}_9F_8$ . Представления такого типа получались и ранее для других моделей, см., например, [3].

Структура работы следующая. В главе 2 даются определения вершинных и SOS моделей, определяются сплетающие векторы, необходимые для построения соответствия между ними. В главе 3 даются необходимые сведения о процедуре слияния для вершинных моделей и SOS моделей. Она необходима для построения наиболее общих моделей с произвольным числом состояний на гранях или в вершинах. В главе 4 определяется рациональная семивершинная модель, для нее находятся сплетающие векторы и соответствующая SOS модель, обсуждается связь с SOS моделью из [8]. В главе 5 выводится представление  $R$ -оператора в виде дифференциального оператора на пространстве полиномов [5], позволяющее найти статистические веса  $W^{(n,m)}$  в случае произвольных  $n, m \in \mathbb{N}$ . Показано, как в этом представлении работает процедура слияния. В главе 6 при помощи представления  $R$ -оператора и сплетающих векторов на пространстве полиномов найдено выражение для статистических весов  $W^{(n,m)}$  через обрывающийся гипергеометрический ряд  ${}_9F_8$ . В главе 7 из рассматриваемого семейства вершинных моделей мы строим новое семейство, простейший представитель которого – 11-вершинная модель [6, 7, 18], а также получаем для этих моделей vertex-SOS преобразование.

## §2. ВЕРШИННЫЕ И SOS МОДЕЛИ

**2.1. Вершинные модели.** Мы рассматриваем вершинные модели, определенные на двумерной квадратной решетке, см. рис. 1, номера

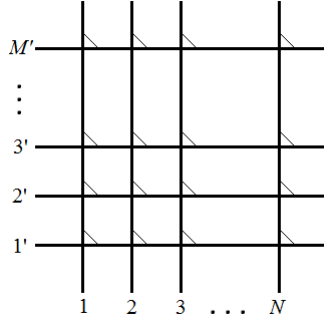


Рис. 1. Решетка  
вершинной моде-  
ли.

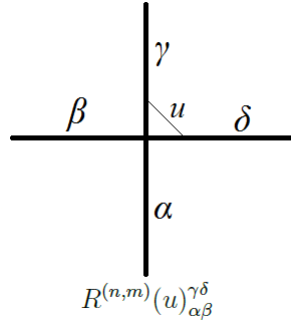


Рис. 2. Статисти-  
ческий вес вер-  
шины решетки.

горизонтальных рядов обозначаем штрихом. Ее ребрам приписываются параметры состояния. Состоянием решетки называется набор параметров состояния на всех ребрах. В рассматриваемых нами моделях параметры состояния на горизонтальных линиях принимают значения из множества  $\{-m + 2j, j = 0, 1, \dots, m\}$  ( $m + 1$  элементов), на вертикальных – из множества  $\{-n + 2j, j = 0, 1, \dots, n\}$  ( $n + 1$  элементов). Вершине с параметрами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  на прилежащих ребрах (рис. 2) соответствует больцмановский статистический вес  $R^{(n,m)}(u)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ , являющийся функцией спектрального параметра  $u$ . Величина  $u$  отражает зависимость энергий вершин и статистических весов от внешних параметров [1]. Энергия решетки равна сумме энергий всех вершин, значит статистический вес состояния равен произведению статистических весов всех вершин в данном состоянии. Статистическая сумма решетки  $Z_{NM}^{(n,m)}(u)$  равна сумме больцмановских весов всех состояний системы. Будем понимать  $R^{(n,m)}(u)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  как матричный элемент оператора  $R^{(n,m)}(u)$ , действующего в  $V^n \otimes V^m$  и называемого  $R$ -оператором [1, 9, 11]:

$$R^{(n,m)}(u) e^\gamma \otimes h^\delta = \sum_{\alpha,\beta} R^{(n,m)}(u)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} e^\alpha \otimes h^\beta,$$

где  $V^n \cong \mathbb{C}^{n+1}$  и  $V^m \cong \mathbb{C}^{m+1}$  – векторные пространства над  $\mathbb{C}$ ,  $\{e^{\alpha'}, \alpha' = -n, -n + 2, \dots, n\}$  – базис в  $V^n$ ,  $\{h^{\beta'}, \beta' = -m, -m + 2, \dots, m\}$  – базис в  $V^m$ .

Каждой  $i$ -ой вертикальной линии на рис. 1 поставим в соответствие векторное пространство  $V_i^n \cong \mathbb{C}^{n+1}$  над  $\mathbb{C}$ , а каждой  $j$ -ой горизонтальной линии – векторное пространство  $V_{j'}^m \cong \mathbb{C}^{m+1}$  [11]. Пересечению  $j$ -ой горизонтальной линии с  $i$ -ой вертикальной поставим в соответствие тензорное произведение пространств  $V_i^n \otimes V_{j'}^m$  и  $R$ -оператор  $R_{ij'}^{(n,m)}(u) \in \text{End}(V_i^n \otimes V_{j'}^m)$ .

Нас будет интересовать случай периодических граничных условий. В этом случае статистическую сумму можно найти точно, если выполняется уравнение Янга-Бакстера [9, 11]:

$$R_{12}^{(k,n)}(v)R_{13}^{(k,l)}(u)R_{23}^{(n,l)}(u-v) = R_{23}^{(n,l)}(u-v)R_{13}^{(k,l)}(u)R_{12}^{(k,n)}(v). \quad (1)$$

Вершинные модели,  $R$ -матрицы которых удовлетворяют уравнению (1), называются точно решаемыми [8].

С помощью процедуры слияния (fusion) [2, 3, 10, 16, 17], о которой будет рассказано далее, из матрицы  $R^{(1,1)}(u)$  можно строить матрицы  $R^{(n,m)}(u)$  статистических весов вершинных моделей с произвольным конечным числом параметров состояния на ребрах.

**2.2. SOS модели.** Модели SOS (solid-on-solid) определены на квадратной решетке, состоящей из  $N$  вертикальных рядов ячеек и  $M$  горизонтальных (рис. 3). Параметры состояния приписываются вершинам ячеек. Состоянием решетки называется набор параметров состояния во всех вершинах. Мы будем рассматривать модели, в которых параметры состояния принимают целочисленные значения. Ячейке с параметрами состояния  $a, b, c, d$  в вершинах соответствует статистический вес (рис. 4)

$$W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & c & \end{array} \right)$$

зависящий от спектрального параметра  $u$ . В рассматриваемых нами моделях на статистические веса накладывается следующее условие:

$$W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & c & \end{array} \right) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b, d-c \in \{-n+2j, j=0, 1, \dots, n\} \\ a-d, b-c \in \{-m+2j, j=0, 1, \dots, m\} \end{cases} \quad (2)$$

т.е. при движении в горизонтальном направлении параметр состояния от узла к узлу меняется не более чем на  $n$ , при движении в вертикальном направлении – не более чем на  $m$ .

Мы накладывали периодические граничные условия: параметры состояния крайних вершин на каждой вертикальной и горизонтальной

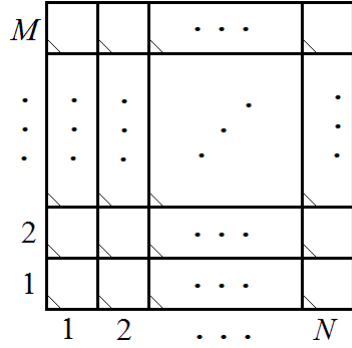


Рис. 3. Решетка SOS модели.

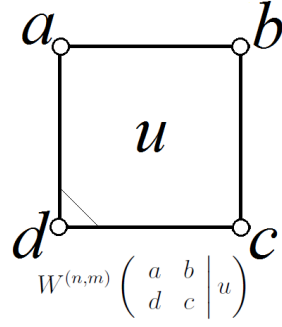


Рис. 4. Больцмановский вес ячейки решетки.

линии совпадают. Модель будет точно решаемой, если выполняется SOS уравнение Янга–Бакстера [1]

$$\begin{aligned}
 & \sum_g W^{(k,n)} \left( \begin{array}{cc|c} f & g & v-w \\ e & d & \end{array} \right) W^{(k,l)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-w \\ f & g & \end{array} \right) \\
 & \quad \times W^{(n,l)} \left( \begin{array}{cc|c} b & c & u-v \\ g & d & \end{array} \right) \\
 & = \sum_g W^{(n,l)} \left( \begin{array}{cc|c} a & g & u-v \\ f & e & \end{array} \right) W^{(k,l)} \left( \begin{array}{cc|c} g & c & u-w \\ e & d & \end{array} \right) \\
 & \quad \times W^{(k,n)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & v-w \\ g & c & \end{array} \right). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Заметим, что суммы по  $g$  конечные в силу условия (2).

**2.3. Соответствие между вершинными и SOS моделями.** Соответствие между  $R^{(n,m)}$  и  $W^{(n,m)}$  дается выражением [10]

$$\begin{aligned}
 & R^{(n,m)}(u-v) \psi^{(n)}(u)_b^a \otimes \psi^{(m)}(v)_c^b \\
 & = \sum_{b'} \psi^{(n)}(u)_c^{b'} \otimes \psi^{(m)}(v)_b^a W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-v \\ b' & c & \end{array} \right), \quad (4)
 \end{aligned}$$

где  $\psi^{(n)}(u)_b^a$  – вектор в  $\mathbb{C}^{n+1}$ , зависящий от спектрального параметра  $u$  и целочисленных параметров состояния SOS модели  $a, b$ . Он называется сплетающим вектором. Выражение (4) называется vertex-SOS соответствием. По определению,  $\psi^{(n)}(u)_b^a$  не равен нулю тогда и только тогда, когда  $(a - b) \in \{-n + 2j, j = 0, 1, 2, \dots, n\}$ . Это условие коррелирует с ограничением (2) на SOS веса.

Соотношение (4) было введено Р. Бакстером для восьмивершинной модели [19] (в ней параметры состояния ребер принимают 2 значения, т.е.  $n = m = 1$ ), и далее обобщено на произвольные  $n$  и  $m$  в [2, 3].

### §3. Слияние

Рассмотрим, как из  $R$ -оператора  $R^{(1,1)}(u)$ , матрица которого описывает вершинную модель с двумя параметрами состояния на ребрах, можно строить  $R$ -операторы  $R^{(n,m)}(u)$  для моделей с произвольным числом состояний ребер, действующие в  $\mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}^{m+1}$ . Чтобы построить это пространство из  $\mathbb{C}^2$ , в которых действует  $R^{(1,1)}(u)$ , рассмотрим тензорное произведение  $n + m$  копий  $\mathbb{C}^2$ . Обозначим первые  $n$  пространств  $V_1, \dots, V_n$ , а последние  $m$  пространств  $V_{\bar{1}}, \dots, V_{\bar{m}}$ . Выделим в первых  $n$  и последних  $m$  копиях симметричные компоненты, тогда пространство  $V^{(n,m)} = S^n \mathbb{C}^2 \otimes S^m \mathbb{C}^2$  будет изоморфно  $\mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}^{m+1}$ , так как  $S^k \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^{k+1}$ .

Теперь определим, как  $R^{(n,m)}(u)$  действует в  $V^{(n,m)}$ . Рассмотрим оператор

$$R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u) = \Pi_{1\dots n} R_{1\bar{j}}^{(1,1)}(u + n - 1) \dots R_{n-1\bar{j}}^{(1,1)}(u + 1) R_{n\bar{j}}^{(1,1)}(u), \quad (5)$$

где  $\Pi_{1\dots n}$  – проектор на пространство  $S^n \mathbb{C}^2$ , на базис он действует следующим образом:

$$\Pi_{1\dots n} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\sigma(n)}},$$

где  $S_n$  – множество перестановок первых  $n$  натуральных чисел, а  $i_1, \dots, i_n$  принимают значения  $+1$  и  $-1$ . Оператор (5) действует нетривиально в пространствах  $V_1, \dots, V_n$  и  $V_{\bar{j}}$ . Теперь определим  $R^{(n,m)}(u)$ :

$$R^{(n,m)}(u) = \Pi_{1\dots \bar{m}} R_{1\dots n, \bar{m}}^{(n,1)}(u) R_{1\dots n, \bar{m}-1}^{(n,1)}(u - 1) \dots R_{1\dots n, \bar{1}}^{(n,1)}(u - m + 1). \quad (6)$$

Оператор  $R^{(n,m)}(u)$  действует во всём тензорном произведении  $n + m$  пространств. Но из (5) и (6) видно, что результат его действия лежит

в  $V^{(n,m)}$ . Сужение  $R^{(n,m)}(u)$  на  $V^{(n,m)}$  и даст нам искомый  $R$ -оператор модели с произвольным числом состояний.

**Утверждение 1** ([10, 16, 17]). Пусть оператор  $R^{(1,1)}(u)$  удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера

$$R_{12}^{(1,1)}(u-v)R_{13}^{(1,1)}(u)R_{23}^{(1,1)}(v) = R_{23}^{(1,1)}(v)R_{13}^{(1,1)}(u)R_{12}^{(1,1)}(u-v),$$

и  $R^{(1,1)}(-1) = c(I - P)$ , где  $c \neq 0$  – произвольное комплексное число,  $I$  – тождественный оператор в  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ,  $P$  – оператор перестановки:  $Pv \otimes w = w \otimes v$ .

Тогда для любой тройки операторов  $R^{(k,n)}(u)$ ,  $R^{(k,l)}(u)$  и  $R^{(n,l)}(u)$ , построенных из  $R^{(1,1)}(u)$  по формуле (6), выполняется уравнение Янга-Бакстера (1).

Пусть для  $R$ -матрицы  $R^{(1,1)}(u)$  нам удалось найти сплетающие векторы  $\psi^{(1)}(u)_b^a$  и построить соответствующую SOS модель с весами  $W^{(1,1)}$  по формуле (4). Тогда для  $R$ -матрицы  $R^{(n,m)}(u)$  можно построить SOS модель с весами  $W^{(n,m)}$ , удовлетворяющими (2).

Рассмотрим сплетающий вектор  $\psi^{(1)}(u)_b^a$  в  $\mathbb{C}^2$ , зависящий от спектрального параметра  $u$  и целочисленных SOS параметров состояния  $a$  и  $b$ . По определению, он удовлетворяет условию

$$\psi^{(1)}(u)_b^a \neq 0 \Leftrightarrow |a - b| = 1 \quad (7)$$

и связывает  $R^{(1,1)}$  с  $W^{(1,1)}$  при помощи vertex-SOS соотношения

$$R^{(1,1)}(u-v) \psi^{(1)}(u)_b^a \otimes \psi^{(1)}(v)_c^b = \sum_{b'} \psi^{(1)}(u)_c^{b'} \otimes \psi^{(1)}(v)_{b'}^a W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc} a & b \\ b' & c \end{array} \middle| u-v \right). \quad (8)$$

Определим сплетающий вектор

$$\psi^{(k)}(u)_b^a = \prod_{1 \dots k} \psi^{(1)}(u+k-1)_{c_1}^a \otimes \dots \otimes \psi^{(1)}(u+1)_{c_{k-1}}^{c_{k-2}} \otimes \psi^{(1)}(u)_b^{c_{k-1}}, \quad (9)$$

где  $c_1, \dots, c_{k-1}$  удовлетворяют условию  $|c_1 - a| = |c_2 - c_1| = \dots = |b - c_{k-1}| = 1$ . Из (7) следует, что

$$\psi^{(k)}(u)_b^a \neq 0 \Leftrightarrow (b - a) \in \{-k + 2j, j = 0, 1, 2, \dots, k\}.$$

**Утверждение 2** ([2, 3]). Пусть для  $R^{(1,1)}$ ,  $W^{(1,1)}$  и  $\psi^{(1)}$  выполнено (8), а определение (9) сплетающего вектора  $\psi^{(k)}(u)_b^a$  для  $k = n, t$  не зависит от  $c_1, \dots, c_{k-1}$ . Тогда уравнение (4) будет выполнено для



$R^{(n,m)}$ , полученного с помощью процедуры смяния (6), и SOS веса даются формулой

$$W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ b' & c & \end{array} \right) = \sum_{a_1, \dots, a_{m-1}} \prod_{i=1}^m W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} a_{i-1} & b_{i-1} & u - m + i \\ a_i & b_i & \end{array} \right).$$

Здесь  $b_0 = b$ ,  $b_m = c$ ,  $a_0 = a$ ,  $a_m = b'$ , а  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$  удовлетворяют условию

$$|b_1 - b| = |b_2 - b_1| = \dots = |c - b_{m-1}| = 1,$$

и  $W^{(n,1)}$  определяется следующим образом:

$$W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} \tilde{a} & \tilde{b} & u \\ \tilde{b}' & \tilde{c} & \end{array} \right) = \sum_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1}} \prod_{i=1}^n W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} \tilde{a}_{i-1} & \tilde{a}_i & u + n - i \\ \tilde{b}_{i-1} & \tilde{b}_i & \end{array} \right)$$

где  $\tilde{a}_0 = \tilde{a}$ ,  $\tilde{a}_n = \tilde{b}$ ,  $\tilde{b}_0 = \tilde{b}'$ ,  $\tilde{b}_n = \tilde{c}$ , и  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{n-1}$  удовлетворяют условию

$$|\tilde{a}_1 - \tilde{a}| = |\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1| = \dots = |\tilde{b} - \tilde{a}_{n-1}| = 1.$$

При этом определение  $W^{(n,1)}$  не зависит от выбора  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{n-1}$ , а определение  $W^{(n,m)}$  не зависит от выбора  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ .

**Утверждение 3.** Пусть дано семейство операторов  $R^{(n,m)}(u)$ , такое что для каждой тройки  $R^{(k,n)}(u)$ ,  $R^{(k,l)}(u)$  и  $R^{(n,l)}(u)$  выполняется (1), и каждому оператору  $R^{(n,m)}(u)$  в этом семействе при помощи сплетающих векторов  $\psi^{(n)}(u)_b^a$  и  $\psi^{(m)}(u)_b^a$  посредством соотношения (4) поставлена в соответствие SOS модель со статистическими весами  $W^{(n,m)}$ . Рассмотрим тройку натуральных чисел  $k, n, l$ . Пусть для любых  $a, c \in \mathbb{Z}$  наборы сплетающих векторов

$$\{\psi^{(i)}(u)_b^a\}_{b \in \{a-i+2j, j=0,1,\dots,i\}}, \quad \{\psi^{(i)}(u)_c^b\}_{b \in \{c-i+2j, j=0,1,\dots,i\}}, \quad (10)$$

$i = k, n, l$

линейно независимы. Тогда для тройки функций  $W^{(k,n)}$ ,  $W^{(k,l)}$  и  $W^{(n,l)}$  выполняется SOS уравнение Янга-Бакстера (3).

**Доказательство** Соотношение (1) эквивалентно

$$\begin{aligned} R^{(k,n)}(u-v)R^{(k,l)}(u-w)R^{(n,l)}(v-w) \\ = R^{(n,l)}(v-w)R^{(k,l)}(u-w)R^{(k,n)}(u-v). \end{aligned} \quad (11)$$

Подействуем левой частью (11) на  $\psi^{(k)}(u)_b^a \otimes \psi^{(n)}(v)_c^b \otimes \psi^{(l)}(w)_d^c$ . Используя три раза vertex-SOS соответствие (4), получим

$$\begin{aligned} & R^{(k,n)}(u-v)R^{(k,l)}(u-w)R^{(n,l)}(v-w) \psi^{(k)}(u)_b^a \otimes \psi^{(n)}(v)_c^b \otimes \psi^{(l)}(w)_d^c \\ &= \sum_{b',c''} \psi^{(k)}(u)_d^{c''} \otimes \psi^{(n)}(v)_{c''}^{b'} \otimes \psi^{(l)}(w)_{b'}^a \\ & \times \sum_{c'} W^{(k,n)} \left( \begin{array}{cc|c} b' & c' & u-v \\ c'' & d & \end{array} \right) W^{(k,l)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-w \\ b' & c' & \end{array} \right) \\ & \quad \times W^{(n,l)} \left( \begin{array}{cc|c} b & c & v-w \\ c' & d & \end{array} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

Теперь подействуем на  $\psi^{(k)}(u)_b^a \otimes \psi^{(n)}(v)_c^b \otimes \psi^{(l)}(w)_d^c$  правой частью (11). Используя три раза vertex-SOS соответствие (4), получим

$$\begin{aligned} & R^{(n,l)}(v-w)R^{(k,l)}(u-w)R^{(k,n)}(u-v) \psi^{(k)}(u)_b^a \otimes \psi^{(n)}(v)_c^b \otimes \psi^{(l)}(w)_d^c \\ &= \sum_{b',c''} \psi^{(k)}(u)_d^{c''} \otimes \psi^{(n)}(v)_{c''}^{b'} \otimes \psi^{(l)}(w)_{b'}^a \\ & \times \sum_{c'} W^{(n,l)} \left( \begin{array}{cc|c} a & c' & v-w \\ b' & c'' & \end{array} \right) W^{(k,l)} \left( \begin{array}{cc|c} c' & c & u-w \\ c'' & d & \end{array} \right) \\ & \quad \times W^{(k,n)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-v \\ c' & c & \end{array} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

Так как наборы вида (10) линейно независимы, то набор

$$\{\psi^{(k)}(u)_d^{c''} \otimes \psi^{(n)}(v)_{c''}^{b'} \otimes \psi^{(l)}(w)_{b'}^a : \psi^{(n)}(v)_{c''}^{b'} \neq 0\}, \quad (14)$$

где  $c'' \in \{d-k+2j, j=0,1,\dots,k\}$ ,  $b' \in \{a-l+2j, j=0,1,\dots,l\}$  также линейно независим. Значит, из (12) и (13), приравнявая коэффициенты при слагаемых из набора (14), получим, что при любых  $a, b, c, d, c'', b'$

выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{c'} W^{(k,n)} \left( \begin{array}{cc|c} b' & c' & u-v \\ c'' & d & \end{array} \right) W^{(k,l)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-w \\ b' & c' & \end{array} \right) \\ & \quad \times W^{(n,l)} \left( \begin{array}{cc|c} b & c & v-w \\ c' & d & \end{array} \right) \\ & = \sum_{c'} W^{(n,l)} \left( \begin{array}{cc|c} a & c' & v-w \\ b' & c'' & \end{array} \right) W^{(k,l)} \left( \begin{array}{cc|c} c' & c & u-w \\ c'' & d & \end{array} \right) \\ & \quad \times W^{(k,n)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-v \\ c' & c & \end{array} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Поменяв в (15)  $u-v$  и  $v-w$  местами и сделав замены  $c'' \rightarrow e$ ,  $b' \rightarrow f$ ,  $c' \rightarrow g$ , получим эквивалентное (15) соотношение (3).  $\square$

#### §4. РАЦИОНАЛЬНАЯ СЕМИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЕЙ SOS МОДЕЛЬ

В данной работе рассматривается рациональная семивершинная модель,  $R$ -матрица которой имеет вид

$$R^{(1,1)}(u) = \begin{pmatrix} u+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u & 0 \\ \alpha^2 u(u+1) & 0 & 0 & u+1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Она является предельным случаем тригонометрической семивершинной модели [12].

Найдем для  $R^{(1,1)}$  сплетающие векторы и соответствующие SOS статистические веса  $W^{(1,1)}$ . Для этого домножим обе части соотношения (4) с  $n = m = 1$  на оператор перестановки  $P$ :

$$\begin{aligned} & \check{R}^{(1,1)}(u-v) \psi^{(1)}(u)_b^a \otimes \psi^{(1)}(v)_c^b \\ & = \sum_{b'} \psi^{(1)}(v)_{b'}^a \otimes \psi^{(1)}(u)_c^{b'} W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-v \\ b' & c & \end{array} \right), \quad (17) \end{aligned}$$

где  $\check{R}^{(1,1)}(u-v) = PR^{(1,1)}(u-v)$ . Среди векторов  $\psi^{(1)}(u)_b^a$  ненулевыми будут только  $X_l(u) \equiv \psi^{(1)}(u)_{l+1}^l$  и  $Y_l(u) \equiv \psi^{(1)}(u)_{l-1}^l$ .

Для нахождения  $X_l(u)$  в (17) выберем  $a = l$ ,  $b = l+1$ ,  $c = l+2$ . Соотношение (17) примет вид

$$\check{R}^{(1,1)}(u-v) X_l(u) \otimes X_{l+1}(v) = \lambda_l(u-v) X_l(v) \otimes X_{l+1}(u), \quad (18)$$

где

$$\lambda_l(u-v) = W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l & l+1 & \\ l+1 & l+2 & \\ \hline & & u-v \end{array} \right).$$

Благодаря условию (7), в правой части (18) остается только одно слагаемое. Представив векторы в координатной форме

$$X_l(u) = \begin{pmatrix} \beta_l(u) \\ \gamma_l(u) \end{pmatrix},$$

получим систему уравнений, эквивалентную (18):

$$(u-v+1)\beta_l(u)\beta_{l+1}(v) = \lambda_l(u-v)\beta_l(v)\beta_{l+1}(u) \quad (19)$$

$$\beta_l(u)\gamma_{l+1}(v) + (u-v)\gamma_l(u)\beta_{l+1}(v) = \lambda_l(u-v)\beta_l(v)\gamma_{l+1}(u), \quad (20)$$

$$(u-v)\beta_l(u)\gamma_{l+1}(v) + \gamma_l(u)\beta_{l+1}(v) = \lambda_l(u-v)\gamma_l(v)\beta_{l+1}(u), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2(u-v)(u-v+1)\beta_l(u)\beta_{l+1}(v) + (u-v+1)\gamma_l(u)\gamma_{l+1}(v) \\ = \lambda_l(u-v)\gamma_l(v)\gamma_{l+1}(u). \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим, что произведение правых частей (19) и (22) равно произведению правых частей (20) и (21). Значит, то же самое должно выполняться и для левых частей, то есть

$$\begin{aligned} [\beta_l(u)\gamma_{l+1}(v) + (u-v)\gamma_l(u)\beta_{l+1}(v)][(u-v)\beta_l(u)\gamma_{l+1}(v) + \gamma_l(u)\beta_l(v)] \\ = (u-v+1)\beta_l(u)\beta_{l+1}(v)[\alpha^2(u-v)(u-v+1)\beta_l(u)\beta_{l+1}(v) \\ + (u-v+1)\gamma_l(u)\gamma_{l+1}(v)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Это необходимое условие разрешимости системы (19 – 22). Разделив (23) на  $(\gamma_l(u)\beta_{l+1}(v))^2$ , приходим к уравнению

$$[z(l, u, v) - 1]^2 = \alpha^2(u-v+1)^2 y(l, u)^2, \quad (24)$$

где

$$z(l, u, v) = \frac{\beta_l(u)\gamma_{l+1}(v)}{\gamma_l(u)\beta_{l+1}(v)}, \quad y(l, u) = \frac{\beta_l(u)}{\gamma_l(u)}.$$

Рассмотрим решение (24) вида  $z(l, u, v) - 1 = -\alpha(u-v+1)y(l, u)$ . Подставив его в предыдущее равенство, получим

$$\frac{\gamma_{l+1}(v)}{\beta_{l+1}(v)} + \alpha(-v+1) = \frac{\gamma_l(u)}{\beta_l(u)} - \alpha u. \quad (25)$$

Примем  $\beta_l(u) = 1$ . Левая часть (25) не зависит от  $u$ , а правая не зависит от  $v$ . Значит левая и правая части (25) являются функцией целочисленного аргумента  $l$ , обозначим ее  $-\alpha c_l$ . Тогда  $\gamma_{l+1}(v) =$

$\alpha(v - (c_l + 1))$ ,  $\gamma_l(u) = \alpha(u - c_l)$ . Если положим  $c_l = l + t$ , где  $t$  – произвольная вещественная константа, то получим

$$\psi(u)_{l+1}^l = X_l(u, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(u - l - t) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Подставив (26) в (19), получим

$$W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l & l+1 & u-v \\ l+1 & l+2 & \end{array} \right) = \lambda_l(u-v) = u-v+1. \quad (27)$$

Несложно проверить, что (26) и (27) удовлетворяют соотношениям (20–22).

Если теперь положить в (17)  $a = l, b = l - 1, c = l - 2$ , то аналогичными вычислениями находятся сплетающие векторы  $\psi^{(1)}(u)_{l-1}^l$ :

$$\psi(u)_{l-1}^l = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(u + l + s) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где  $s$  – произвольный параметр.

Можно показать, что (17) выполняется для всех остальных возможных комбинаций  $a, b$  и  $c$ , и найти остальные SOS веса.

Окончательно, для  $R$ -матрицы (16) имеем сплетающие векторы

$$\psi^{(1)}(u)_{l+1}^l = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(u - l - t) \end{pmatrix}, \quad \psi^{(1)}(u)_{l-1}^l = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(u + l + s) \end{pmatrix} \quad (29)$$

и соответствующие статистические SOS веса

$$W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l \pm 2 & l \pm 1 & u \\ l \pm 1 & l & \end{array} \right) = u + 1, \quad (30)$$

$$W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l & l \pm 1 & u \\ l \pm 1 & l & \end{array} \right) = \frac{\mp u + l + w}{l + w} \quad (31)$$

$$W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l & l \pm 1 & u \\ l \mp 1 & l & \end{array} \right) = \frac{u(l \pm 1 + w)}{l + w}, \quad (32)$$

где  $w = \frac{1}{2}(s + t)$ . При  $w \notin \mathbb{Z}$  векторы из (29) удовлетворяют условию утверждения 3. Тогда для  $W^{(1,1)}$  из (30–32) выполняется SOS уравнение Янга-Бакстера (3).

Из найденных сплетающих векторов  $\psi^{(1)}(u)_b^a$  в соответствии с процедурой слияния по формуле (9) строятся векторы  $\psi^{(k)}(u)_b^a$ .

**Утверждение 4.** *Сплетающие векторы*

$$\psi^{(k)}(u)_b^a = \prod_{1\dots k} \psi^{(1)}(u+k-1)_{c_1}^{c_0} \otimes \dots \otimes \psi^{(1)}(u+1)_{c_{k-1}}^{c_{k-2}} \otimes \psi^{(1)}(u)_{c_k}^{c_{k-1}} \quad (33)$$

(где  $c_0 = a, c_k = b$ ), получаемые из (29) по формуле (9), не зависят от выбора  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ , если

$$|c_1 - a| = |c_2 - c_1| = \dots = |b - c_{k-1}| = 1. \quad (34)$$

**Доказательство**

Если выполняется условие (34), то  $c_{i+1} = c_i + \sigma_i$ ,  $\sigma_i = \pm 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Обозначим через  $k_+$  количество  $+1$  среди  $\{\sigma_i\}$  (т.е. количество векторов типа (26) в правой части (33)), через  $k_-$  – количество  $-1$  (количество векторов типа (28) в правой части (33)). Заметим, что

$$\begin{cases} k_+ - k_- = b - a \\ k_+ + k_- = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_+ = \frac{1}{2}(k + b - a) \\ k_- = \frac{1}{2}(k - b + a) \end{cases}.$$

Пусть  $\sigma_i = +1$  при  $i = i_1, i_2, \dots, i_{k_+}$ . В таком случае  $c_{i_p} = a - i_p + 2(p-1)$ ,  $p = 1, 2, \dots, k_+$ . Тогда, подставив  $c_{i_p}$  в (29), получим, что в тензорном произведении в (33) на месте номер  $(i_p + 1)$  (где  $p = 1, 2, \dots, k_+$ ) стоит вектор

$$\psi(u+k-i_p-1)_{c_{i_p}+1}^{c_{i_p}} = \binom{1}{\alpha(u+k-a-2p+1-t)}. \quad (35)$$

Пусть  $\sigma_j = -1$  при  $j = j_1, j_2, \dots, j_{k_-}$ . В таком случае  $c_{j_q} = a + j_q - 2(q-1)$ ,  $q = 1, 2, \dots, k_-$ . Тогда, подставив  $c_{j_q}$  в (29), получим, что в тензорном произведении в (33) на месте номер  $(j_q + 1)$  (где  $q = 1, 2, \dots, k_-$ ) стоит вектор

$$\psi(u+k-j_q-1)_{c_{j_q}-1}^{c_{j_q}} = \binom{1}{\alpha(u+k+a-2q+1+s)}. \quad (36)$$

Получаем, что вид каждого вектора из тензорного произведения в правой части (33) зависит лишь от того, какой он по счету среди векторов типа (26) или среди векторов типа (28). Значит, если выполняется (34), то вне зависимости от выбора  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ , в правой части (33) тензорно перемножаются  $k_+$  векторов (35) и  $k_-$  векторов (36). От выбора  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$  зависит лишь порядок их перемножения. Но результат действия симметризатора  $\prod_{1\dots k}$  на это тензорное произведение не зависит от порядка сомножителей.  $\square$

Из построенной нами SOS модели (30 – 32) можно получить модель, рассматривавшуюся в работе [8]. В ней параметры состояния принимают целые неотрицательные значения, на статистические веса наложено ограничение (2), и ненулевые статистические веса имеют вид

$$W_0^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l \pm 2 & l \pm 1 & u \\ l \pm 1 & l & \end{array} \right) = u + 1, \quad (37)$$

$$W_0^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l & l \pm 1 & u \\ l \pm 1 & l & \end{array} \right) = \frac{\mp u + l + 1}{l + 1},$$

$$W_0^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l & l \pm 1 & u \\ l \mp 1 & l & \end{array} \right) = \frac{u\sqrt{l(l+2)}}{l+1}. \quad (38)$$

Для этого модифицируем сплетающие векторы и введем

$$\tilde{\psi}^{(1)}(u)_b^a = \frac{1}{F(a, b)} \psi^{(1)}(u)_b^a, \quad (39)$$

где  $F(a, b)$  – функция двух целочисленных аргументов, задаваемая условиями

$$|a - b| \neq 1 \Rightarrow F(a, b) = 0, \\ \frac{F(l, l+1)}{F(l, l-1)} = \left( \frac{l+1+w}{l-1+w} \right)^{1/4}, \quad F(a, b) = F(b, a).$$

Подставив  $\psi^{(1)}(u)_b^a$  из (39) в (17), получим

$$\check{R}^{(1,1)}(u-v) \tilde{\psi}^{(1)}(u)_b^a \otimes \tilde{\psi}^{(1)}(v)_c^b \\ = \sum_{b'} \tilde{\psi}^{(1)}(v)_{b'}^a \otimes \tilde{\psi}^{(1)}(u)_c^{b'} \widetilde{W}^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-v \\ b' & c & \end{array} \right),$$

где

$$\widetilde{W}^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-v \\ b' & c & \end{array} \right) = \frac{F(a, b')F(b', c)}{F(a, b)F(b, c)} W^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u-v \\ b' & c & \end{array} \right), \quad (40)$$

а именно

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l \pm 2 & l \pm 1 & u \\ l \pm 1 & l & \end{array} \right) &= u + 1, \\ \widetilde{W}^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l & l \pm 1 & u \\ l \pm 1 & l & \end{array} \right) &= \frac{\mp u + l + w}{l + w}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\widetilde{W}^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} l & l \pm 1 & u \\ l \mp 1 & l & \end{array} \right) = \frac{u \sqrt{(l - 1 + w)(l + 1 + w)}}{l + w} \quad (42)$$

(аналогичное (40) преобразование SOS статвесов рассмотрено в [13]). При  $w \notin \mathbb{Z}$  векторы  $\tilde{\psi}^{(1)}(u)_b^a$  удовлетворяют условию утверждения 3. Значит для статистических весов (41)–(42) выполняется SOS уравнение Янга–Бакстера (3). Модель (37)–(38) представляет из себя (41)–(42) с неотрицательными параметрами состояния и  $w = 1$ .

Покажем, что из соотношения (3) для модели (41)–(42) с целочисленными параметрами состояния следует (3) для модели (37)–(38). Для этого рассмотрим (3) для  $\widetilde{W}^{(1,1)}$  с  $a, b, c, d, e, f \geq 0$  и  $w$  близким к 1, но не целым. Слагаемые с отрицательным  $g$ , не соответствующие модели (37)–(38), могут появиться в (3) только в двух случаях: при  $a = c = e = 1, b = d = f = 0$ , либо при  $a = c = e = 0, b = d = f = 1$ . Возьмем предел при  $w \rightarrow 1$  в обеих частях (3). Т.к. в данном случае существует и конечен предел каждого статистического веса  $\widetilde{W}$  (нет нуля в знаменателе, даже в упомянутых слагаемых с отрицательным  $g$ ), и суммы в обеих частях (3) конечные, то пределы обеих частей существуют. По (42),  $\widetilde{W}^{(1,1)} \left( \begin{array}{cc|c} 0 & \pm 1 & u \\ \mp 1 & 0 & \end{array} \right)$  обнуляется в пределе  $w \rightarrow 1$ , поэтому упомянутые лишние слагаемые в (3) с отрицательным  $g$  также обнуляются, и остаются только слагаемые, соответствующие модели (37)–(38).

## §5. РЕАЛИЗАЦИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИНОМОВ

Нашей конечной задачей является нахождение статистических весов  $W^{(n,m)}$  SOS-модели, соответствующей семивершинной решеточной модели. Для этого нам понадобится построить оператор  $R^{(n,m)}$  с помощью процедуры слияния. Удобным оказывается реализация пространств, на которых он действует, как пространств полиномов с фиксированной максимальной степенью. При таком подходе  $R^{(n,m)}$  можно компактно записать как разностный оператор.



$R$ -оператор имеет вид  $\Pi_{1\dots n}T$ , где  $T$  – некоторый оператор, действующий из  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$  в  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ . Сплетающие векторы имеют вид  $\Pi_{1\dots n}\Psi$ , где  $\Psi$  – тензор в  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ . Введем представление сплетающих векторов и  $R$ -оператора на пространстве полиномов, используя тот факт, что  $S^n\mathbb{C}^2$  изоморфно пространству однородных полиномов степени  $n$  от двух переменных  $\lambda_1, \lambda_2$ . Изоморфизм  $S$  имеет вид

$$S : \Pi_{1\dots n} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_n} \mapsto \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}, \quad i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}.$$

Тензор  $\Psi$  можно записать через базис в  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$  (по повторяющимся индексам идет суммирование):  $\Psi = \Psi_{i_1\dots i_n} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_n}$ . Тогда в реализации на полиномах  $\Pi_{1\dots n}\Psi$  имеет вид

$$[S\Pi_{1\dots n}\Psi](\lambda) = \Psi_{i_1\dots i_n} S(\Pi_{1\dots n} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_n}) = \Psi_{i_1\dots i_n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}.$$

Отсюда по формулам (9), (35), (36) получаем, что сплетающие векторы в представлении на полиномах выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(\lambda_1, \lambda_2|u)_b^a &= \prod_{p=1}^{n_+} [\lambda_1 + \alpha\lambda_2(u + n - a - 2p + 1 - t)] \\ &\quad \times \prod_{q=1}^{n_-} [\lambda_1 + \alpha\lambda_2(u + n + a - 2q + 1 + s)], \end{aligned} \quad (43)$$

где  $n_+ = \frac{1}{2}(n + b - a)$ ,  $n_- = \frac{1}{2}(n - b + a)$ .

Действие оператора  $T$  на тензор  $\Psi$  записывается так:  $(T\Psi)_{i_1\dots i_n} = T_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n} \Psi_{j_1\dots j_n}$ . В реализации на полиномах действие операторов выглядит следующим образом [5, пункт 2.5]:

$$[S\Pi_{1\dots n}T\Pi_{1\dots n}\Psi](\lambda) = \frac{1}{n!} T(\lambda, \partial_\mu)[S\Pi_{1\dots n}\Psi](\mu)|_{\mu=0},$$

где  $T(\lambda, \mu) \equiv \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_n} T_{j_1\dots j_n}^{i_1\dots i_n} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_n}$  называется символом оператора  $T$ .

Найдем символ оператора  $R^{(n,m)}(u)$  (6), действующего в  $V^{(n,m)}$ . Для начала найдем символ  $R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u|\lambda, \mu)$  оператора  $R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u)$  (5). Он является оператором в пространстве  $V_{\bar{j}}$ .

$$R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u|\lambda, \mu) = R_{1\bar{j}}^{(1,1)}(u + n - 1|\lambda, \mu) \dots R_{n-1\bar{j}}^{(1,1)}(u + 1|\lambda, \mu) R_{n\bar{j}}^{(1,1)}(u|\lambda, \mu),$$

где  $R_{i\bar{j}}^{(1,1)}(u + n - i|\lambda, \mu)$  – символ оператора  $R_{i\bar{j}}^{(1,1)}(u + n - i)$  в пространстве  $V_{\bar{j}}$ , являющийся оператором в  $V_{\bar{j}}$ . Перейдя по  $\lambda$  к представлению

на полиномах от одной переменной  $z$ :  $\lambda_1 = -z$ ,  $\lambda_2 = 1$ , после некоторых выкладок находим [4]

$$\begin{aligned} R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u|\lambda, \mu) \\ = \begin{pmatrix} u\Delta_+ + z\alpha^{-1}\Delta_- & -\alpha^{-1}\Delta_- \\ z^2\alpha^{-1}\Delta_- - nz\Delta_+ - \alpha u(u+n)\Delta_- & (u+n)\Delta_+ - z\alpha^{-1}\Delta_- \end{pmatrix} \\ \times (\mu_2 - \mu_1 z)^n, \end{aligned}$$

где операторы  $\Delta_+$  и  $\Delta_-$  определяются как

$$[\Delta_{\pm}f](z) \equiv \frac{1}{2}(f(z+\alpha) \pm f(z-\alpha)).$$

Переходя от символа оператора к самому оператору, получаем

$$\begin{aligned} R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u) \\ = \begin{pmatrix} u\Delta_+ + z\alpha^{-1}\Delta_- & -\alpha^{-1}\Delta_- \\ z^2\alpha^{-1}\Delta_- - nz\Delta_+ - \alpha u(u+n)\Delta_- & (u+n)\Delta_+ - z\alpha^{-1}\Delta_- \end{pmatrix}. \quad (44) \end{aligned}$$

Матрица  $R_{1\dots k, \bar{j}}^{(n,1)}(u)$  в (44) записана в базисе пространства  $V_{\bar{j}} \simeq \mathbb{C}^2$ , операторы  $\Delta_+$  и  $\Delta_-$  действуют на пространстве  $\text{Sym}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n) \simeq S^n \mathbb{C}^2$ .

Следующий шаг – нахождение  $R^{(n,m)}(u)$  и его символа  $R^{(n,m)}(u|\lambda, \mu)$ , где с пространством полиномов от  $\lambda_1, \lambda_2$  ассоциируется  $\text{Sym}V_{\bar{1}} \otimes V_{\bar{2}} \otimes \dots \otimes V_{\bar{m}}$ . Для этого построим символ  $\Lambda(u|\lambda, \mu)$  оператора  $R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u)$ , где  $V_{\bar{j}}$  интерпретируется как пространство полиномов [5].

$$\begin{aligned} \Lambda(u|\lambda, \mu) &= \lambda_{i_1} \left( R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u) \right)_{i_1}^{j_1} \mu^{j_1} \\ &= u(\lambda_1 + \lambda_2 z)\mu_1 \Delta_+ - (\lambda_1 + \lambda_2 z)(\mu_2 - \mu_1 z)\alpha^{-1} \Delta_- \\ &\quad + (u+n)\lambda_2(\mu_2 - \mu_1 z)\Delta_+ - \alpha u(u+n)\mu_1 \lambda_2 \Delta_-, \quad (45) \end{aligned}$$

где  $\left( R_{1\dots n, \bar{j}}^{(n,1)}(u) \right)_{i_1}^{j_1}$  – элемент  $(i_1, j_1)$  матрицы (44). Символ  $R^{(n,m)}(u|\lambda, \mu)$  выражается через  $\Lambda(u|\lambda, \mu)$  следующим образом [5, пункт 2.6]:

$$R^{(n,m)}(u|\lambda, \mu) = \Lambda(u|\lambda, \mu) \Lambda(u-1|\lambda, \mu) \dots \Lambda(u-m+1|\lambda, \mu). \quad (46)$$

Запишем vertex-SOS соответствие (4) в представлении на полиномах при  $u = 0$ ,  $v = -u$

$$\begin{aligned} & \left[ R^{(n,m)}(u|\lambda, \partial_\mu) \psi^{(m)}(\mu_1, \mu_2 | -u)_c^b \right] \Big|_{\mu=0} \psi^{(n)}(z|0)_b^a \\ &= \sum_{b'} \psi^{(n)}(z|0)_c^{b'} \psi^{(m)}(\lambda_1, \lambda_2 | -u)_b^a W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & \\ b' & c & u \end{array} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

где сплетающие векторы  $\psi^{(n)}(z|u)_b^a$  получаются из (43) подстановкой  $\lambda_1 = -z, \lambda_2 = 1$ :

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(z|u)_b^a &= (-1)^n \prod_{p=1}^{n_+} [z - \alpha(u + n - a - 2p + 1 - t)] \\ &\quad \times \prod_{q=1}^{n_-} [z - \alpha(u + n + a - 2q + 1 + s)], \end{aligned} \quad (48)$$

а  $n_\pm = \frac{1}{2}(n \pm (b - a))$ . Если в обеих частях (47) рассматривать только коэффициенты при  $\lambda_1^m$ , то из (45) и (46) получим

$$O_m(u, b, c) \psi^{(n)}(z|0)_b^a = \sum_{b'} W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & \\ b' & c & u \end{array} \right) \psi^{(n)}(z|0)_c^{b'}, \quad (49)$$

где оператор  $O_m(u, b, c)$  имеет вид

$$\begin{aligned} O_m(u, b, c) &= \Lambda'(u|\partial_\mu) \Lambda'(u - 1|\partial_\mu) \\ &\quad \dots \Lambda'(u - m + 1|\partial_\mu) \psi^{(m)}(\mu_1, \mu_2 | -u)_c^b \Big|_{\mu=0}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\Lambda'(u|\mu) \equiv -\alpha^{-1}[(\mu_2 - \mu_1 z)\Delta_- - \alpha u \mu_1 \Delta_+]. \quad (51)$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} O_m(u, b, c) &= \alpha^{-m} \gamma(z - u_1, -u + m_+) \Delta_-^{m_+} \gamma(z - u_1, u) \\ &\quad \times \gamma(z - u_2, -u + m) \Delta_-^{m_-} \gamma(z - u_2, u - m_+), \end{aligned} \quad (52)$$

где  $m_\pm = \frac{1}{2}(m \pm (c - b))$ ,

$$u_1 = \alpha \left[ -u + \frac{1}{2}(m - b - c) - t \right], \quad u_2 = \alpha \left[ -u + \frac{1}{2}(m + b + c) + s \right], \quad (53)$$

$$\gamma(z, p) = (2\alpha)^p \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad (54)$$

а  $\Gamma$  – гамма-функция. Большую роль в выводе (52) играет соотношение “звезда-треугольник”

$$\gamma(z, k) \Delta_-^{k+l} \gamma(z, l) = \Delta_-^l \gamma(z, k+l) \Delta_-^k. \quad (55)$$

Оно выполняется для целых неотрицательных  $k$  и  $l$  и доказывается по индукции при помощи формул

$$\Delta_- \gamma(z, p) = \gamma(z, p-1)[z\Delta_- + p\alpha\Delta_+], \quad (56)$$

$$\gamma(z, p) \Delta_- = [\Delta_- z - p\alpha\Delta_+] \gamma(z, p-1) \quad (57)$$

( $\Delta_-$  действует по  $z$ ), следующих из определения операторов  $\Delta_+$  и  $\Delta_-$ .

Используя (56) и (57), можно получить, что правая часть (52) равна

$$\begin{aligned} & \alpha^{-m} \prod_{l=0}^{\overleftarrow{m_+}-1} \left\{ \left[ z - \alpha \left( -u + \frac{m-b-c}{2} - t \right) \right] \Delta_- + \alpha(u-l)\Delta_+ \right\} \\ & \times \prod_{l'=0}^{\overleftarrow{m_-}-1} \left\{ \left[ z - \alpha \left( -u + \frac{m+b+c}{2} + s \right) \right] \Delta_- + \alpha(u-m_+-l')\Delta_+ \right\}, \end{aligned} \quad (58)$$

где для  $N_2 \geq N_1$

$$\prod_{l=N_1}^{\overleftarrow{N_2}} A_l \equiv A_{N_2} A_{N_2-1} \dots A_{N_1+1} A_{N_1}.$$

Значит, правая часть (52) является многочленом степени  $m$  по  $u$ . Кроме того, из (50) следует, что и  $O_m(u, b, c)$  является многочленом степени  $m$  по  $u$ . Тогда, если мы докажем (52) для произвольного набора из  $m+1$  значений  $u$ , например для  $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ , то это равенство будет выполняться для любых  $u$ .

**Утверждение 5.** *Равенство (52) выполняется для  $u \in N_m = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ .*

**Доказательство** Рассмотрим  $u \in N_m$ . При помощи соотношений

$$(\mu_2 - \mu_1 z) \Delta_-^p = \Delta_-^{p-1} [(\mu_2 - \mu_1 z) \Delta_- + \mu_1(p-1)\alpha\Delta_+],$$

$$\Delta_-^p (\mu_2 - \mu_1 z) = [(\mu_2 - \mu_1 z) \Delta_- - \mu_1 p \alpha \Delta_+] \Delta_-^{p-1},$$

следующих из тождества  $\Delta_- z = z\Delta_- + \alpha\Delta_+$ , можно получить из (51), что

$$\Lambda'(u|\mu)\Lambda'(u-1|\mu)\dots\Lambda'(u-m+1|\mu) = (-\alpha)^{-m}\Delta_-^u(\mu_2 - \mu_1 z)^m\Delta_-^{m-u}. \quad (59)$$

Подставив (59) в (50), имеем

$$O_m(u, b, c) = (-\alpha)^{-m}\Delta_-^u\psi^{(m)}(z|u)_c^b\Delta_-^{m-u}. \quad (60)$$

Выразим  $\psi^{(m)}(z|u)_c^b$  по формуле (48) через функцию  $\gamma$  (54):

$$\psi^{(m)}(z|u)_c^b = (-1)^m\gamma(z-u_1, m_+)\gamma(z-u_2, m_-),$$

где  $u_1$  и  $u_2$  определены в (53), и подставим в (60):

$$O_m(u, b, c) = \alpha^{-m}\Delta_-^u\gamma(z-u_1, m_+)\gamma(z-u_2, m_-)\Delta_-^{m-u}. \quad (61)$$

Сравнивая (61) и (52), заключаем, что осталось доказать

$$\begin{aligned} & \Delta_-^u\gamma(z-u_1, m_+)\gamma(z-u_2, m_-)\Delta_-^{m-u} \\ &= \gamma(z-u_1, -u+m_+)\Delta_-^{m+}\gamma(z-u_1, u)\gamma(z-u_2, -u+m) \\ & \quad \times \Delta_-^{m-}\gamma(z-u_2, u-m_+). \end{aligned} \quad (62)$$

Рассмотрим случай  $u \leq m_+$ . Из очевидного свойства  $\gamma(z, p)\gamma(z, -p) = 1$  получаем, что соотношение (62) эквивалентно

$$\begin{aligned} & \Delta_-^u\gamma(z-u_1, m_+)\gamma(z-u_2, m_-)\Delta_-^{m-u}\gamma(z-u_2, m_+-u) \\ &= \gamma(z-u_1, -u+m_+)\Delta_-^{m+}\gamma(z-u_1, u)\gamma(z-u_2, -u+m)\Delta_-^{m-}. \end{aligned} \quad (63)$$

Докажем (63), используя (55):

$$\begin{aligned} & \Delta_-^u\gamma(z-u_1, m_+)\gamma(z-u_2, m_-)\Delta_-^{m-u}\gamma(z-u_2, m_+-u) \\ &= \Delta_-^u\gamma(z-u_1, m_+)\Delta_-^{m+u}\gamma(z-u_2, m-u)\Delta_-^{m-} \\ &= \gamma(z-u_1, m_+-u)\Delta_-^{m+}\gamma(z-u_1, u)\gamma(z-u_2, m-u)\Delta_-^{m-}. \end{aligned}$$

В случае  $u \geq m_+$  заметим, что (62) эквивалентно

$$\begin{aligned} & \gamma(z-u_1, u-m_+)\Delta_-^u\gamma(z-u_1, m_+)\gamma(z-u_2, m_-)\Delta_-^{m-u} \\ &= \Delta_-^{m+}\gamma(z-u_1, u)\gamma(z-u_2, -u+m)\Delta_-^{m-}\gamma(z-u_2, u-m_+). \end{aligned} \quad (64)$$

Соотношение (64) доказывается с помощью (55) аналогично (63).  $\square$

Доказав утверждение 5, мы доказали равенство (52) для всех  $u \in \mathbb{C}$ . Таким образом, из (49), (52) и (58) получаем соотношение, с помощью которого будем искать статистические веса  $W^{(n,m)}$ :

$$\begin{aligned} & (-\alpha)^{-m} \prod_{l=0}^{\overleftarrow{m_+}-1} \left\{ \left[ \alpha \left( -u + \frac{m-b-c}{2} - t \right) - z \right] \Delta_- - \alpha(u-l)\Delta_+ \right\} \\ & \quad \times \prod_{l'=0}^{\overleftarrow{m_-}-1} \left\{ \left[ \alpha \left( -u + \frac{m+b+c}{2} + s \right) - z \right] \Delta_- \right. \\ & \quad \left. - \alpha(u-m_+-l')\Delta_+ \right\} \psi^{(n)}(z|0)_b^a \\ & = \sum_{b'} W^{(n,m)} \left( \begin{array}{c|c} a & b \\ b' & c \end{array} \middle| u \right) \psi^{(n)}(z|0)_c^{b'}, \quad (65) \end{aligned}$$

где  $m_{\pm} = \frac{1}{2}(m \pm (c-b))$ . Чтобы  $W^{(n,m)}$  находились из (65) однозначно, и чтобы для них выполнялось SOS уравнение Янга-Бакстера (3), должно выполняться следующее утверждение.

**Утверждение 6.** Для любого  $n \in \mathbb{N}$ , любого  $u \in \mathbb{C}$  и любых  $a, c \in \mathbb{Z}$  наборы сплетающих векторов

$$\{\psi^{(n)}(u)_b^a\}_{b \in \{a-n+2l, l=0,1,\dots,n\}}, \quad \{\psi^{(n)}(u)_c^b\}_{b \in \{c-n+2l, l=0,1,\dots,n\}}, \quad (66)$$

построенных из (29) при помощи процедуры слияния (9), линейно независимы при  $w = \frac{1}{2}(s+t) \notin \mathbb{Z}$ .

**Доказательство** Докажем в представлении на полиномах. Обозначим

$$p_l(z) \equiv \psi^{(n)}(z|u)_{a-n+2l}^a = (-1)^n \prod_{i=1}^l (z - a_i) \prod_{j=l+1}^n (z - b_j), \quad l=0,1,2,\dots,n,$$

где  $a_i = \alpha(u+n-a-2i+1-t)$ ,  $b_j = \alpha(u+n+a-2(n+1-j)+1+s)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  (выражение для  $\psi^{(n)}(z|u)_{a-n+2l}^a$  получили из (48)). Заметим, что так как по условию  $(s+t) \notin 2\mathbb{Z}$ , то

$$\forall i, j \quad a_i \neq b_j. \quad (67)$$

Кроме того,

$$p_l(a_i) = 0, \quad i \leq l, \quad p_l(b_j) = 0, \quad j > l. \quad (68)$$

Рассмотрим

$$0 = f(z) = \sum_{l=0}^n \alpha_l p_l(z), \quad (69)$$

докажем, что  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Для начала,  $0 = f(a_1) = \alpha_0 p_0(a_1)$ , откуда  $\alpha_0 = 0$ . Далее, по индукции, используя (68), можно доказать, что  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ . Тогда получаем

$$\alpha_n p_n(z) = 0, \quad (70)$$

откуда  $\alpha_n = 0$ .

Теперь обозначим через  $p_l(z)$  второй набор векторов в (66), выразим их при помощи (48):

$$p_l(z) \equiv \psi^{(n)}(z|u)_c^{c-n+2l} = (-1)^n \prod_{i=1}^l (z - a_i) \prod_{j=l+1}^n (z - b_j), \quad l=0, 1, 2, \dots, n,$$

где  $a_i = \alpha(u+c+2i-1+s)$ ,  $b_j = \alpha(u-c+2(n+1-j)-1-t)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Для  $a_i$  и  $b_j$  выполняются (67) и (68), значит далее доказательство аналогично (69)–(70).  $\square$

## §6. НАХОЖДЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЕСОВ SOS МОДЕЛЕЙ

**6.1. Нахождение статистических весов  $W^{(n,1)}$ .** Рассмотрим соотношение (65) при  $m = 1$ ,  $b = c + 1$ :

$$\begin{aligned} & -\alpha^{-1} \{[\alpha(-u+c+1+s) - z]\Delta_- - \alpha u \Delta_+\} \psi^{(n)}(z|0)_{c+1}^{c+k+1} \\ & = \sum_{\sigma=\pm} W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c+k+1 & c+1 & u \\ c+k+1+\sigma & c & \end{array} \right) \psi^{(n)}(z|0)_c^{c+k+1+\sigma}, \end{aligned} \quad (71)$$

где  $k \in \{-n+2j, j = 0, 1, \dots, n\}$ . Вспоминая (48), прямым вычислением получаем, что

$$\begin{aligned} W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c+k+1 & c+1 & u \\ c+k+2 & c & \end{array} \right) &= \frac{n_-(k)(c+1-n_-(k)+w-u)}{c+k+1+w}, \\ W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c+k+1 & c+1 & u \\ c+k & c & \end{array} \right) &= \frac{(u+n_+(k))(c+1+n_+(k)+w)}{c+k+1+w}, \end{aligned} \quad (72)$$

где  $n_{\pm}(k) = \frac{1}{2}(n \pm k)$ ,  $w = \frac{1}{2}(s+t)$ .

Заметим, что верхний статистический вес в (72) при  $k = n$  обнуляется, как и положено по условию (2), так как разность параметров в нижних левой и правой вершинах в нем станет равна  $n+2 > n$ .

Рассмотрим соотношение (65) при  $m = 1$ ,  $b = c - 1$ :

$$\begin{aligned} & -\alpha^{-1}\{\alpha(-u - c + 1 - t) - z\}\Delta_- - \alpha u \Delta_+ \} \psi^{(n)}(z|0)_{c-1}^{c+k-1} \\ &= \sum_{\sigma=\pm} W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c+k-1 & c-1 & u \\ c+k-1+\sigma & c & \end{array} \right) \psi^{(n)}(z|0)_c^{c+k-1+\sigma}. \end{aligned} \quad (73)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c+k-1 & c-1 & u \\ c+k-2 & c & \end{array} \right) &= \frac{n_+(k)(c-1+n_+(k)+w+u)}{c+k-1+w}, \\ W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c+k-1 & c-1 & u \\ c+k & c & \end{array} \right) &= \frac{(u+n_-(k))(c-1-n_-(k)+w)}{c+k-1+w}, \end{aligned} \quad (74)$$

где  $n_{\pm}(k) = \frac{1}{2}(n \pm k)$ ,  $w = \frac{1}{2}(s+t)$ ,  $k \in \{-n+2j, j = 0, 1, \dots, n\}$ .

Аналогично (72), верхний статистический вес в (74) при  $k = -n$  обнуляется, в соответствии с условием (2), так как разность параметров в нижних левой и правой вершинах станет равна  $-n-2 < -n$ .

**6.2. Нахождение статистических весов  $W^{(n,m)}$ .** Обозначим в (65)  $b = c + \mu$ ,  $a = c + \mu + \nu$ ,  $b' = c + \mu + \nu + \mu'$ , где  $\mu, \mu' \in \{-m+2j, j = 0, 1, \dots, m\}$ ,  $\nu \in \{-n+2j, j = 0, 1, \dots, n\}$ . Перепишем (65) в этих обозначениях:

$$\begin{aligned} & (-\alpha)^{-m} P_1 P_2 \psi^{(n)}(z|0)_{c+\mu}^{c+\mu+\nu} \\ &= \sum_{\mu'} W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} c+\mu+\nu & c+\mu & u \\ c+\mu+\nu+\mu' & c & \end{array} \right) \psi^{(n)}(z|0)_c^{c+\mu+\nu+\mu'}, \end{aligned} \quad (75)$$

где  $m_{\pm} = \frac{1}{2}(m \mp \mu)$ ,

$$P_1 \equiv \prod_{l=0}^{\overleftarrow{m_+ - 1}} \{[\alpha(-[u-l] - [c - m_+ + l] - t) - z] \Delta_- - \alpha[u-l] \Delta_+\},$$

$$P_2 \equiv \prod_{l'=0}^{\overleftarrow{m_- - 1}} \{[\alpha(-[u - m_+ - l'] + [c + \mu - l'] + s) - z] \Delta_- - \alpha[u - m_+ - l'] \Delta_+\}.$$



Применив (71)  $m_-$  раз, получим, что

$$\begin{aligned} & (-\alpha)^{-m_-} P_2 \psi^{(n)}(z|0)_{c+\mu}^{c+\mu+\nu} \\ &= \sum_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m_- - 1}} \left[ \prod_{i=0}^{m_- - 1} W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c_i & d_i & u - m_+ - i \\ c_{i+1} & d_{i+1} & \end{array} \right) \right] \psi^{(n)}(z|0)_{c-m_+}^{c+\mu+\nu+\Sigma}, \end{aligned} \quad (76)$$

где  $\sigma_j = \pm 1$ ,  $c_i = c + \mu + \nu + \sum_{\xi=0}^{i-1} \sigma_\xi$ ,  $d_i = c + \mu - i$ ,  $\Sigma = \sum_{\xi=0}^{m_- - 1} \sigma_\xi$ .

Зафиксируем  $\Sigma$  и найдем коэффициент при соответствующем сплетающем векторе  $\psi^{(n)}(z|0)_{c-m_+}^{c+\mu+\nu+\Sigma}$  в (76). Будем действовать как при доказательстве утверждения 4. Как видно,  $c_{i+1} = c_i + \sigma_i$ . Пусть  $\varkappa_+$  – количество  $+1$  среди  $\{\sigma_\xi\}_{\xi=0}^{m_- - 1}$ ,  $\varkappa_-$  – количество  $(-1)$ . Величины  $\varkappa_+$  и  $\varkappa_-$  однозначно определяются при фиксированном  $\Sigma$ :

$$\varkappa_\pm(\Sigma) = \frac{1}{2}(m_- \pm \Sigma). \quad (77)$$

Обозначим  $c'_i \equiv \sum_{\xi=0}^{i-1} \sigma_\xi$ ,  $i = 0, 1, \dots, m_- - 1$ . Пусть  $\sigma_{i_p} = +1$  при  $p = 1, 2, \dots, \varkappa_+$ . Тогда  $c'_{i_p} = -i_p + 2(p - 1)$ , и из (72)

$$\begin{aligned} & W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c_{i_p} & d_{i_p} & u - m_+ - i_p \\ c_{i_p+1} & d_{i_p+1} & \end{array} \right) \\ &= \frac{(\frac{1}{2}(n - \nu) - p + 1) (-u + m_- + c - \frac{1}{2}(n - \nu) + p - 1 + w)}{c + \mu + \nu + c'_{i_p} + w}. \end{aligned} \quad (78)$$

Пусть  $\sigma_{j_q} = -1$  при  $q = 1, 2, \dots, \varkappa_-$ . Тогда  $c'_{j_q} = j_q - 2(q - 1)$ , и из (72)

$$\begin{aligned} & W^{(n,1)} \left( \begin{array}{cc|c} c_{j_q} & d_{j_q} & u - m_+ - j_q \\ c_{j_q+1} & d_{j_q+1} & \end{array} \right) \\ &= \frac{(u - m_+ + \frac{1}{2}(n + \nu) - q + 1) (c + \mu + \frac{1}{2}(n + \nu) - q + 1 + w)}{c + \mu + \nu + c'_{j_q} + w}. \end{aligned} \quad (79)$$

Подставив (78) и (79) в (76), получим, что коэффициент при  $\psi^{(n)}(z|0)_{c-m_+}^{c+\mu+\nu+\Sigma}$  равен

$$\begin{aligned} & (\theta_1)_{\varkappa_+}^- (\theta_2)_{\varkappa_+}^+ (\theta_3)_{\varkappa_-}^- (\theta_4)_{\varkappa_-}^- \frac{x+\Sigma}{x} \sum_{c'_1, \dots, c'_{m_-}} \frac{1}{x+c'_1} \times \dots \\ & \times \frac{1}{x+c'_{m_-1}} \times \frac{1}{x+c'_{m_-}}, \end{aligned} \quad (80)$$

где

$$(y)_k^\sigma \equiv \prod_{j=0}^{k-1} (y + \sigma j), \quad \sigma = \pm, \quad (81)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(n-\nu), \quad \theta_2 = -u + c + m_- - \frac{1}{2}(n-\nu) + w, \quad (82)$$

$$\theta_3 = u - m_+ + \frac{1}{2}(n+\nu), \quad \theta_4 = c + \mu + \frac{1}{2}(n+\nu) + w, \quad x = c + \mu + \nu + w \quad (83)$$

а суммирование ведется по  $c'_1, \dots, c'_{m_-}$ , таким что

$$|c'_i - c'_{i+1}| = 1, \quad i = 0, 1, \dots, m_- - 1, \quad c'_0 \equiv 0, \quad c'_{m_-} = \Sigma. \quad (84)$$

Обозначим

$$f(\varkappa_+, \varkappa_- | x) \equiv \sum_{c'_1, \dots, c'_{m_-}} \frac{1}{x+c'_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x+c'_{m_-1}} \cdot \frac{1}{x+c'_{m_-}}, \quad (85)$$

это функция целочисленных аргументов  $\varkappa_+$ ,  $\varkappa_-$  и параметра  $x$  (так как  $m_-$  и  $\Sigma$  выражаются через  $\varkappa_+$  и  $\varkappa_-$  из (77)). Из (84) и (85) можно вывести рекуррентное соотношение на  $f(\varkappa_+, \varkappa_- | x)$  в случае, если  $\varkappa_+ + \varkappa_- \geq 2$ :

$$f(\varkappa_+, \varkappa_- | x) = \frac{1}{x + \varkappa_+ - \varkappa_-} [f(\varkappa_+ - 1, \varkappa_- | x) + f(\varkappa_+, \varkappa_- - 1 | x)]. \quad (86)$$

Для  $\varkappa_+ + \varkappa_- = 1$  по (85)

$$f(1, 0 | x) = \frac{1}{x+1}, \quad f(0, 1 | x) = \frac{1}{x-1}. \quad (87)$$

Далее, используя (86), находим  $f(\varkappa_+, \varkappa_- | x)$  при помощи индукции по  $\varkappa_+ + \varkappa_-$  с базой (87):

$$f(\varkappa_+, \varkappa_- | x) = \frac{\binom{\varkappa_+ + \varkappa_-}{\varkappa_+}}{\prod_{i=1}^{\varkappa_+} (x+i) \prod_{j=1}^{\varkappa_-} (x-j)}, \quad (88)$$

где  $\binom{\varkappa_+ + \varkappa_-}{\varkappa_+}$  – биномиальный коэффициент.

Таким образом, подставив  $f(\varkappa_+, \varkappa_- | x)$  из (88) в (80), и далее подставив (80) в (76), а (76) в (75), получаем, что

$$\begin{aligned} & (-\alpha)^{-m} P_1 P_2 \psi^{(n)}(z|0)_{c+\mu}^{c+\mu+\nu} \\ &= \sum_{\Sigma} \frac{(x+\Sigma) \binom{m_-}{\varkappa_+} (\theta_1)_{\varkappa_+}^- (\theta_2)_{\varkappa_+}^+ (\theta_3)_{\varkappa_-}^- (\theta_4)_{\varkappa_-}^-}{x (x+1)_{\varkappa_+}^+ (x-1)_{\varkappa_-}^-} \\ & \quad \times (-\alpha)^{-m_+} P_1 \psi^{(n)}(z|0)_{c-m_+}^{c+\mu+\nu+\Sigma}, \quad (89) \end{aligned}$$

где  $\varkappa_+$  и  $\varkappa_-$  выражаются через  $\Sigma$  по формуле (77), а сумма по  $\Sigma$  идет от  $-m_-$  до  $m_-$  с шагом 2.

Применив (73)  $m_+$  раз, получим, что

$$\begin{aligned} & (-\alpha)^{-m_+} P_1 \psi^{(n)}(z|0)_{c-m_+}^{c+\mu+\nu+\Sigma} \\ &= \sum_{\tau_0, \dots, \tau_{m_+-1}} \left[ \prod_{i=0}^{m_+-1} W^{(n,1)} \left( \begin{array}{c} \tilde{c}_i \quad \tilde{d}_i \\ \tilde{c}_{i+1} \quad \tilde{d}_{i+1} \end{array} \middle| u-i \right) \right] \psi^{(n)}(z|0)_c^{c+\mu+\nu+\Sigma+T}, \quad (90) \end{aligned}$$

где  $\tau_j = \pm 1$ ,  $\tilde{c}_i = c + \mu + \nu + \Sigma + \sum_{\xi=0}^{i-1} \tau_{\xi}$ ,  $\tilde{d}_i = c - m_+ + i$ ,  $T = \sum_{\xi=0}^{m_+-1} \tau_{\xi}$ . Аналогично (76), (90) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & (-\alpha)^{-m_+} P_1 \psi^{(n)}(z|0)_{c-m_+}^{c+\mu+\nu+\Sigma} \\ &= \sum_T \frac{(x+\Sigma+T) \binom{m_+}{\rho_+(T)} (\theta_5)_{\rho_+(T)}^- (\theta_6)_{\rho_+(T)}^+ (\theta_7)_{\rho_-(T)}^- (\theta_8)_{\rho_-(T)}^-}{(x+\Sigma) (x+\Sigma+1)_{\rho_+(T)}^+ (x+\Sigma-1)_{\rho_-(T)}^-} \psi^{(n)}(z)_c^{c+\mu+\nu+\Sigma+T} \quad (91) \end{aligned}$$

где

$$\rho_{\pm}(T) = \frac{1}{2}(m_{\pm} \pm T), \quad (92)$$

$$\theta_5 = u + \frac{1}{2}(n - \nu - \Sigma - m_-), \quad \theta_6 = c + \mu - \frac{1}{2}(n - \nu - \Sigma + m_-) + w, \quad (93)$$

$$\theta_7 = \frac{1}{2}(n + \nu + \Sigma + m_-), \quad \theta_8 = u + c + \mu + \frac{1}{2}(n + \nu + \Sigma - m_-) + w, \quad (94)$$

а сумма по  $T$  идет от  $-m_+$  до  $m_+$  с шагом 2.

Подставляя (91) в (89) и сравнивая получившееся выражение с формулой (75) для нахождения статистических весов, заключаем, что

$$\begin{aligned} & W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} c + \mu + \nu & c + \mu & u \\ c + \mu + \nu + \mu' & c & \end{array} \right) \\ &= \sum_{\Sigma} \frac{(x + \mu') \binom{m_-}{\varkappa_+} \binom{m_+}{\rho_+(\mu' - \Sigma)} (\theta_1)_{\varkappa_+}^- (\theta_2)_{\varkappa_+}^+ (\theta_3)_{\varkappa_-}^- (\theta_4)_{\varkappa_-}^-}{x (x + 1)_{\varkappa_+}^+ (x - 1)_{\varkappa_-}^- (x + \Sigma + 1)_{\rho_+(\mu' - \Sigma)}^+ (x + \Sigma - 1)_{\rho_-(\mu' - \Sigma)}^-} \\ & \times (\theta_5)_{\rho_+(\mu' - \Sigma)}^- (\theta_6)_{\rho_+(\mu' - \Sigma)}^+ (\theta_7)_{\rho_-(\mu' - \Sigma)}^- (\theta_8)_{\rho_-(\mu' - \Sigma)}^-, \end{aligned} \quad (95)$$

где сумма по  $\Sigma$  идет от  $-m_-$  до  $m_-$  с шагом 2, величины  $\varkappa_{\pm}$  и  $\rho_{\pm}$  определены в (77) и (92), параметры  $x$  и  $\theta_i$  определены в (82), (83), (93), (94), а обозначение  $(y)_k^{\pm}$  введено в (81).

При помощи (95) статистический вес  $W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ b' & c & \end{array} \right)$  можно выразить через обрывающийся гипергеометрический ряд

$${}_pF_q \left[ \begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_p & z \\ \beta_1 & \dots & \beta_q & \end{array} \right] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_p)_k z^k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_q)_k k!},$$

где  $(y)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (y + j)$ . Обозначим

$$n_{\pm} = \frac{1}{2}[n \pm (b - a)], \quad m_{\pm} = \frac{1}{2}[m \pm (c - b)], \quad m'_{\pm} = \frac{1}{2}[m \pm (b' - a)].$$

Выражение имеет вид

$$\begin{aligned} & W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & u \\ b' & c & \end{array} \right) \\ &= C^{(n,m)}(a, b, c, b'|u) {}_9F_8 \left[ \begin{array}{ccccccccc|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & & \end{array} \right], \end{aligned}$$

где в случае  $b + b' \leq a + c$ :

$j$	$\alpha_j$	$\beta_j$
1	$-m_-$	$a + w + 1$
2	$-n_+$	$u - m + n_- + 1$
3	$-m'_+$	$c + n_- - m_+ + 1 + w$
4	$a - m_- + w$	$1 - \frac{1}{2}(b' + b - a - c)$
5	$-u + c - n_+ + m_- + w$	$\frac{1}{2}(b' - b + a + c) + w + 1$
6	$\frac{1}{2}(a - m_- + w + 2)$	$\frac{1}{2}(a - m_- + w)$
7	$a - m'_- + w$	$-u - n_+$
8	$n_- + 1$	$c - m_+ - n_+ + w$
9	$u + c - m_+ + n_- + w + 1$	

$$\begin{aligned}
C^{(n,m)}(a, b, c, b'|u) &= (b' + w) \binom{m_+}{m'_+} \frac{\Gamma(a - m'_- + w)}{\Gamma(a + w + 1)} \left( n_- + \frac{1}{2}(b + b' - a - c) + 1 \right)_{-\frac{1}{2}(b+b'-a-c)} \\
&\times \frac{\Gamma(b + n_- + 1 + w)}{\Gamma(c + n_- - m_+ + 1 + w)} \frac{\Gamma(a - m_- + w + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2}(b' - b + a + c) + w + 1)} \frac{\Gamma(u + c - m_+ + n_- + w + 1)}{\Gamma(u + b + n_- - m'_- + w + 1)} \\
&\times \frac{\Gamma(u + n_+ + 1)}{\Gamma(u + n_+ - m'_+ + 1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(b + b' + c - a) - n_+ + w)}{\Gamma(c - m_+ - n_+ + w)} \frac{\Gamma(u - n_- - m_+ + 1)}{\Gamma(u - m + n_- + 1)},
\end{aligned}$$

а в случае  $b + b' \geq a + c$ :

$j$	$\alpha_j$	$\beta_j$
1	$-m'_-$	$\frac{1}{2}(b + b' + a - c) + w + 1$
2	$-n_+ + \frac{1}{2}(b + b' - a - c)$	$u - m_+ - m'_- + n_- + 1$
3	$-m_+$	$b + n_- - m'_- + 1 + w$
4	$a - m'_- + w$	1
5	$-u + b - n_+ + m'_+ + w$	$b' + w + 1$
6	$\frac{1}{2}(b' - m_+ + w + 2)$	$\frac{1}{2}(b' - m_+ + w)$
7	$b' - m_+ + w$	$-u - n_+ + \frac{1}{2}(b + b' - a - c)$
8	$n_- + 1 + \frac{1}{2}(b + b' - a - c)$	$b - m'_- - n_+ + w$
9	$u + b - m'_- + n_- + w + 1$	

$$\begin{aligned}
C^{(n,m)}(a, b, c, b'|u) &= \binom{m_-}{m'_-} \frac{\Gamma(a - m'_- + w)}{\Gamma(\frac{1}{2}(b + b' + a - c) + w + 1)} \left( -\frac{1}{2}(n - \nu) \right)_{\frac{1}{2}(b+b'-a-c)} \\
&\times \frac{\Gamma(-u + b - n_+ + m'_+ + w)}{\Gamma(-u + c - n_+ + m_- + w)} \frac{\Gamma(u - n_- + m_+ + 1)}{\Gamma(u - m_+ - m'_- + n_- + 1)} \frac{\Gamma(b + n_- + 1 + w)}{\Gamma(b + n_- - m'_- + 1 + w)} \\
&\times \frac{\Gamma(b' - m_+ + w + 1)}{\Gamma(b' + w)} \frac{\Gamma(u + n_+ - \frac{1}{2}(b + b' - a - c) + 1)}{\Gamma(u + n_+ - m'_+ + 1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(b + b' - a + c) - n_+ + w)}{\Gamma(b - m'_- - n_+ + w)}.
\end{aligned}$$

В соответствии с утверждениями 3 и 6,  $w \notin \mathbb{Z}$ .

## §7. СВЯЗЬ 7-ВЕРШИННОЙ И 11-ВЕРШИННОЙ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим произвольное семейство  $R$ -операторов  $R^{(n,m)}$ , удовлетворяющих уравнению Янга–Бакстера (1). Рассмотрим следующее преобразование подобия:

$$\tilde{R}^{(n,m)} = [A^{(n)}(u) \otimes A^{(m)}(v)] R^{(n,m)}(u-v) [A^{(n)}(u)^{-1} \otimes A^{(m)}(v)^{-1}], \quad (96)$$

где  $A^{(n)}(u)$  и  $A^{(m)}(v)$  – обратимые операторы. Если получившийся оператор  $\tilde{R}^{(n,m)}$  будет зависеть только от разности  $u - v$ , то любая тройка таких операторов также будет удовлетворять уравнению Янга–Бакстера [12]:

$$\tilde{R}_{12}^{(k,n)}(v) \tilde{R}_{13}^{(k,l)}(u) \tilde{R}_{23}^{(n,l)}(u-v) = \tilde{R}_{23}^{(n,l)}(u-v) \tilde{R}_{13}^{(k,l)}(u) \tilde{R}_{12}^{(k,n)}(v).$$

Построим преобразование подобия (96) для  $R$ -операторов моделей, получаемых при помощи процедуры слияния из семивершинной. Рассмотрим преобразование (96) для  $R$ -матрицы (16) с  $A^{(1)}(u)$  следующего вида:

$$A^{(1)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha u & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем

$$\tilde{R}^{(1,1)}(u-v) = \begin{pmatrix} u-v+1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha(u-v) & (u-v) & 1 & 0 \\ -\alpha(u-v) & 1 & u-v & 0 \\ \alpha^2(u-v) & \alpha(u-v) & -\alpha(u-v) & u-v+1 \end{pmatrix}.$$

Это  $R$ -матрица 11-вершинной модели [6, 7, 18].

Оператор  $R^{(n,m)}$  (6), получаемый последствием процедуры слияния из оператора  $R^{(1,1)}$  семивершинной модели, действует в  $S^n \mathbb{C}^2 \otimes S^m \mathbb{C}^2$ . Оператор  $A^{(n)}(u)$  строится из  $A^{(1)}(u)$  следующим образом:

$$A^{(n)}(u) = [A^{(1)}(u)]^{\otimes n} \Big|_{S^n \mathbb{C}^2}.$$

Используя выражения (5), (6) и свойства

$$\begin{aligned} A^{(1)}(u) A^{(1)}(v) &= A^{(1)}(v) A^{(1)}(u) = A^{(1)}(u+v), \\ [A^{(1)}(u)]^{\otimes n} \Pi_{1\dots n} &= \Pi_{1\dots n} [A^{(1)}(u)]^{\otimes n} \end{aligned}$$

можно доказать, что  $\tilde{R}^{(n,m)}$  действительно зависит только от разности  $u - v$ .

Таким образом, из процедуры слияния для 7-вершинной модели мы автоматически получаем процедуру слияния для 11-вершинной модели: мы нашли семейство операторов  $\tilde{R}^{(n,m)}(u)$ , удовлетворяющих уравнению Янга–Бакстера (1), в котором простейший представитель –  $R$ -оператор 11-вершинной модели  $\tilde{R}^{(1,1)}(u)$ .

В реализации на пространстве многочленов от одной переменной  $z$  (см. раздел 5) оператор  $A^{(n)}(u)$  осуществляет сдвиг аргумента функции на  $\alpha u$ :

$$A^{(n)}(u) = e^{\alpha u \partial_z} \quad (97)$$

С учетом (96), vertex-SOS соответствие для  $\tilde{R}^{(n,m)}$  принимает вид

$$\tilde{R}^{(n,m)}(u-v) \Psi^{(n)}_b^a \otimes \Psi^{(m)}_c^b = \sum_{b'} \Psi^{(n)}_c^{b'} \otimes \Psi^{(m)}_{b'}^a W^{(n,m)} \left( \begin{array}{cc|c} a & b & \\ b' & c & u-v \end{array} \right),$$

где  $W^{(n,m)}$  – это те же SOS статистические веса, что и для модели, полученной из 7-вершинной при помощи слияния, а сплетающие векторы

$$\Psi^{(n)}_b^a = A^{(n)}(u) \psi^{(n)}(u)_b^a$$

не зависят от спектрального параметра и в реализации на пространстве полиномов от 1 переменной имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}_b^a(z) &= (-1)^n \prod_{p=1}^{n_+} [z - \alpha(n - a - 2p + 1 - t)] \\ &\quad \times \prod_{q=1}^{n_-} [z - \alpha(n + a - 2q + 1 + s)], \end{aligned} \quad (98)$$

где  $n_{\pm} = \frac{1}{2}(n \pm (b - a))$ . Формула (98) следует из (48) и (97).

## §8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены статистические веса  $W^{(n,m)}$  SOS модели в виде обрывающегося гипергеометрического ряда  ${}_9F_8$ , а в частном случае – в виде рациональных дробей. Процедуру их нахождения сильно упростило представление  $R$ -оператора и сплетающих векторов на пространстве многочленов. Статистические веса SOS моделей зависят от дополнительного свободного вещественного параметра  $w \notin \mathbb{Z}$  и не зависят от параметра  $\alpha$  семивершинной модели (16). Для  $n = m = 1$  найдена связь с SOS моделью из работы [8].

Найденные сплетающие векторы могут быть использованы для получения явного выражения, связывающего статистические суммы вершинной и SOS моделей, а также для построения собственных векторов трансфер-матрицы вершинной модели [13].

Также, при помощи преобразования подобия из семейства  $R$ -операторов, полученных при помощи процедуры слияния из 7-вершинной модели, построено новое семейство решений уравнения Янга–Бакстера, простейшим представителем которого является  $R$ -матрица 11-вершинной модели [6, 7, 18]. Из процедуры слияния для 7-вершинной модели мы автоматически получили процедуру слияния для 11-вершинной модели. При помощи того же преобразования подобия из vertex-SOS соответствия для 7-вершинной модели мы получили vertex-SOS соответствие для нового семейства  $R$ -матриц, включающего 11-вершинную модель. При этом SOS статистические веса  $W^{(n,m)}$  получаются теми же, что и для 7-вершинной модели, а сплетающие векторы перестают зависеть от спектрального параметра, что может заметно облегчить использование vertex-SOS преобразования.

Следующим шагом в изучении полученных SOS моделей может быть вычисление корреляционных функций [9, 10].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*. — М., Мир, 1985.
2. E. Date, M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, *Fusion of the eight vertex SOS model*. — Lett. Math. Phys. **12** (1986), 209–215.
3. E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, *Exactly solvable SOS models II*. — Adv. Stud. Pure Math. **16** (1988), 17–122.
4. П. А. Валиневич, П. В. Антоненко, *Универсальная  $R$ -матрица для рациональной семивершинной модели*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **487** (2019), 100–105.
5. D. Chicherin, S. E. Derkachov, V. P. Spiridonov, *From principal series to finite-dimensional solutions of the Yang-Baxter equation*. — SIGMA **12** (2016), 028.
6. K. Atalikov, A. Zotov, *Higher rank generalization of 11-vertex rational  $R$ -matrix: IRF-Vertex relations and associative Yang-Baxter equation*, arXiv:2303.02391.
7. S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, *Universal  $R$  operator with Jordanian deformation of conformal symmetry*. — Nucl. Phys. B **681** (2004), 295–323.
8. П. А. Валиневич, С. Э. Деркачев, А. П. Исаев, А. В. Комисарчук, *Ортогональные полиномы,  $6j$ -символы и статистические веса SOS-моделей*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **465** (2017), 105–134.



9. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*. — М., Наука, 1992.
10. Т. Kojima, Н. Konno, R. Weston, *The vertex-face correspondence and correlation functions of the fusion eight-vertex model I: The general formalism*. — Nucl. Phys. B **720** (2005), 348–398.
11. Н. Славнов, *Алгебраический анзац Бете*. — Лекц. курсы НОЦ, 2017, выпуск 27, 3–189.
12. А. Antonov, К. Hasegawa, А. Zabrodin, *On trigonometric intertwining vectors and non-dynamical R-matrix for the Ruijsenaars model*. — Nucl. Phys. B **503** (1997), 747–770.
13. Н. J. de Vega, Н. J. Giacomini, *Intertwining vectors and the connection between critical vertex and SOS models*. — J. Phys. A: Math. Gen. **22** (1989), 2759–2779.
14. Е. К. Sklyanin, *Boundary conditions for integrable quantum systems*. — J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988), 2375–2389.
15. Н. Saleur, J. B. Zuber, *Integrable lattice models and quantum groups*. — Lectures at the 1990 Trieste Spring School, Saclay preprint SPHT/90-071.
16. P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin and E. K. Sklyanin, *Yang-Baxter equation and representation theory: I*. — Lett. Math. Phys. **5** (1981), 393–403.
17. Kulish P.P., Sklyanin E.K., *Quantum spectral transform method. Recent developments*. — In: Hietarinta J., Montonen C. (eds.), *Integrable Quantum Field Theories*. Lecture Notes in Physics, Vol. 151. Springer, Berlin, Heidelberg, 1982.
18. P. P. Kulish, А. А. Stolin, *Deformed Yangians and integrable models*. — Czech. J. Phys. **47** (1997), 1207–1212; arXiv:q-alg/9708024.
19. R. Baxter, *Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain: II. Equivalence to a generalized ice-type lattice model*. — Ann. Physics **76** (1973), 25–47.
20. V. Pasquier, *Etiology of IRF models*. — Commun. Math. Phys. **118** (1988), 355–364.

Antonenko P. V., Valinevich P. A. Boltzmann weights and fusion procedure for the rational seven-vertex SOS model.

We consider seven-vertex two-dimensional integrable statistical model. With the help of intertwining vector method we construct its counterpart integrable model of SOS type.

More general models of both types are constructed by means of fusion procedure. For SOS models we calculate the Boltzmann weights in terms of terminating hypergeometric series  ${}_9F_8$ . Then using the similarity transformation for  $R$ -operators we construct a new family of vertex models containing the 11-vertex model as the simplest representative. For this new set of models the vertex-SOS correspondence is constructed: we find the intertwining vectors, show that they do not depend on spectral parameter

---

and the SOS statistical weights are similar to those obtained from the 7-vertex model.

С.-Петербургское Отделение  
Математического Института  
им. В. А. Стеклова РАН  
*E-mail*: antonenko\_pavel@pdmi.ras.ru

Поступило 3 июля 2023 г.

С.-Петербургский международный  
математический институт имени Леонарда Эйлера  
*E-mail*: valinevich@pdmi.ras.ru