



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. George, Kh. D. Ikramov, Block  $LU$  factorization is stable for block matrices whose inverses are block diagonally dominant, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2003, Volume 296, 15–26

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

January 23, 2025, 17:44:53



А. Джордж, Х. Д. Икрамов

**БЛОЧНОЕ  $LU$ -РАЗЛОЖЕНИЕ УСТОЙЧИВО  
ДЛЯ МАТРИЦ, ОБРАТНЫХ К МАТРИЦАМ С  
ПРЕОБЛАДАЮЩЕЙ БЛОЧНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ**

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $M_n(\mathbb{C})$  — множество комплексных  $n \times n$  матриц. Говорят, что матрица  $V \in M_n(\mathbb{C})$  имеет диагональное преобладание (по строкам), если

$$\sigma_i |b_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $0 \leq \sigma_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для краткости, мы будем говорить о dd-матрицах. Число

$$\sigma = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i \quad (2)$$

будем называть *коэффициентом преобладания* матрицы  $V$ . Если  $\sigma < 1$ , то имеем *строгое* диагональное преобладание; в противном случае, говорим о *слабом* преобладании. Аналогичным образом определяется диагональное преобладание по столбцам.

Хорошо известны свойства dd-матриц в отношении гауссова исключения. Для удобства читателя мы суммируем их в приводимой ниже теореме. Для определенности, всюду в статье говорится о диагональном преобладании по строкам. Аналогичные факты могут быть доказаны для преобладания по столбцам.

**Теорема 1.** Пусть  $V \in M_n(\mathbb{C})$  — dd-матрица со строчными коэффициентами преобладания  $\sigma_i$  (см. (1)). При  $\sigma = 1$  дополнительно предполагаем, что матрица  $V$  невырождена. Тогда

1. Гауссово исключение применимо к  $V$  при любом способе выбора ведущих элементов на главной диагонали.

---

Эта работа поддержана грантом OGP0008111 Канадского Совета по Исследованиям в области Естественных и Технических Наук.

2. Пусть  $B^{(k)} = (b_{ij}^{(k)})$  — матрица, полученная из  $B$  в результате  $k - 1$  шагов гауссова исключения. Тогда активная подматрица матрицы  $B^{(k)}$  (иными словами, дополнение Шура ведущей главной подматрицы порядка  $k - 1$  в матрице  $B$ ) также является dd-матрицей. Более того, для каждого значения  $i$  строчный коэффициент преобладания  $\sigma'_i$  для активной подматрицы не превосходит соответствующего коэффициента  $\sigma_i$  для матрицы  $B$  (предполагается, что строкам активной подматрицы приписаны те же индексы, что и в исходной матрице  $B$ ).
3. Коэффициент роста для матрицы  $B$ , определяемый формулой

$$\rho_n(B) = \frac{\max_{i,j,k} |b_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |b_{ij}|}, \quad (3)$$

ограничен числом  $1 + \sigma$ :

$$\rho_n(B) \leq 1 + \sigma. \quad (4)$$

Ранее (см. [1]) авторы показали, что матрицы, обратные к dd-матрицам, имеют в отношении гауссова исключения по существу те же свойства, что перечислены в теореме 1. Опять-таки для удобства читателя, мы объединим эти свойства в Теореме 2.

**Теорема 2.** Пусть  $A \in M_n(\mathbf{C})$  — невырожденная матрица, причем  $B = A^{-1}$  есть dd-матрица, удовлетворяющая соотношениям (1). Тогда

1. Для каждого значения  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) наибольший модуль в  $i$ -м столбце матрицы  $A$  имеет диагональный элемент  $a_{ii}$ . Более точно, выполняются неравенства

$$|a_{ji}| \leq \sigma_j |a_{ii}|, \quad j \neq i. \quad (5)$$

2. Свойство быть обратной к dd-матрице наследуется активными подматрицами (дополнениями Шура), получаемыми в ходе гауссова исключения. Более того, строчные коэффициенты преобладания для матрицы, обратной к дополнению Шура, не превосходят соответствующих коэффициентов  $\sigma_i$  для матрицы  $B$ .

3. Коэффициент роста для  $A$  ограничен числом  $1 + \sigma$ :

$$\rho_n(A) \leq 1 + \sigma. \quad (6)$$

Предположим теперь, что для  $n \times n$ -матриц фиксирован некоторый тип блочного разбиения, так что  $B \in M_n(\mathbb{C})$  может быть представлена как блочная матрица

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix} \quad (7)$$

с квадратными блоками  $B_{ii}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Предположим также, что фиксирована некоторая матричная норма  $\|\cdot\|$ . Следуя [2, раздел 12.3.1], можно считать  $\|\cdot\|$  произвольной подчиненной нормой. Однако для наших целей достаточно, чтобы выбранная норма была мультипликативной и подчинялась условию  $\|I\| = 1$  для единичной матрицы  $I$  любого порядка. Например, норма

$$\|B\| = \max\{\|B\|_1, \|B\|_\infty\}$$

обладает обоими указанными свойствами, но не подчинена никакой векторной норме.

Говорят, что блочная матрица (7) имеет блочное диагональное преобладание (по строкам), если все ее диагональные блоки  $B_{11}, \dots, B_{mm}$  невырождены и

$$\|B_{ii}^{-1}\| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \|B_{ij}\| = \sigma_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

где  $0 \leq \sigma_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Для краткости, будем говорить о bdd-матрицах. Число

$$\sigma = \max_{1 \leq i \leq m} \sigma_i \quad (9)$$

называется *коэффициентом блочного преобладания* матрицы  $B$ . Заметим, что определение (12.16) в [2] соответствует соотношениям (8), в которых все коэффициенты  $\sigma_i$  равны 1 (слабое блочное диагональное преобладание; wbdd-матрицы). Аналогичным образом определяется блочное диагональное преобладание по столбцам.

В [2] доказано (теоремы 12.5 и 12.6; см. также [3, 4]), что свойства bdd-матриц в отношении блочного LU-разложения аналогичны свойствам скалярных dd-матриц, перечисленным в теореме 1. Мы снова соберем эти свойства в следующей теореме:

**Теорема 3.** *Предположим, что матрица  $B \in M_n(\mathbf{C})$ , представленная в блочной форме (7), является bdd-матрицей. Если  $B$  — wbdd-матрица, то дополнительно предположим, что  $B$  невырождена. Тогда*

1.  *$B$  допускает блочное LU-разложение, в котором  $L$  и  $U$  имеют то же разбиение на блоки, что и матрица (7).*
2. *Пусть  $B^{(k)} = (B_{ij}^{(k)})$  — матрица, полученная из  $B$  в результате  $k - 1$  шагов блочного исключения. Тогда активная подматрица матрицы  $B^{(k)}$ , т.е. блочная матрица*

$$\begin{pmatrix} B_{kk}^{(k)} & \cdots & B_{km}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{mk}^{(k)} & \cdots & B_{mm}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

*также является bdd-матрицей. Более того, для  $i = k, \dots, m$  коэффициент блочного преобладания  $\sigma'_i$  строки  $i$  матрицы (10) не превосходит соответствующего коэффициента  $\sigma_i$  для матрицы  $B$ .*

3. *Коэффициент роста в LU-разложении, определяемый формулой*

$$\rho_m(B) = \frac{\max_{i,j,k} \|B_{ij}^{(k)}\|}{\max_{i,j} \|B_{ij}\|}, \quad (11)$$

*ограничен числом  $1 + \sigma$ :*

$$\rho_m(B) \leq 1 + \sigma. \quad (12)$$

Поскольку доказательство теоремы 3, приведенное в [2], покрывает лишь случай  $\sigma = 1$ , мы даем собственное доказательство для  $\sigma < 1$  в разделе 2.

В отзыве рецензента нашей статьи [1] содержался вопрос: можно ли распространить результаты теоремы 2 на случай блочного диагонального преобладания? Ответ на этот вопрос положительный, и основной целью данной статьи является доказательство следующей теоремы:

**Теорема 4.** *Пусть  $A \in M_n(\mathbf{C})$  — невырожденная матрица, причем  $B = A^{-1}$  есть bdd-матрица, удовлетворяющая соотношениям (8) при заданном разбиении на блоки типа разбиения (7) и заданной матричной норме. Тогда*

1. Для каждого значения  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) матрица  $A_{ii}$  невырождена и выполняются неравенства

$$\|A_{ji}A_{ii}^{-1}\| \leq \sigma_j, \quad j \neq i. \quad (13)$$

2. Свойство быть обратной к  $bdd$ -матрице наследуется активными подматрицами (дополнениями Шура), получаемыми в ходе блочного  $LU$ -разложения. Более того, строчные коэффициенты блочного преобладания для матрицы, обратной к дополнению Шура, не превосходят соответствующих коэффициентов  $\sigma_i$  для матрицы  $B$ .
3. Коэффициент роста для  $A$  (определяемый, как в (11)) ограничен числом  $1 + \sigma$ :

$$\rho_m(A) \leq 1 + \sigma. \quad (14)$$

Теорема 4 доказана в разделе 3. Заметим, что из (13) вытекает неравенство

$$\|A_{ji}\| \leq \sigma_j \|A_{ii}\|, \quad j \neq i.$$

В самом деле,

$$\|A_{ji}\| = \|A_{ji}A_{ii}^{-1}A_{ii}\| \leq \|A_{ji}A_{ii}^{-1}\| \|A_{ii}\| \leq \sigma_j \|A_{ii}\|.$$

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Начнем с наблюдения, которое пригодится в последующих рассуждениях, а именно: равенство (8) влечет за собой соотношение

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \|B_{ij}\| \leq \sigma_i \|B_{ii}\|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \|B_{ij}\| &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \|B_{ii}B_{ii}^{-1}B_{ij}\| \\ &\leq \|B_{ii}\| \|B_{ii}^{-1}\| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \|B_{ij}\| = \sigma_i \|B_{ii}\|. \end{aligned}$$

Будет достаточно рассмотреть первый шаг блочного LU-разложения. Более того, поскольку блочные строки в  $B$  обрабатываются независимо друг от друга, достаточно показать, что вторая блочная строка сохраняет блочное преобладание при исключении блока  $B_{21}$ . Отсюда будет вытекать справедливость второго утверждения теоремы.

Прежде всего, нужно показать, что новый диагональный блок  $B_{22}^{(2)}$  невырожден. Имеем

$$B_{22}^{(2)} = B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} = B_{22}(I - \Delta), \quad (16)$$

где  $\Delta = B_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}$  и

$$\|\Delta\| \leq (\|B_{22}^{-1}\| \|B_{21}\|) (\|B_{11}^{-1}\| \|B_{12}\|) \leq \sigma^2 < 1.$$

Это означает, что матрица в соотношении (16) невырождена. Кроме того,

$$\|(I - \Delta)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\Delta\|}, \quad \|(B_{22}^{(2)})^{-1}\| \leq \frac{\|B_{22}^{-1}\|}{1 - \|\Delta\|}. \quad (17)$$

Вместо проверки неравенства

$$\|(B_{22}^{(2)})^{-1}\| \sum_{j=3}^m \|B_{2j}^{(2)}\| \leq \sigma_2$$

мы проверим сейчас более сильное неравенство (см. (17))

$$\begin{aligned} \|B_{22}^{-1}\| \left[ \sum_{j=3}^m \|B_{2j}\| + \|B_{21}\| \|B_{11}^{-1}\| \sum_{j=3}^m \|B_{1j}\| \right] \leq \\ \sigma_2 - \|B_{22}^{-1}\| \|B_{21}\| \|B_{11}^{-1}\| \|B_{12}\|. \end{aligned} \quad (18)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|B_{22}^{-1}\| \left[ \sum_{j=3}^m \|B_{2j}\| + \|B_{21}\| \|B_{11}^{-1}\| \sum_{j=3}^m \|B_{1j}\| \right] + \\ \|B_{22}^{-1}\| \|B_{21}\| \|B_{11}^{-1}\| \|B_{12}\| = \\ \|B_{22}^{-1}\| \left[ \sum_{j=3}^m \|B_{2j}\| + \|B_{21}\| \|B_{11}^{-1}\| \sum_{j=2}^m \|B_{1j}\| \right] = \end{aligned}$$

$$\|B_{22}^{-1}\| \left[ \sum_{j=3}^m \|B_{2j}\| + \|B_{21}\|\sigma_1 \right] \leq \|B_{22}^{-1}\| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^m \|B_{2j}\| = \sigma_2.$$

В этих выкладках использовалось равенство (8) при  $i = 1$  и  $i = 2$ . Полученное неравенство есть лишь иная форма неравенства (18).

То обстоятельство, что блочное диагональное преобладание сохраняется при исключении внедиагональных блоков, устанавливает также первое утверждение теоремы. Для доказательства третьего утверждения заметим, что

$$\sum_{j=2}^m \|B_{2j}^{(2)}\| \leq \sum_{j=1}^m \|B_{2j}\|. \quad (19)$$

Это своего рода "закон невозрастания массы" для блочных строк bdd-матрицы. Доказывается он точно так же, как в [2, теорема 12.6], если заменить блочные столбцы блочными строками. Теперь мы выводим из (19) оценку

$$\|B_{22}^{(2)}\| \leq \sum_{j=1}^m \|B_{2j}\| = \|B_{22}\| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^m \|B_{2j}\| \leq (1 + \sigma_2)\|B_{22}\|.$$

Здесь было использовано соотношение (15). Аналогичным образом получаем

$$\|B_{ii}^{(k)}\| \leq (1 + \sigma_i)\|B_{ii}\|, \quad k = 2, \dots, m, \quad i = k, \dots, m.$$

Это дает оценку (12). Теорема доказана.

**Замечание.** Пусть

$$B = LU \quad (20)$$

есть блочное разложение матрицы  $B$ , существование которого было только что установлено. Из доказательства видно, что  $U$  является bdd-матрицей со строчными коэффициентами блочного преобладания, не превосходящими соответственно  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Это верно независимо от того, в какой из матриц,  $L$  или  $U$ , диагональные блоки суть единичные матрицы. Соответственно, если  $B$  имеет блочное диагональное преобладание по столбцам, этот тип преобладания сохраняется матрицей  $L$  в (20).



**Замечание.** Анализ доказательства теоремы 3 показывает, что, в действительности, блочное диагональное преобладание сохраняется *любой* последовательностью исключений внедиагональных блоков, а не только последовательностью гауссова типа. Например, исключив блок  $B_{21}$ , мы могли бы затем исключить в полученной матрице блок  $(1,2)$  и в результате снова имели бы bdd-матрицу.

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Начнем со следующего очевидного замечания. Любое симметричное переупорядочение строк и столбцов bdd-матрицы  $B$ , согласованное с принятым блочным разбиением и не меняющее порядок скалярных строк внутри каждой блочной строки, сохраняет свойство блочного диагонального преобладания. Аналогичное замечание справедливо в отношении матрицы  $A$ , обратной к bdd-матрице  $B = A^{-1}$ ; т.е. при описанных выше переупорядочениях свойство быть обратной к bdd-матрице сохраняется.

Из сделанного только что замечания следует, что неравенства (13) достаточно доказать, скажем, для  $j = m$ , т.е. для блоков в последнем блочном столбце матрицы  $A$ . Для доказательства воспользуемся блочным LU-разложением (20) bdd-матрицы  $B = A^{-1}$ . Для определенности, предположим, что диагональные блоки в  $L$  суть единичные матрицы. Будем рассматривать все матрицы, участвующие в равенстве

$$UA = L^{-1},$$

как блочные и приравняем одноименные блоки последнего блочного столбца. Двигаясь по этому столбцу снизу вверх и учитывая, что последний блочный столбец у матрицы  $L^{-1}$  тот же, что у единичной матрицы  $I_n$ , последовательно получаем

$$\begin{aligned} U_{mm}A_{mm} &= I, \\ U_{m-1,m-1}A_{m-1,m} + U_{m-1,m}A_{mm} &= 0, \\ U_{m-2,m-2}A_{m-2,m} + U_{m-2,m-1}A_{m-1,m} + U_{m-2,m}A_{mm} &= 0, \\ \dots & \dots \dots \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений означает, что матрица  $A_{mm}$  невырождена. Перепишем второе соотношение в виде

$$A_{m-1,m}A_{mm}^{-1} = -U_{m-1,m-1}^{-1}U_{m-1,m}.$$

Отсюда

$$\|A_{m-1,m}A_{mm}^{-1}\| \leq \|U_{m-1,m-1}^{-1}\| \|U_{m-1,m}\| \leq \sigma_{m-1}.$$

Предположим, что уже доказаны неравенства

$$\|A_{pm}A_{mm}^{-1}\| \leq \sigma_p, \quad p = l+1, \dots, m-1. \quad (21)$$

Мы покажем, что

$$\|A_{lm}A_{mm}^{-1}\| \leq \sigma_l.$$

Имеем

$$U_{ll}A_{lm} + \sum_{p=l+1}^{m-1} U_{lp}A_{pm} + U_{lm}A_{mm} = 0,$$

откуда

$$\|A_{lm}A_{mm}^{-1}\| = \left\| -U_{ll}^{-1} \left( \sum_{p=l+1}^{m-1} U_{lp}A_{pm}A_{mm}^{-1} + U_{lm} \right) \right\| \leq$$

$$\|U_{ll}^{-1}\| \left( \sum_{p=l+1}^{m-1} \|U_{lp}\| \|A_{pm}A_{mm}^{-1}\| + \|U_{lm}\| \right) \leq$$

$$\|U_{ll}^{-1}\| \left( \sum_{p=l+1}^{m-1} \sigma_p \|U_{lp}\| + \|U_{lm}\| \right) \leq$$

$$\|U_{ll}^{-1}\| \sum_{p=l+1}^m \|U_{lp}\| \leq \sigma_l.$$

Здесь были использованы неравенства (21). Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения заметим, что активная подматрица матрицы  $A^{(k)}$ , полученной из  $A$  в результате  $k-1$  шагов блочного разложения, иными словами, матрица

$$\begin{pmatrix} A_{kk}^{(k)} & \dots & A_{km}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{mk}^{(k)} & \dots & A_{mm}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (22)$$

является обратной к подматрице

$$\begin{pmatrix} B_{kk} & \cdots & B_{km} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{mk} & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix} \quad (23)$$

матрицы  $B$ . Поскольку эта подматрица есть bdd-матрица со строчными коэффициентами блочного преобладания, не превосходящими соответственно  $\sigma_k, \dots, \sigma_m$ , мы получаем отсюда требуемое утверждение.

Для доказательства последнего утверждения введем новое разбиение матрицы  $B$  на блоки, а именно

$$B = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $\hat{B}_{22}$  есть подматрица (23). Определим блочную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} - \hat{B}_{12}\hat{B}_{22}^{-1}\hat{B}_{21} & \hat{B}_{12} \\ 0 & \hat{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

Ее можно получить, умножая (24) справа на матрицу

$$F = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -\hat{B}_{22}^{-1}\hat{B}_{21} & I_2 \end{pmatrix}.$$

В свою очередь,  $F$  можно получить, применяя к bdd-матрице

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{pmatrix}$$

нечто вроде блочного исключения по Гауссу–Жордану: вначале в подматрице (23) исключаются внедиагональные блоки, а затем каждая блочная строка умножается слева на соответствующую матрицу  $B_{ii}^{-1}$ . Согласно замечанию, сделанному в конце раздела 2, блочное диагональное преобладание сохраняется операциями первого типа. Аналогичное свойство операций второго типа очевидно. Из сказанного следует, что если блок (2,1) матрицы  $F$  представить в виде

$$\begin{pmatrix} F_{k1} & \cdots & F_{k,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{m1} & \cdots & F_{m,k-1} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

то

$$\sum_{l=1}^{k-1} \|F_{il}\| \leq \sigma_i, \quad i = k, \dots, m.$$

Далее, равенство

$$C = BF$$

влечет за собой

$$C^{-1} = F^{-1}A. \quad (26)$$

Заметим, что матрица  $D = C^{-1}$  имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix},$$

где блоком  $D_{22}$  является матрица (22). Матрица  $G = F^{-1}$  получается из  $F$  изменением знаков у поддиагональных элементов. Следовательно, если принять для блока (2,1) матрицы  $G$  такое же разбиение, как в (25), то

$$G_{ij} = -F_{ij}, \quad i = k, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Теперь из соотношения (26) вытекают равенства

$$A_{ij}^{(k)} = -\sum_{l=1}^{k-1} F_{il}A_{lj} + A_{ij}.$$

Поэтому для  $i, j = k, \dots, m$  имеем

$$\|A_{ij}^{(k)}\| \leq \max_{s,t} \|A_{st}\| \left( 1 + \sum_{l=1}^{k-1} \|F_{il}\| \right) \leq (1 + \sigma_i) \max_{s,t} \|A_{st}\|.$$

Этим доказана оценка (14).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. George, Kh. D. Ikramov, *Gaussian elimination is stable for the inverse of a diagonally dominant matrix*. — *Math. Comp.* (принята к печати).
2. N. J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. — SIAM, Philadelphia, 1996.
3. J. W. Demmel, N. J. Higham, R. S. Schreiber, *Stability of block LU factorization*. — *Numerical Linear Algebra with Applications*, **2** (1995), 173–190.
4. X. Д. Икрамов, *О блочном аналоге свойства диагонального преобладания*. — *Вестник Моск. ун-та. Серия 15. Вычисл. мат. кибернет.*, 1983, No. 4, 52–55.

George A., Ikramov K. D. Block LU factorization is stable for block matrices whose inverses are block diagonally dominant.

Let  $A \in M_n(\mathbf{C})$  and let its inverse  $B = A^{-1}$  be represented as an  $m \times m$  block matrix that is block diagonally dominant either by rows or by columns w.r.t. a certain matrix norm. We show that  $A$  possesses a block LU factorization w.r.t. the partitioning defined by  $B$ , and the growth factor for  $A$  in this factorization is bounded above by  $1 + \sigma$ , where  $\sigma = \max_{1 \leq i \leq m} \sigma_i$  and the  $\sigma_i$ ,  $0 \leq \sigma_i \leq 1$ , are the row (column) block dominance factors of  $B$ . Further, the off-diagonal blocks of  $A$  (and of its block Schur complements) satisfy the relations

$$\|A_{ji}A_{ii}^{-1}\| \leq \sigma_j, \quad j \neq i.$$

School of Computer Science,  
University of Waterloo,  
Waterloo, Ontario, Canada  
Московский  
государственный университет

Поступило 17 марта 2003 г.