А. В. Шокуров, О соотношениях между числами Чженя квазикомплексных многообразий,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 137–148

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ЧИСЛАМИ ЧЖЕНЯ КВАЗИКОМПЛЕКСНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. В. Шокуров

Хорошо известна следующая проблема Милнора — Хирцебруха [1]:

Пусть $\pi(n)$ — *число разбиений* $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$, $\sum i_k = n$, *числа* n. *Какая система* $\pi(n)$ *целых чисел реализуется как система чисел Чженя квазикомплексного многообразия размерности* n?

Рассмотрим кольцо Ω_U коэффициентов теории унитарных кобордизмов. В кольце $\Omega_U \otimes Q$ выделяется подкольцо $\Omega_U(\mathbf{Z})$, образованное классами кобордизмов с целыми когомологическими числами Чженя. Проблема Милнора — Хирцебруха эквивалентна проблеме выделения в кольце $\Omega_U(\mathbf{Z})$ подкольца Ω_U. Решение этой проблемы было дано Стонгом и Хаттори [2], [3], которые показали, что класс $\sigma \in \Omega_U(\mathbf{Z})$ принадлежит кольцу Ω_U тогда и только тогда, когда все его числа Чженя в K-теории принимают целые значения. Этот результат имеет ряд важных приложений в алгебраической топологии [4], [5]. В [6] было предложено обобщение проблемы Милнора — Хирцебруха, позволяющее применить технику работ Стонга — Хаттори для изучения спектральной последовательности Адамса — Новикова. А именно, В. М. Бухштабер в [6] построил фильтрацию

$$\Omega_U = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_\infty = \Omega_U(\mathbf{Z}),$$

которая дала возможность разбить сложную задачу вычисления групп $\operatorname{Ext}_{A^U}(\Omega_U, \Omega_U)$ на две задачи: вычисление когомологий алгебры Ландвебера — Новикова S

и вычисление соотношений между когомологическими числами Чженя рациональных многообразий из групп N_i. Пусть $\Omega_{U,\mathrm{fr}}$ — группа бордизмов (U, fr)-многообразий, т. е. квазикомплексных многообразий со стабильным оснащением на границе. В [6] показано, что имеет место канонический гомоморфизм λ: $\Omega_{U,\mathrm{fr}} \to N_1$. Группу N_1 вычислил Н. В. Панов [7] и в качестве следствия получил решение аналога проблемы Милнора — Хирцебруха для (U, fr)-многообразий.

В настоящей работе дано полное вычисление группы N_2 и получен ряд результатов о спектральной последовательности Бухштабера, ассоциированной с фильтрацией $\Omega_U = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_\infty = \Omega_U(\mathbf{Z})$. Вычисление группы N_2 вместе с результатами работы [8] о группе $\mathrm{Ext}^2_S(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ позволяет получить информацию о группе $\mathrm{Ext}^2_{A^U}(\Omega_U, \Omega_U)$ и в качестве следствия новые серии элементов гомотопических групп сфер.

§ 1. Спектральная последовательность Бухштабера. Пусть $\mathbf{Z}^n_+$ — полугруппа n-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами. Положим $\mathbf{Z}^\infty_+ = \varinjlim \mathbf{Z}^n_+$. В этой полугруппе введем нормы $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ с помощью равенств $|\omega| = \sum n_q$, $\|\omega\| = \sum q n_q$, где $\omega = \sum_{q=1}^{\infty} n_q e_q \in \mathbf{Z}^\infty_+$.

Пусть Ω_U — кольцо коэффициентов теории унитарных кобордизмов, A^U — алгебра стабильных когомологических операций в этой теории, S — алгебра Ландвебера — Новикова (см. [9], [10]). Аддитивный топологический базис кольца A^U имеет вид $x_i s_\omega$, где x_i — аддитивный однородный базис Ω_U, а s_ω — однородные базисные элементы алгебры S. Топология в A^U определяется фильтрацией (см. [9], [10]). Правила коммутирования вида

$$s_\omega \circ x = \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \sigma_{\omega_1} x \circ s_{\omega_2}$$

впервые были установлены в работе С. П. Новикова [9]. Следовательно, имеет место изоморфизм (см. [11])

$$\mathrm{Ext}_{A^U}(\Omega_U, X) \approx \mathrm{Ext}_S(\mathbf{Z}, X),$$

где справа X рассматривается как S-модуль, а слева как

A^U-модуль. В частности, имеем

$$\mathrm{Ext}_{A^U}(\Omega_U, \Omega_U) = \mathrm{Ext}_S(\mathbf{Z}, \Omega_U),$$

$$\mathrm{Ext}_{A^U}(\Omega_U, \mathbf{Z}) = \mathrm{Ext}_S(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}).$$

Обозначим через $\Omega_U^{-n}(\mathbf{Z})$ подгруппу в $\Omega_U^{-n} \otimes Q$, порожденную элементами, характеристические числа s_ω которых являются целыми числами для всех разбиений $\omega \in \mathbf{Z}_+^\infty$, $2\,\|\omega\| = n$ [6]. Градуированное кольцо $\Omega_U(\mathbf{Z}) = \sum_{n\geqslant 0}\Omega_U^{-n}(\mathbf{Z})$ будем называть кольцом «рациональных» многообразий. Очевидно, кольцо $\Omega_U(\mathbf{Z})$ является S-модулем. В кольце $\Omega_U(\mathbf{Z})$ определена фильтрация S-модулями: $0 \subset N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_\infty$, где $N_0 = \Omega_U$, а

$$N_k = \{\sigma \in \Omega_U(\mathbf{Z}) \mid s_\omega(\sigma) \in N_{k-1}, \mid \omega \mid > 0, \quad s_\omega \in S^+\}$$

где $k > 0$. Имеет место равенство

$$\Omega_U(\mathbf{Z}) = N_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim N_k.$$

Короткие точные последовательности

$$0 \to N_k \xrightarrow{i} N_{k+1} \xrightarrow{j} N_{k+1}/N_k \to 0$$

определяют точные последовательности в когомологиях

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}_S(\mathbf{Z}, N_k) \arrow[r, "i_*"] & \mathrm{Ext}_S(\mathbf{Z}, N_{k+1}) \arrow[d, "j_*"] \\ & \mathrm{Ext}_S(\mathbf{Z}, N_{k+1}/N_k) \arrow[ul, "\partial_*"] \end{tikzcd}$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. [1]. *Определена триградуированная спектральная последовательность*

$$\{E_r^{s,t,q},\ s \geqslant 0,\ s+t \leqslant 0,\ q \geqslant 0,\ \tilde{d}_r^{s,t}\colon E_r^{s,t,q} \to E_r^{s-r,\,t+r-1,\,q}\}$$

такая, что

$$E_1^{0,*,*} = \mathrm{Ext}_{A^U}^{*,*}(\Omega_U, \Omega_U),\ E_1^{s,*,*} = \mathrm{Ext}_S^{*,*}(\mathbf{Z}, N_s/N_{s-1})$$

при $s > 0$, $E_\infty^{*,*,*} = E_1^{0,0,0} = \mathbf{Z}$.

ЛЕММА 1.1. *Последовательность*

$$0 \to \mathrm{Ext}_S^n(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \otimes N_s/N_{s-1} \xrightarrow{i} \mathrm{Ext}_S^n(\mathbf{Z}, N_s/N_{s-1}) \xrightarrow{k}$$
$$\xrightarrow{k} \mathrm{Ext}_S^{n+1}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) * N_s/N_{s-1} \to 0$$

точна и расщепляется.

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулой универсальных коэффициентов для тривиального S-модуля N_s/N_{s-1}.

ЛЕММА 1.2. *Гомоморфизмы*

$$\tilde{d}_1^{k+2,\,-k-2}\colon N_{k+2}/N_{k+1} \to \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, N_{k+1}/N_k)$$

являются мономорфизмами.

Доказательство. Имеет место точная последовательность

$$\mathrm{Hom}_S(\mathbf{Z},\, N_{k+1}/N_k) \xrightarrow{\partial_*} \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, N_k) \xrightarrow{i_*}$$
$$\xrightarrow{i_*} \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, N_{k+1}) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, N_{k+1}/N_k).$$

Имеем

$$\mathrm{Hom}_S(\mathbf{Z},\, N_{m+1}/N_m) \overset{\partial_*}{\simeq} \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, N_m)$$

(см. [8]). Таким образом, последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, N_{k+1}) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, N_{k+1}/N_k)$$

точна. Ввиду равенств

$$\mathrm{Hom}_S^*(\mathbf{Z},\, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}, \quad \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$$

и леммы 1.1 имеем

$$N_{k+1}/N_k = \mathrm{Hom}_S(\mathbf{Z},\, N_{k+1}/N_k) \overset{\partial_*}{\approx} \mathrm{Ext}_S^1(\mathbf{Z},\, N_k).$$

Следовательно, дифференциал $\tilde{d}_1^{k+2,\,-k-2}$ является монофорфизмом.

Следствие 1.1. $E_2^{s,\,-s,\,*} = E_\infty^{s,\,-s,\,*} = 0$.

ЛЕММА 1.3. *Композиция дифференциала* $\tilde{d}_1^{s+1,\,-s-1}$ *и гомоморфизма* k (см. лемму 1.1) *совпадает с гомоморфизмом* (p — *простое*)

$$h\colon N_{s+1}/N_s \to \mathrm{Ext}_S^{2,\,*}(\mathbf{Z},\, \mathbf{Z}) * N_s/N_{s-1}\colon$$
$$x \mapsto h(x) = \textstyle\sum_p \left(\sum_{k>0}((1/p)\, \Delta^+\alpha_1^{p^k},\, p,\, \bar{s}_{p^k e_1} x) + \right.$$
$$\left. + \textstyle\sum_{k>0}((1/p)\, \Delta^+\alpha_2^{p^k},\, p,\, \bar{s}_{p^k e_2} x)\right).$$

Если при композиции $k \circ \tilde{d}_1^{s+1,\,-s-1}$ *некоторый элемент* x *переходит в нуль, то определена композиция* $i^{-1} \circ d_1^{s+1,\,-s-1}(x)$

и имеет место равенство

$$i^{-1}\circ\tilde{d}_1^{s+1,\,-s-1}(x)=\alpha_1\otimes\bar{s}_{e_1}x+\alpha_2\otimes\bar{s}_{e_2}x$$

(*элементы* $\alpha_i\in\Omega_{2i}^U(\mathbf{Z})$ *определены в работе* [8] *и двойственны элементам* $\bar{s}_{e_i}$).

Доказательство. Рассмотрим действие дифференциала $\tilde{d}_1^{s+1,\,-s-1}$ на представитель X элемента $x\in N_{s+1}/N_s$. Имеем

$$\tilde{d}_1^{s+1,\,-s-1}(X\bmod N_s)=\sum_{\omega\in\mathbf{Z}_+^\infty}\alpha^\omega\otimes(\bar{s}_\omega X\bmod N_{s-1})=$$
$$=\alpha_1\otimes(\bar{s}_{e_1}X\bmod N_{s-1})+\alpha_2\otimes(\bar{s}_{e_2}X\bmod N_{s-1})+$$
$$+\sum\nolimits_{p\text{ — простое}}\Big(\sum\nolimits_{k=1}^\infty\alpha_1^{p^k}\otimes(\bar{s}_{p^ke_1}X\bmod N_{s-1})+$$
$$+\sum\nolimits_{k=1}^\infty\alpha_2^{p^k}\otimes(\bar{s}_{p^ke_2}X\bmod N_{s-1})$$

(см. [8]). Таким образом,

$$k\circ\tilde{d}_1^{s+1,\,-s-1}(x)=\sum\nolimits_{p\text{ — простое}}\Big(\sum\nolimits_{k=1}^\infty((1/p)\Delta^+\alpha_1^{p^k},\,p,\,\bar{s}_{p^ke_1}x)+$$
$$+\sum\nolimits_{k=1}^\infty((1/p)\,\Delta^+\alpha_2^{p^k},\,p,\,\bar{s}_{p^ke_2}x)\Big).$$

Если $k\tilde{d}_1^{s+1,\,-s-1}x=0$, то ввиду независимости элементов $(1/p)\Delta^+\alpha_2^{p^k}$ и $(1/p)\ \Delta^+\alpha_2^{p^k}$ имеем $\bar{s}_{p^ke_1}X\in N_{s-1}$, $\bar{s}_{p^ke_2}X\in$ $\in N_{s-1}$. Таким образом,

$$i^{-1}\circ\tilde{d}_1^{s+1,\,-s-1}(x)=\alpha_1\otimes\bar{s}_{e_1}x+\alpha_2\otimes\bar{s}_{e_2}x.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Имеем место точная последовательность*

$$0\to N_2/N_1\xrightarrow{\tilde{d}_1^{2,\,-2}}\mathrm{Ext}_S^{1,\,*}(\mathbf{Z},\,N_1/\Omega_U)\xrightarrow{\tilde{d}_1^{1,\,-2}}\mathrm{Ext}_{A^U}^{2,\,*}(\Omega_U,\,\Omega_U);$$

группа $\mathrm{Ext}_S^{1,\,*}(\mathbf{Z},\,N_1/\Omega_U)$ *и дифференциал* $\tilde{d}_2^{2,\,-2}$ *описаны в леммах* 1.1—1.3.

Доказательство. Достаточно проверить точность последовательности

$$N_2/N_1\xrightarrow{\tilde{d}_1^{2,\,-2}}\mathrm{Ext}_S^{1,\,*}(\mathbf{Z},\,N_1/\Omega_U)\xrightarrow{\tilde{d}_1^{1,\,-2}}\mathrm{Ext}_{A^U}^{2,\,*}(\Omega_U,\,\Omega_U).$$

Из соображений размерности и следствия 1.1 вытекает, **что дифференциалы $\tilde{d}_r$ с областью определения или зна-**

чений $E_r^{1,-2,*}$ нулевые при $r>1$. Так как $E_\infty^{1,-2,*}=0$ ввиду теоремы 1.1, то последовательность $E_1^{2,-2,*}\to E_1^{1,-2,*}\to$ $\to E_1^{0,-2,*}$ точна.

§ 2. **Основная теорема.** В дальнейшем мы будем придерживаться следующих соглашений. Пусть $H_{2,2}$ обозначает класс бордизмов многообразия Милнора $H_{2,2}\subset$ $\subset CP^2\times CP^2$, CP_k — класс бордизмов комплексного проективного пространства CP^k, M — класс бордизмов $4CP_2-3CP_1^2$, H и $L_{2^s(2n+1)}$ $(s>0)$ — классы

$$CP_1^6+CP_1^3CP_5+CP_8/3-CP_2^4/3+CP_1^2CP_2^3\in\Omega_*^U$$

и

$$CP_1^{2^s(2n+1)}/2^{s+2}+H_{2,2}CP_1^{2^s(2n+1)-3}/2\in N_1.$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. а) *Имеет место равенство $K_2=N_2\otimes\mathbf{Z}_{(2)}$, где K_2 — группа, порожденная над $\mathbf{Z}_{(2)}$ группой N_2 и следующая элементами из $\Omega_*^U(\mathbf{Z})$:*

1) $H_{2,2}^{2n}CP_1^k/2$, $n\geqslant 0$, $k\geqslant 0$; 2) $CP_2^{2^n}CP_1^k/2$, $n\geqslant 0$, $k>0$;

3) $L_{4n+2}M/4+(3\lambda/4)L_{4n+4}+(3l/4)H_{2,2}^2CP_1^{4n-2}+$ $+(3m/4)H_{2,2}CP_1^{4n+1}$,

где $n+1=2^s(2u+1)$, $l=2n+1$, $m=2u^2+2nu+$ $+u-n$, $\lambda=2u+2n-1$;

4) $CP_1^{4n+3}M/8+CP_1^{4n+5}/16$; 5) $CP_1^{4n+1}M/8$; 6) $M^2/16$;

7) CP_2L_{2k}; 8) $L_kM/4+3sL_{k+2}/2+3sH_{2,2}CP_1^{k-1}/2$, $k=2^n(2s+1)$, $n>1$.

б) *Имеет место равенство $K_3=N_2\otimes\mathbf{Z}_{(3)}$, где K_3 — группа, порожденная над $\mathbf{Z}_{(3)}$ группой N_1 и следующими элементами из $\Omega_*^U(\mathbf{Z})$:*

1) $CP_1CP_2^{3^kl}/3^{k+1}$ $(l,3)=1$; 2) $CP_1^{3^k}CP_2^l/3$, $l\geqslant 1$;

3) $M^{3^k-l+\varepsilon}/3^{k+2}$, $(l,3)=1$, $\varepsilon=0,1$; 4) $H^{3^s}CP_2^k/3$.

в) *Пусть $p>3$ — простое. Имеет место равенство $K_p=N_2\otimes\mathbf{Z}_{(p)}$, где K_p — группа, порожденная над $\mathbf{Z}_{(p)}$*

группой N_1 *и следующими элементами из* $\Omega_*^U(\mathbf{Z})$:

$$1)\ \mathrm{CP}_1\mathrm{CP}_{p-1}^{p^k\cdot l}/p^{k+1},\quad (p,l)=1;\ \ 2)\ \mathrm{CP}_1^{p^n}\mathrm{CP}_{p-1}^{l}/p,\quad l>0;$$
$$3)\ M\,\mathrm{CP}_{p-1}^{p^k}/p^{k+1},\quad (p,l)=1;\quad 4)\ M^{p^k}\mathrm{CP}_{p-1}^{l}/p,\quad l>0.$$

Для доказательства основной теоремы нам потребуется несколько лемм.

ЛЕММА 2.1. *При* $k>4$ *числа* $\frac{2^k}{2^{n+3}}\binom{2^n(2m+1)}{k}$ *являются целыми.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно при $n\leqslant 2$. Будем в дальнейшем считать, что $n>2$.

1) Пусть $4<k\leqslant 2^{n-1}$. Имеем

$$\frac{2^k}{2^{n+3}}\binom{2^n(2m+1)}{k}=\frac{2^n(2m+1)}{2^{n+3}}\cdot\frac{2^n(2m+1)-1}{1}\cdot$$
$$\cdot\frac{2^n(2m+1)-2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2^n(2m+1)-k+1}{k-1}\cdot\frac{2^k}{1}=\frac{A\cdot 2^k}{k\cdot 2^3},$$

где $A\in\mathbf{Z}$. Достаточно проверить, что число $2^{k-3}/k$ лежит в кольце $\mathbf{Z}_{(2)}$. При $k>5$ это следует из неравенства $2^{k-3}\geqslant k$. При $k=5$ число $2^{k-3}/k$, очевидно, лежит в кольце $\mathbf{Z}_{(2)}$.

2) Пусть теперь $2^{n-1}<k$. а) Пусть $n>4$ или $k\geqslant n+3$, тогда число $2^k/2^{n+3}$ целое ввиду неравенства $k>2^{n-1}\geqslant n+3$ при $n>4$.

б) Пусть $n=3$ или $n=4$ и $k<n+3$. Тогда все возможные случаи легко перечисляются:

$$\left.\begin{matrix}n=3\\k=5\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}n=4\\k=6\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}n=4\\k=7\end{matrix}\right\}.$$

В этих случаях в справедливости леммы убеждаемся непосредственной проверкой.

ЛЕММА 2.2. *В кольце* Ω_U *можно выбрать систему мультипликативных образующих* y_j *такую, что справедливы равенства* $\bar{s}_{e_i y_i}=1$ *при* $i\neq p^k-1$, $\bar{s}_{me_i}y_{p^n-1}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$ *при* $i>p^{n-1}-1$.

Доказательство. В качестве образующих y_i при $i\neq p^n-1$ (p — простое) возьмем образующие x_i кольца кобордизмов $\Omega_U=\mathbf{Z}[x_1,x_2,\ldots]$. При $i=p^n-1$

возьмем образующие v_n, указанные Хазевинкелем:

$$\frac{CP_{p^n-1}}{p^{n-1}} = v_n + \sum_{0<k<n} \frac{CP_{p^k-1}}{p^k} \cdot v_{n-k}^{p^k}$$

(см. [12], [13]). Образующая v_1 удовлетворяет условиям леммы. Пусть образующие v_k при $k < n$ удовлетворяют условиям леммы и $k = n$. Имеем

$$\bar{s}_{me_i} v_n = \binom{p^n}{m} \cdot \frac{1}{p^{n-1}} \cdot CP_{p^n-mi-1} -$$
$$- \sum_{l>0} \sum_{0<k<n} \bar{s}_{le_i} \frac{CP_{p^k-1}}{p^k} \cdot \bar{s}_{(m-l)e_i} (v_{n-k}^{p^k}) -$$
$$- \sum_{0<k<n} \frac{CP_{p^k-1}}{p^k} \cdot \bar{s}_{me_i} (v_{n-k}^{p^k}).$$

По индукционному предположению $\bar{s}_{me_i}(v_{n-k}) \equiv 0 \pmod p$, так как при $i > p^{n-k-1} - 1$, очевидно, $CP_{p^k-li-1} = 0$. Следовательно, $\bar{s}_{me_i} v_n \equiv 0 \pmod p$ при $i > p^{n-1} - 1$.

ЛЕММА 2.3. *Образующие v_n леммы 2.2 удовлетворяют соотношениям*

$$\bar{s}_{pe_{p^{n-1}-1}} v_n \equiv \varepsilon v_1 \,(\mathrm{mod}\; p\Omega_U), \qquad \varepsilon \not\equiv 0 \pmod p.$$

Доказательство. В силу определения образующих v_k имеем

$$v_n = \frac{CP_{p^n-1}}{p^{n-1}} - \sum_{0<i<n} \frac{CP_{p^i-1}}{p^i} v_{n-i}^{p^i},$$

$$\bar{s}_{pe_{p^{n-1}-1}} v_n \equiv \bar{s}_{pe_{p^{n-1}-1}} \frac{CP_{p^n-1}}{p^{n-1}} =$$
$$= \binom{p^n}{p} \cdot \frac{1}{p^{n-1}} CP_{p-1} \equiv \varepsilon\, CP_{p-1} \,(\mathrm{mod}\; p\Omega_U),$$

так как $\bar{s}_{me_{p^{n-1}-1}} v_k = 0$ при $k < n - 1$.

Из результатов работ [8] и [7] следует

Предложение 2.1. *Пусть s_ω — характеристические числа в K-теории. Тогда группа $(N_2)_{2n} \subset \Omega_{2n}^U(\mathbf{Z})$ состоит из тех и только тех элементов, у которых числа s_ω целые для всех $\omega \in Z_+^\infty$: $\omega \neq p^k e_1$, $\omega \neq p^k e_2$, $|\omega| > 0$ и числа $ps_{p^k e_1}$ и $ps_{p^k e_2}$ целые при $k > 0$ (p — простые числа).*

ЛЕММА 2.4. *Пусть* $x \in N_2 \otimes \mathbf{Z}_2$ *имеет вид* $x = k_1 \mathrm{CP}_1/2 + k_0/2$, *где* $k_1 \in N_1$, $k_0 \in N_1$. *Тогда* $x \equiv \equiv R(y_1, y_2, y_3) \pmod{\Omega_U^* \otimes \mathbf{Z}_{(2)}}$, *где* R — *многочлен с рациональными коэффициентами.*

Доказательство. Введем в множестве натуральных чисел полный линейный порядок $\prec$: если $x \neq 2^k - 1$ и $y \neq 2^m - 1$, то $y \prec x$ эквивалентно $x < y$; если $x = 2^n - 1$, то $y \prec x$ эквивалентно $y \leqslant 2^{n-1} - 1$. Этот порядок позволяет ввести понятие старшего члена многочлена $R(x_1, \ldots, x_n)$. А именно, это коэффициент при старшей переменной (в смысле $\prec$) в наибольшей степени (в смысле $<$).

Пусть $x = R(y_1, y_2, \ldots, y_l) \in N_2$, где переменные y_i удовлетворяют условиям леммы 2.2, а коэффициенты многочлена $R(y_1, \ldots, y_m)$ имеют вид, указанный в лемме 2.4. Рассмотрим старший член этого многочлена. Он имеет вид

$$y_n^{a_n} R_1(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k), \quad i \prec n.$$

Предположим, что $R_1(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_k) \notin \Omega_U$. Пусть $n \neq 2^m - 1$ и $n \succ 2$, тогда

$$\bar{s}_{a_n e_n} R \equiv R_1(y_1, \ldots, y_k) \pmod{\Omega_U}.$$

Если $n = 2^m - 1$, то

$$\bar{s}_{2a_n l_{2^{m-1}-1}} R \equiv \mathrm{CP}_1^{a_n} R_1(y_1, \ldots, y_k) \bmod (\Omega_U).$$

Ввиду предложения 2.1, элемент x не лежит в группе N_2. Поэтому старший член многочлена $R(y_1, \ldots, y_l)$ — целочисленный.

Следовательно, $x \equiv R'(y_1, y_2, y_3) \pmod{\Omega_U}$. Повторяя проведенные выше рассуждения для многочлена $R'(y_1, y_2, y_3)$, получаем

Следствие 2.1. *Если* $x \in N_2$ *имеет вид, указанный в лемме* 2.4, *то* $x \in K_2$.

ЛЕММА 2.5. *Пусть* $x \in N_2$ *имеет вид* $x = k_0/3$, *где* $k_0 \in N_1$. *Тогда* $k_0 \equiv P(\mathrm{CP}_1, \mathrm{CP}_2) \pmod{3\Omega_U}$.

Доказательство не отличается от доказательства леммы 2.4.

Следствие 2.2. *Если* $x \in N_2$ *имеет вид, указанный в лемме* 2.5, *то* $x \in K_3$.

Доказательство основной теоремы. В силу теоремы 1.2 имеет место мономорфизм

$$N_2/N_1 \xrightarrow{\tilde{d}_1} \mathrm{Ext}^1_S(\mathbf{Z},\ N_1/\Omega_U).$$

Воспользовавшись описанием гомоморфизма $\tilde{d}_1$ (леммы 1.1—1.3) и равенствами [8]

$$\mathrm{Ext}_S^{1,k}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & k = 2, 4, \\ 0, & k \neq 2, 4, \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}_S^{2,k}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_{(p)} = \begin{cases} 0, & k \neq 2p^n,\ 4p^n, \\ \mathbf{Z}/p, & k = 2p^n,\ 4p^n, \\ \mathbf{Z}_{(p)} & k = 10, 14, \end{cases}$$

$$\mathrm{Ext}_S^{2,k}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} = \begin{cases} \mathbf{Z}/2, & k = 4, \\ \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2, & k = 2^n,\ n > 2, \\ 0, & k \neq 2^n \text{ или } k = 2, \\ \mathbf{Z}_{(2)} & k = 10, 14, \end{cases}$$

получаем включение $N_2 \otimes \mathbf{Z}_{(p)} \supset K_p$. В случае в) мы сразу получаем обратное включение: $N_2 \otimes \mathbf{Z}_{(p)} \subset K_p$.

а) Пусть $x \in N_2 \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$. Рассмотрим элемент $2x$. Его образ при гомоморфизме $\tilde{d}_1$ лежит в группе $2\mathrm{Ext}^1_S(\mathbf{Z}, N_1/\Omega_U)$. Композиция $k \circ \tilde{d}_1(2x)$ — нулевая. Из таблицы элементов, указанных в формулировке основной теоремы, непосредственно видно, что существует элемент $2T$ вида $2k_2 + k_1\mathrm{CP}_2 \in N_2$, который при гомоморфизме $\tilde{d}_1$ также переходит в $\tilde{d}_1(2x)$ ($k_2 \in K_2$, $k_1 \in N_1$). Воспользовавшись следствием 2.1, получаем, что $x \in K_2$.

б) Пусть $x \in N_2 \otimes \mathbf{Z}_{(3)}$. Рассмотрим элемент $3x$. Рассуждая, как в случае а), воспользовавшись следствием 2.2, получаем, что $x \in K_3$.

§ 3. Приложения. Из вида спектральной последовательности Адамса — Новикова имеем

$$\mathrm{Ext}^{i,*}_{A^U}(\Omega_U, \Omega_U) \supset E^{i,*}_\infty \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Индуктивным образом определены инварианты:

$$q_i:\ \mathrm{Ker}\, q_{i-1} \to E^{i,*}_\infty \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$q_0:\ \pi^s_* \to E^{0,*}_\infty$$

(см. [9]). Таким образом, при $i = 0, 1, 2, 3$ инварианты q_i лежат в группе $\mathrm{Ext}_{AU}^{i,*}(\Omega_U, \Omega_U)$. Инвариант q_0 совпадает со степенью отображения; инвариант q_1 — обобщенный инвариант Хопфа, совпадающий с инвариантом Адамса e_{C} [5].

Пусть h_i — образующие группы $\mathrm{Ext}_{AU}^{1,2i}(\Omega_U, \Omega_U)$. Положим $h_i' = h_i$, если $i = 4k$, $i = 4k + 1$ при $i = 2$,

$$h_{4n+2}' = 2h_{4n+2}, \quad h_{4n+3}' = 0, \quad h_{2n+1}'' = h_{2n+1}, \quad h_{2^n\cdot l}'' = \\ = 2^{n+1}\cdot h_{2^n\cdot l}, \quad (l, 2) = 1.$$

Предложение 3.1. *Имеют место соотношения*

$$h_{4n+1}' \circ h_{4m+1}' = h_{4n+4m+1}' \circ h_1' \neq 0,$$

$$h_{4n+1}' \circ h_{4m+2}' = 0, \quad h_{4n}' \circ h_{4m}' = 0,$$

$$h_{4n+1}' \circ h_{4m}' = h_{4n+4m}' \circ h_1' \neq 0,$$

$$h_{4n+2}' \circ h_{4m+2}' = 0, \quad h_{4m+2}' \circ h_{4n}' = 0.$$

Предложение 3.2. *Пусть δ_{2^n} и ε_{3^n} — ненулевые элементы в группах $\mathrm{Ext}_{AU}^{2,2^{n+1}}(\Omega_U, \Omega_U)$ и $\mathrm{Ext}_{AU}^{2,4\cdot 3^n}(\Omega_U, \Omega_U)$ соответственно* (см. [8]), *$k_j \in \mathrm{Ext}_{AU}^{1,4j}(\Omega_U, \Omega_U)$ — ненулевой элемент третьего порядка. Тогда произведение Масси $A_{i,n} = \{h_i'', 2, \delta_{2^n}\}$ не содержит нулевых элементов, а произведение Масси $B_{j,n} = \{k_j, 3, \varepsilon_{3^n}\}$ не содержит нулевых элементов при $j < 3^{n-1}$. При $i < 2^{n-1}$ элементы $A_{i,n}$ не делятся на h_1, а при $i \geqslant 2^{n-1}$ соответствующие произведения Масси являются произведениями элементов h_1 и h_{2^n+i-1}.*

Предложение 3.3. *Если существуют элементы второго порядка в гомотопических группах сфер, имеющие ненулевой арф-инвариант, то элементы $A_{i,n}$ при $i < 2^{n-1}$, $i = 4h + \varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$ определяют неразложимые элементы в гомотопических группах сфер.*

В [14] доказано существование элементов второго порядка с ненулевым арф-инвариантом в группах π_{30}^S и π_{62}^S. Тогда предложение 3.3 позволяет получить новые результаты о гомотопических группах сфер.

С л е д с т в и е 3.1. *В группах* π_{30}^S, π_{32}^S, π_{38}^S, π_{40}^S, π_{62}^S, π_{64}^S, π_{70}^S, π_{72}^S, π_{78}^S, π_{80}^S, π_{86}^S, π_{88}^S *имеются неразложимые элементы, представимые в виде скобок. Тогда* $\{h, 2, \delta_{2^n}\}$.

Автор благодарит В. М. Бухштабера за постановку задачи, постоянное внимание и обсуждение настоящей работы.

Центральный научно-исследовательский институт комплексной автоматизации

Поступило 2.II.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х и р ц е б р у х Ф., Комплексные многообразия, Международный матем. конгресс в Эдинбурге 1958 г., Обзорные доклады, М., Физматгиз, 1962, 138—157.
[2] S t o n g R. E., Relations among characteristic numbers. I, Topology, 4 (1965), 267—281; II, Topology, 5 (1966), 133—148.
[3] H a t t o r i A., Integral characteristic numbers for weakly almost complex monifolds, Topology, 5 (1966), 259—280.
[4] К о н н е р К., Ф л о й д Э., О соотношении теории бордизмов и K-теории, Дополнение к кн. К о н н е р П., Ф л о й д Э., Гладкие периодические отображения, М., «Мир», 1969, 231—333.
[5] С т о н г Р., Заметки по теории кобордизмов, М., «Мир», 1973.
[6] Б у х ш т а б е р В. М., Характер Чженя — Дольда в кобордизмах. I, Матем. сб., 83 (1970), 575—595.
[7] П а н о в Н. В., Характеристические числа в U-теории. Изв. АН СССР, Сер. матем., 35, № 6 (1971), 1356—1376.
[8] Б у х ш т а б е р В. М., Ш о к у р о в А. В., Алгебра Ландвебера — Новикова и формальные векторные поля на прямой, Функц. анализ, 12, № 3 (1978), 1 — 11.
[9] Н о в и к о в С. П., Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов, Изв. АН СССР, Сер. матем., 31, № 4 (1967), 855—951.
[10] L a n d w e b e r P. S., Cobordism operations and Hopf algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 27, № 1 (1967), 94—110.
[11] Н о в и к о в С. П., Гомотопические свойства комплексов Тома, Матем. сб., 57 (1962), 406—442.
[12] H a z e w i n k e l M., Constructing formal groups. I. Over $Z_{(p)}$-algebras, Report of the Econometric Institute № 7119, Netherlands School of Economics, 1971.
[13] L i u l e v i c i u s A., On the algebra BP_*BP, Lect. Notes Math., 249, Berlin, Springer-Verlag, 1972, 47—53.
[14] M i l g r a m R. J., Symmetries and operations in homotopy theory, Proc. Symposia Pure Math., Algebraic Topology, 22 (1971), 203—211.