А. Ю. Болдин, Р. А. Шарипов, О решении уравнений нормальности в размерности $n \geq 3$, *Алгебра и анализ*, 1998, том 10, выпуск 4, 37–61

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 4

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НОРМАЛЬНОСТИ В РАЗМЕРНОСТИ $n \geqslant 3$

© А. Ю. Болдин, Р. А. Шарипов

Рассмотрены уравнения нормальности для ньютоновских динамических систем на римановых многообразиях размерности $n \geqslant 3$. Локально решение таких уравнений сведено к рассмотрению трех возможных случаев: в двух из них решение выписывается явно, а в последнем — уравнения нормальности сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Построены некоторые новые примеры явных решений уравнений нормальности.

§1. Введение

Понятие динамических систем, допускающих нормальный сдвиг, было введено в работах [1, 2]. Это системы, описывающие движение материальной точки в силу второго закона Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ и удовлетворяющие определенному геометрическому условию, в силу которого их траектории могут осуществлять нормальный сдвиг гиперповерхностей. Своим возникновением идея исследования таких систем обязана серии работ [3–6], в которых обобщались классические геометрические конструкции Бьянки, Ли, Бэклунда и Дарбу, выполняющие преобразования определенных классов псевдосферических поверхностей геодезическими потоками. При изучении работ [3–6] возникла мысль заменить геодезические потоки ньютоновскими динамическими системами, что сразу же расширило круг возможных постановок задач. Одна из таких постановок связана с нормальной трансформацией гиперповерхностей вдоль траекторий динамической системы $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. Условие, состоящее в том, что система

Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского фонда INTAS (проект № 93-47, руководитель С. И. Пинчук) и РФФИ (проект № 96-01-00176, руководитель Я. Т. Султанаев). Работа также поддержана грантом АН республики Башкортостан (руководитель темы Н. М. Асадуллин).

с силовым полем $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ способна осуществить нормальный сдвиг любой наперед заданной гиперповерхности, получило название *условия нормальности.* В работах [1, 2] геометрическое условие нормальности удалось записать в виде системы дифференциальных уравнений на силовое поле $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ динамической системы. Эти уравнения были названы *уравнениями нормальности.*

В работах [7, 8] уравнения нормальности были обобщены на случай ньютоновских динамических систем на произвольных римановых многообразиях. При этом их удалось записать в координатно-ковариантном тензорном виде, что открывает возможность привлечения методов дифференциальной геометрии для исследования этих уравнений.

Широкий подкласс динамических систем, допускающих нормальный сдвиг, составляют геодезические потоки метрик, конформно эквивалентных исходной метрике риманова многообразия. Вопрос о замене траекторий динамической системы траекториями таких геодезических потоков получил название *проблемы метризуемости.* Проблема метризуемости рассмотрена в работах [9, 10]. В этих работах получен явный вид силового поля всех метризуемых динамических систем, допускающих нормальный сдвиг.

Симметрийный анализ уравнений нормальности был начат в работе [11]. Здесь найдены все точечные симметрии этих уравнений в двумерном плоском пространственно однородном случае и построены автомодельные (инвариантные) решения для такого случая. При этом найдены примеры нетривиальных (неметризуемых) динамических систем, допускающих нормальный сдвиг в размерности $n = 2$. Важность поиска примеров таких систем, особенно в размерности $n \geqslant 3$, была указана авторам академиком А. Т. Фоменко. Некоторые простейшие примеры неметризуемых систем построены в [12], однако систематический поиск таких систем еще не предпринимался.

Цель настоящей работы — полный локальный анализ уравнений нормальности в размерности $n \geqslant 3$ и построение новых неметризуемых динамических систем, допускающих нормальный сдвиг.

§2. Уравнения нормальности

Пусть M — риманово многообразие размерности n с метрическим тензором g_{ij}. Обозначим через $x^1, \dots, x^n$ локальные координаты точек в некоторой карте на M, а через $v^1, \dots, v^n$ — координаты касательных векторов в этих точках. Уравнения ньютоновской динамической системы, описывающей движение материальной точки единичной массы $m = 1$, имеют вид

$$\dot{x}^i = v^i, \quad \nabla_t v^i = F^i(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \tag{2.1}$$

Уравнения нормальности для силового поля $\mathbf{F}$ динамической системы (2.1) записываются в виде двух систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (v^{-1}F_i + \tilde{\nabla}_i(F^k N_k))P^i_q = 0, \\ (\nabla_i F_k + \nabla_k F_i - 2v^{-2}F_i F_k)N^k P^i_q \\ \quad + v^{-1}(\tilde{\nabla}_k F_i F^k - \tilde{\nabla}_k F^r N^k N_r F_i)P^i_q = 0; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} (P^k_i P^q_j - P^q_i P^k_j)\Big(N^r \dfrac{\tilde{\nabla}_r F_k}{v} F_q - \nabla_q F_k\Big) = 0, \\ P^k_i \tilde{\nabla}_k F^q P^j_q = \dfrac{P^k_r \tilde{\nabla}_k F^q P^r_q}{n-1} P^j_i. \end{cases} \tag{2.3}$$

Системы уравнений (2.2) и (2.3) были выведены раздельно в работах [7] и [8]. Первая система получила название *уравнений слабой нормальности*, а вторая — *дополнительных уравнений нормальности*. Уравнения нормальности (2.2) и (2.3) представляют собой дифференциальные уравнения в ковариантных производных ∇ и $\tilde{\nabla}$ в расширенной алгебре тензорных полей. Тензорное поле из расширенной алгебры отличается от обычного тензорного поля на M удвоенным набором аргументов: оно зависит как от точки $\mathbf{x} \in M$, так и от касательного вектора $\mathbf{v}$ в этой точке. Поэтому на расширенной алгебре определены две ковариантные производные: *пространственный градиент* ∇ и *скоростной градиент* $\tilde{\nabla}$. Для тензорного поля $\mathbf{U}$ типа (r, s) вычисление компонент ковариантной производной $\tilde{\nabla}$ сводится просто к дифференцированию по компонентам скорости:

$$\tilde{\nabla}_i U^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial U^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}}{\partial v^i}. \tag{2.4}$$

Формула (2.4) не содержит компонент связности Γ^k_{ij}. Поэтому ковариантная производная $\tilde{\nabla}$ определена даже на многообразиях, не снабженных метрикой.

Компоненты ковариантной производной ∇ вычисляются несколько сложнее:

$$\nabla_i U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \frac{\partial U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}}{\partial x^i} + \sum_{m=1}^{r} \sum_{q_m=1}^{n} U^{i_1\ldots q_m\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \Gamma^{i_m}_{i q_m}$$
$$- \sum_{m=1}^{s} \sum_{q_m=1}^{n} U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots q_m\ldots j_s} \Gamma^{q_m}_{i j_m} - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \frac{\partial U^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}}{\partial v^p} \Gamma^p_{iq} v^q. \tag{2.5}$$

Уравнения (2.2) и (2.3) — это уравнения относительно вектора силы $\mathbf{F}$. Но, кроме компонент вектора силы, в них входят компоненты тензорных полей $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$, а также скалярное поле v. Это заданные параметры в уравнениях нормальности. Поле v — это поле модуля скорости $v = |\mathbf{v}|$, где $|\mathbf{v}|^2 = g_{ij} v^i v^j = v_i v^i$. Вектор $\mathbf{N}$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{v}$, а тензор $\mathbf{P}$ — ортогональный проектор на гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{v}$:

$$N^i = v^i / v, \qquad P^i_j = \delta^i_j - N^i N_j. \tag{2.6}$$

Обе ковариантные производные ∇ и $\tilde{\nabla}$ метрического тензора равны нулю. Это делает вычисления в расширенной алгебре аналогичными вычислениям в обычной алгебре тензорных полей на M. Ковариантные производные явно заданных полей v, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$ можно вычислить из формул (2.4) и (2.5).

§3. Скалярная подстановка

Рассмотрим первое из уравнений нормальности (2.2). Введем обозначение $A = F^k N_k$. Скалярное поле A из расширенной алгебры имеет смысл ортогональной проекции силы $\mathbf{F}$ на направление вектора скорости. Тогда полный вектор силы можно записать в виде суммы двух компонент: $\mathbf{F} = A\mathbf{N} + \tilde{\mathbf{F}}$. Подставив это разложение в первое уравнение (2.2), находим

$$v^{-1} \tilde{F}_i P^i_q + \tilde{\nabla}_i A P^i_q = 0. \tag{3.1}$$

Здесь мы использовали очевидное равенство $P^i_q N_i = 0$, вытекающее из (2.6) и единичности вектора $\mathbf{N}$. Из ортогональности векторов $\tilde{\mathbf{F}}$ и $\mathbf{N}$ вытекает $\tilde{F}_i P^i_q = \tilde{F}_q$. Соединяя это с (3.1), получаем

$$F_q = A N_q - v P^i_q \tilde{\nabla}_i A. \tag{3.2}$$

Из (3.2) видим, что все компоненты силового поля определяются заданием одного скалярного поля A — проекции силы на направление вектора скорости.

Подставим (3.2) во второе уравнение слабой нормальности (2.2). Это приводит к необходимости выполнить довольно громоздкие, но несложные выкладки. В результате этих выкладок получаем

$$P_q^i(\nabla_i A + vP^{ks}\tilde{\nabla}_s A\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_i A - vN^k\nabla_k\tilde{\nabla}_i A - N^k A\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_i A) = 0. \tag{3.3}$$

При вычислении (3.3) мы воспользовались следующими соотношениями:

$$\nabla_i v = 0, \qquad \tilde{\nabla}_i v = N_i, \tag{3.4}$$
$$\nabla_i N^k = 0, \qquad \tilde{\nabla}_i N^k = v^{-1}P_i^k, \tag{3.5}$$
$$\nabla_i P_q^k = 0, \qquad \tilde{\nabla}_i P_q^k = -v^{-1}(P_{iq}N^k + P_i^k N_q), \tag{3.6}$$

которые выводятся непосредственным вычислением при учете соотношений (2.4), (2.5) и (2.6).

Теперь подставим (3.2) в дополнительные уравнения нормальности (2.3) и вновь воспользуемся соотношениями (3.4), (3.5) и (3.6) в сочетании с $P_q^i N_i = 0$ и $P_q^i P_k^q = P_k^i$. Из первого уравнения (2.3) выводим

$$P_i^k P_j^q(N^r\tilde{\nabla}_r\tilde{\nabla}_k A\tilde{\nabla}_q A + \nabla_q\tilde{\nabla}_k A - N^r\tilde{\nabla}_r\tilde{\nabla}_q A\tilde{\nabla}_k A - \nabla_k\tilde{\nabla}_q A) = 0. \tag{3.7}$$

Второе из дополнительных уравнений нормальности после подстановки (3.2) преобразуется к виду:

$$P_i^k\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_q AP^{qj} = \frac{P^{kq}\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_q A}{n-1}P_i^j, \tag{3.8}$$

где число n в знаменателе дроби — это размерность многообразия M. Уравнение (3.8) удобно переписать в следующей форме:

$$P_i^k\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_q AP^{qj} = \lambda P_i^j, \tag{3.9}$$

где $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ — некоторая функция на касательном расслоении TM. Именно в таком виде это уравнение было первоначально выведено в работе [8].

§4. Послойные сферические координаты

Уравнения (3.3), (3.7) и (3.9) составляют полный список уравнений нормальности после скалярной подстановки (3.2). Последнее из этих уравнений имеет важное отличие от двух предыдущих. Расписав явно ковариантные производные $\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_q A$, из (3.9) получаем

$$P_i^k P_j^q \frac{\partial^2 A}{\partial v^k \partial v^q} = \lambda P_{ij}. \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1) содержат только производные по координатам $v^1, \ldots, v^n$ в слое касательного расслоения TM. Слой — это n-мерное линейное векторное пространство с метрикой g_{ij}, которая является константной в пределах слоя.

Фиксируем некоторую точку P на многообразии M. Условия $v = |\mathbf{v}| = \mathrm{const}$ разбивают слой TM над P в объединение непересекающихся сфер S^{n-1} радиуса $r = v$. Пусть $u^1, \ldots, u^{n-1}$ — локальные координаты на единичной сфере S^{n-1} и пусть $\mathbf{v} = \mathbf{N}(u^1, \ldots, u^{n-1})$ — параметрическое уравнение единичной сферы в слое TM над точкой P. Тогда соотношения

$$\begin{aligned} v^1 &= u^n \cdot N^1(u^1, \ldots, u^{n-1}), \\ &\;\vdots \\ v^n &= u^n \cdot N^n(u^1, \ldots, u^{n-1}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

определяют переход в сферические координаты, где $u^n = |\mathbf{v}|$. Выбор координат (4.2) в каждом слое TM определяет *послойные сферические координаты* на касательном расслоении TM. Зависимость выбора таких координат от точки P, т. е. от $x^1, \ldots, x^n$, может быть сделана гладкой. Однако для анализа уравнений (4.1) это не играет никакой роли, поэтому мы ограничимся соотношениями (4.2), считая точку P фиксированной.

Преобразуем уравнения (4.1), сделав замену переменных (4.2). Метрика g_{ij} является константной в пределах слоя, а производные $\tilde{\nabla}_i = \partial/\partial v^i$ — это ковариантные производные в метрике g_{ij}. Уравнения (4.1) имеют тензорный характер, поэтому достаточно пересчитать компоненты тензоров P_i^k, P_j^q и g_{ij} и производные $\tilde{\nabla}_i$ к новым координатам.

Заметим, что $\partial v^i/\partial u^n = N^i$ в силу (4.2). Поэтому вектор $\mathbf{N}$ — это n-й координатный вектор в сферических координатах: $\mathbf{N} = (0, \dots, 0, 1)$. Для компонент оператора проектирования $\mathbf{P}$ в сферических координатах это дает:

$$P_i^k = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad P_{ij} = \begin{Vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-11} & \dots & g_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.3}$$

В силу сказанного уравнения (4.1) в сферических координатах имеет исходный вид (3.9). Однако компоненты связности ϑ_{ij}^k в сферических координатах $u^1, \dots, u^n$ уже отличны от нуля. При i, j, k в диапазоне $1 \leqslant i, j, k \leqslant n-1$ величины ϑ_{ij}^k совпадают с компонентами метрической связности на сферах $|\mathbf{v}| = \mathrm{const}$. Остальные компоненты вычисляются явно:

$$\begin{gathered} \vartheta_{nn}^n = 0, \quad \vartheta_{in}^n = \vartheta_{ni}^n = 0, \quad \vartheta_{nn}^i = 0, \\ \vartheta_{ij}^n = -\frac{g_{ij}}{v}, \quad \vartheta_{jn}^i = \vartheta_{nj}^i = \frac{\delta_j^i}{v}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

В силу строения матриц (4.3) при $i = n$ или $j = n$ уравнения (3.9) тождественно выполнены. Учет (4.4) позволяет записать оставшиеся нетривиальные уравнения как уравнения в ковариантных производных $\overline{\nabla}$ на сферах $|\mathbf{v}| = \mathrm{const}$:

$$\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j A = \left(\lambda + \frac{1}{v}\frac{\partial A}{\partial u^n}\right) g_{ij}. \tag{4.5}$$

Поскольку функция λ играет роль неопределенного параметра в (4.5), удобно ввести другой неопределенный параметр μ и записать (4.5) проще:

$$\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j A = \mu g_{ij}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим дифференциальное следствие из уравнения (4.6). Запишем его в форме $\overline{\nabla}_j \overline{\nabla}_k A = \mu g_{jk}$, применим к обеим частям оператор $\overline{\nabla}_i$ и проальтернируем полученное уравнение по индексам i и j:

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j - \overline{\nabla}_j \overline{\nabla}_i) \overline{\nabla}_k A &= \overline{\nabla}_i \mu g_{jk} - \overline{\nabla}_j \mu g_{ik}, \\ -\bar{R}_{kij}^s \overline{\nabla}_s A &= \overline{\nabla}_i \mu g_{jk} - \overline{\nabla}_j \mu g_{ik}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь $R^s_{kij} = v^{-2}(\delta^s_i g_{ik} - \delta^s_j g_{ik})$ — тензор кривизны сферы S^{n-1}, заданной уравнением $v = |\mathbf{v}| = \mathrm{const}$.

Свернем полученное выше уравнение (4.7) с метрикой g^{jk} по индексам j и k. Это приводит к следующему соотношению

$$\frac{n-2}{v^2}\overline{\nabla}_i A = (n-2)\overline{\nabla}_i \mu.$$

Заметим, что дополнительные уравнения нормальности (2.3) возникают лишь в размерности $n \geqslant 3$. Поэтому в полученных уравнениях $n - 2 \neq 0$. Отсюда

$$-\overline{\nabla}_i A = v^2 \overline{\nabla}_i \mu. \tag{4.8}$$

Подставим полученные в (4.8) выражения для $\nabla_i A$ в уравнения (4.6). Это приводит к дифференциальным уравнениям на функциональный параметр μ:

$$\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j \mu = -v^{-2} g_{ij} \mu. \tag{4.9}$$

Теорема 4.1. *Общее решение системы уравнений* (4.9) *на сфере* $|\mathbf{v}| = \mathrm{const}$ *имеет вид*

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} m_i N^i(u^1, \ldots, u^n), \tag{4.10}$$

где $m_1, \ldots, m_n$ *— некоторые произвольные константы, а* $N^1, \ldots, N^n$ *— компоненты вектора* $\mathbf{N}$.

Доказательство. Уравнения (4.9) и выражение (4.10) имеют тензорно-ковариантный характер. Поэтому достаточно проверить утверждение теоремы для какого-то одного конкретного выбора координат $u^1, \ldots, u^n$ на сфере $|\mathbf{v}| = \mathrm{const}$. Конкретизируем замену переменных (4.2), считая метрику g_{ij} в слое TM над данной фиксированной точкой P единичной $g_{ij} = \delta_{ij}$ в координатах $v^1, \ldots, v^n$:

$$\begin{aligned}
v^1 &= v \sin(u_{n-1}) \sin(u_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \sin(u_3) \sin(u_2) \sin(u_1),\\
v^2 &= v \sin(u_{n-1}) \sin(u_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \sin(u_3) \sin(u_2) \cos(u_1),\\
v^3 &= v \sin(u_{n-1}) \sin(u_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \sin(u_3) \cos(u_2),\\
&\;\vdots\\
v^{n-1} &= v \sin(u_{n-1}) \cos(u_{n-2}),\\
v^n &= v \cos(u_{n-1}).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

В сферических координатах $u^1, \dots, u^n$, определенных соотношениями (4.11), метрика g_{ij} диагональна. При этом $g_{ii} > 0$, а величины $H_i = \sqrt{q_{ii}}$ называются *коэффициентами Ламе*:

$$\begin{aligned} H_1 &= v \sin(u_{n-1}) \sin(u_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \sin(u_3) \sin(u_2), \\ H_2 &= v \sin(u_{n-1}) \sin(u_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \sin(u_3), \\ &\vdots \\ H_{n-2} &= v \sin(u_{n-1}), \\ H_{n-1} &= v, \\ H_n &= 1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Компоненты метрической связности ϑ^k_{ij} определяются коэффициентами Ламе (4.12) по хорошо известной формуле:

$$\vartheta^k_{ij} = \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial u^j} \delta_{ik} + \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial u^i} \delta_{jk} - \frac{H_i}{(H_k)^2} \frac{\partial H_i}{\partial u^k} \delta_{ij}.$$

Большинство из компонент связности ϑ^k_{ij} оказываются нулевыми. Вычисление остальных позволяет записать (4.9) явно. При этом получаются уравнения двух типов. Уравнения первого типа отвечают случаю $i < j \leqslant n - 1$ в (4.9):

$$\mu_{ij} = \frac{\cos(u_j)}{\sin(u_j)} \mu_i. \tag{4.13}$$

Здесь через μ_i и μ_{ij} обозначены частные производные μ первого и второго порядков по соответствующим переменным u^i и u^j. Уравнения второго типа отвечают случаю $i = j \leqslant n - 1$:

$$\mu_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n-1} \frac{\cos(u^k)}{\sin(u^k)} \left(\prod_{p=i+1}^{k} \sin^2(u^p) \right) \mu_k = - \left(\prod_{p=i+1}^{n-1} \sin^2(u^p) \right) \mu. \tag{4.14}$$

Отметим, что при $i = n - 1$ уравнение (4.14) редуцируется к виду $\mu_{ii} = -\mu$.

Дальнейшее доказательство теоремы произведем индукцией по числу n. В качестве базы индукции возьмем случай $n = 2$. В исходной геометрической постановке задачи в случае $n = 2$ дополнительные уравнения нормальности (2.3) отсутствуют. Значит, отсутствуют и уравнения (4.6). Соотношение (4.8), приводящее (4.6) к (4.9), также выведено в предположении $n > 2$. Однако с точки зрения уже полученных уравнений (4.9) их экстраполяция на случай $n = 2$ ничему не противоречит.

При $n = 2$ из системы уравнений (4.13) и (4.14) остается ровно одно уравнение: $\mu_{11} = -\mu$. Общее решение этого уравнения:

$$\mu(u^1) = m_1 \sin(u^1) + m_2 \cos(u^1), \tag{4.15}$$

где m_1 и m_2 — константы. Соотношения (4.11) в случае $n = 2$ имеют вид

$$v^1 = vN^1 = v\sin(u_1), \qquad v^2 = vN^2 = v\cos(u_1). \tag{4.16}$$

Сравнение (4.15) с (4.10) и учет (4.16) показывают, что утверждение теоремы 4.1 для случая $n = 2$ выполнено.

Пусть теперь $n > 2$. Рассмотрим последнее из уравнений (4.14) с номером $i = n - 1$. Оно имеет вид $\mu_{ii} = -\mu$. Отсюда

$$\mu = \widetilde{\mu}\sin(u^{n-1}) + m_n \cos(u^{n-1}), \tag{4.17}$$

где $\widetilde{\mu}$ и m_n — параметры, которые, вообще говоря, зависят от $u^1, \ldots, u^{n-2}$. Подставим (4.17) в уравнения (4.13), полагая в них $j = n - 1$. При этом вклад от первого слагаемого в (4.17) сокращается, а для m_n получаются соотношения

$$\frac{\partial m_n}{\partial u^i} = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \ldots, n-2.$$

Отсюда $m_n = \mathrm{const}$. Учет этого обстоятельства при подстановке (4.17) в оставшиеся уравнения (4.13) и (4.14) приводит к уравнениям на параметр $\widetilde{\mu}$, которые имеют точно такой же вид (4.13) и (4.14), но с заменой n на $n - 1$. Значит, можно применить предположение индукции, что для $\widetilde{\mu}$ дает

$$\widetilde{\mu} = m_1\left(\prod_{p=1}^{n-2}\sin(u^p)\right) + \sum_{k=2}^{n-1} m_k \left(\prod_{p=k}^{n-2}\sin(u^p)\right)\cos(u^{p-1}), \tag{4.18}$$

где $m_1, \ldots, m_{n-1}$ — некоторые константы. Теперь остается подставить (4.18) в (4.17) и сравнить каждое из слагаемых в полученной сумме с (4.11). Из такого сравнения видим, что (4.18) и (4.10) совпадают. Теорема доказана.

Вернемся теперь к соотношению (4.8). Запишем это соотношение в форме $\nabla_i(A + v^2\mu) = 0$. Тогда из него получаем

$$A + v^2\mu = \text{const}\,. \tag{4.19}$$

Отметим, что константность (4.19) и параметров m_i в (4.10) имеет место лишь в пределах отдельных сфер $|\mathbf{v}| = \text{const}$. Поэтому, обозначив $b_i = |\mathbf{v}|m_i$, можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Скалярное поле $A(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ из расширенной алгебры тензорных полей, удовлетворяющее уравнениям нормальности* (3.9), *имеет вид*

$$A = a(\mathbf{x}, |\mathbf{v}|) + |\mathbf{v}| b_i(\mathbf{x}, |\mathbf{v}|) N^i, \tag{4.20}$$

где скалярное поле a и ковекторное поле $\mathbf{b}$ из расширенной алгебры зависят лишь от модуля скорости $v = |\mathbf{v}|$ в слоях касательного расслоения TM.

§5. Уточнение скалярной подстановки

Формула (4.20) полностью определяет зависимость функции A от скорости $\mathbf{v}$. Зависимость же A от координат следует уточнить путем подстановки (4.20) в уравнения (3.3) и (3.7). Обозначим через a' производную $a' = \partial a/\partial v$. Аналогичным образом обозначим через a'' вторую производную a по v. Нетрудно проверить, что a' и a'' — это скалярные поля из расширенной алгебры тензорных полей, зависящие только от модуля скорости. При этом

$$\tilde{\nabla}_i a = a' N_i, \qquad \tilde{\nabla}_i a' = a'' N_i. \tag{5.1}$$

Производные $b'_k = \partial b_k/\partial v$ и $b''_k = \partial b'_k/\partial v$ определяют два ковекторных поля $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{b}''$ из расширенной алгебры тензорных полей. Эти поля также зависят лишь от модуля скорости и для них имеют место соотношения, аналогичные (5.1):

$$\tilde{\nabla}_i b_k = b'_k N_i, \qquad \tilde{\nabla}_i b'_k = b''_k N_i. \tag{5.2}$$

Учет (5.1) и (5.2) при подстановке (4.20) в уравнения нормальности (3.3) дает

$$P^i_q(\nabla_i a + a' b_i - b'_i a + vN^r \nabla_i b_r - vN^r \nabla_r b_i) = 0. \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) содержит ковариантные производные вида $\nabla_i a$ и $\nabla_i b_r$. Формула (2.5) записана в переменных $x^1, \ldots, x^n$, $v^1, \ldots, v^n$. Для полей a и $\mathbf{b}$ естественными переменными являются $x^1, \ldots, x^n$ и v, где $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{g_{kq} v^k v^q}$. А в переменных $x^1, \ldots, x^n$, $v^1, \ldots, v^n$ величина модуля скорости v получает зависимость от $x^1, \ldots, x^n$ по причине зависимости g_{kq} от $x^1, \ldots, x^n$. Поэтому

$$\nabla_i a = \frac{\partial a}{\partial x^i} + \frac{a'}{2v} \frac{\partial g_{kq}}{dx^i} v^k v^q - \Gamma^k_{iq} \frac{a'}{v} v_k v^q.$$

В силу согласованности метрики и связности последние два слагаемых в этом выражении сокращаются. Аналогичное сокращение происходит и при вычислении $\nabla_i b_r$. По этой причине ковариантные производные от полей a и $\mathbf{b}$ вычисляются так, как если бы они вовсе не содержали зависимости от $\mathbf{v}$:

$$\nabla_i a = \partial a / \partial x^i, \qquad \nabla_i b_r = \partial b_r / \partial x^i - \Gamma^k_{ir} b_k. \tag{5.4}$$

В силу (5.4) ковариантные производные $\nabla_i a$ и $\nabla_i b_r$ зависят только от модуля вектора скорости.

Возвращаясь к уравнению (5.4), заменим проектор P^i_q в нем явным выражением $P^i_q = \delta^i_q - N^i N_q$ из формулы (2.6):

$$\nabla_q a + a' b_q - b'_q a + v(\nabla_q b_r - \nabla_r b_q) N^r - N_q(\nabla_r a + a' b_r - b'_r a) N^r = 0. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.5) содержит три типа слагаемых. Первые три слагаемых зависят только от модуля скорости, оставшиеся зависят и от $|\mathbf{v}|$, и от направления вектора скорости, которое задается единичным вектором $\mathbf{N}$. При этом одно из таких слагаемых линейно по $\mathbf{N}$, а второе — квадратично по $\mathbf{N}$. Замена $\mathbf{N}$ на $-\mathbf{N}$ не меняет модуля вектора скорости. Эта замена меняет знак линейного по N слагаемого, не изменяя остальных слагаемых в уравнении (5.4). Поэтому линейное по N слагаемое равно нулю тождественно. Отсюда

$$\nabla_q b_r - \nabla_r b_q = 0. \tag{5.6}$$

Квадратичное по N слагаемое содержит свертку вектора N и ковектора с компонентами $\nabla_r a + a' b_r - b'_r a$, которые зависят только от $|\mathbf{v}|$. При неизменном модуле вектора скорости вектор N можно сделать ортогональным этому ковектору. При этом квадратичное по N слагаемое в (5.6) зануляется:

$$\nabla_q a + a' b_q - b'_q a = 0. \tag{5.7}$$

Вывод: уравнение нормальности (3.3) для поля A вида (4.20) сводится к уравнениям (5.6) и (5.7) относительно полей a и $\mathfrak{b}$.

Подстановка (4.20) в уравнение (3.7) ничего нового не добавляет. Она приводит к уравнению $P_i^r P_j^q \left(\nabla_q b_r - \nabla_r b_q\right) = 0$, которое является следствием (5.6). Поэтому уравнения (5.6) и (5.7) остаются в качестве основных и единственных уравнений нормальности для полей a и $\mathfrak{b}$. Учет соотношений (5.4) и учет симметричности компонент связности Γ_{ij}^k позволяют привести (5.6) к виду

$$\frac{\partial b_r}{\partial x^i} - \frac{\partial b_i}{\partial x^r} = 0. \tag{5.8}$$

Ковекторное поле $\mathfrak{b}(\mathbf{x}, v)$ из расширенной алгебры тензорных полей, зависящее только от модуля вектора скорости, можно трактовать как однопараметрическое семейство 1-форм на многообразии: $\mathfrak{b} = b_i dx^i$, а v — параметр. Тогда уравнение (5.8) — это условие замкнутости каждой из форм такого семейства.

Пример 1. Пусть $a \equiv 0$. Тогда уравнение (5.7) выполнено при любом выборе $\mathfrak{b}$. Поэтому с любым однопараметрическим семейством замкнутых 1-форм на римановом многообразии M связана некоторая ньютоновская динамическая система, допускающая нормальный сдвиг. Силовое поле такой динамической системы имеет следующий вид:

$$F_q = |\mathbf{v}| b_i(\mathbf{x}, |\mathbf{v}|)(2N^i N_q - \delta_q^i). \tag{5.9}$$

Отметим, что простейшие примеры динамических систем, допускающих нормальный сдвиг, из работ [1, 2] и [8] являются разновидностями систем (5.9).

Пример 2. Пусть $\mathbf{b} \equiv 0$. Тогда уравнение (5.7) принимает вид $\nabla_q a = 0$. Оно означает, что функция a не зависит от точки многообразия M, т. е. $a = a(v)$. Для силового поля соответствующей динамической системы это дает

$$F_q = a'(|\mathbf{v}|)N_q. \tag{5.10}$$

Это тривиальный класс динамических систем, допускающих нормальный сдвиг. Траектории систем (5.10) совпадают с геодезическими на многообразии M.

Теперь рассмотрим случай $a \not\equiv 0$ и $\mathbf{b} \not\equiv 0$. Уравнение (5.7) в этом случае нетривиально. Запишем его в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^q} + b_q \frac{\partial}{\partial v}\right) \ln |a| = b'_q. \tag{5.11}$$

Положим $\widehat{X}_q = \partial/\partial x^q + b_q \partial/\partial v$ и вычислим коммутатор двух таких дифференциальных операторов с учетом соотношения (5.8):

$$[\widehat{X}_k, \widehat{X}_q] = (b_k b'_q - b_q b'_k)\partial/\partial v. \tag{5.12}$$

Уравнения (5.11) являются переопределенными. При учете (5.8) и (5.12) из них выводится следующее дифференциальное следствие:

$$b_k\left(b''_q - \frac{a'}{a} b'_q\right) = b_q\left(b''_k - \frac{a'}{a} b'_k\right). \tag{5.13}$$

Лемма 5.1. *Компоненты двух ковекторов* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *удовлетворяют соотношениям* $b_k c_q = b_q c_k$ *тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. Если один из ковекторов равен нулю, утверждение леммы тривиально. Положим $\mathbf{b} \neq 0$. По крайней мере одна из компонент ковектора $\mathbf{b}$ отлична от нуля. Положим для определенности $b_1 \neq 0$. Тогда из $b_k c_q = b_q c_k$ выводим $c_k = \lambda b_q$, где $\lambda = c_1/b_1$. Значит, $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{b}$, что и доказывает лемму.

Применим лемму 5.1 к уравнению (5.13) там, где $\mathfrak{b} \neq 0$. Тогда в качестве следствия из (5.13) получаем следующее уравнение:

$$b_q'' - \frac{a'}{a} b_q' = \lambda b_q, \tag{5.14}$$

где λ — некоторый скаляр. Продифференцируем уравнение (5.11) по v и запишем полученный результат в виде

$$b_q'' - \frac{a'}{a} b_q' = \frac{\partial^2 \ln|a|}{\partial v^2} b_q + \frac{\partial^2 \ln|a|}{\partial v \partial x^q}. \tag{5.15}$$

Сравнение (5.14) и (5.15) приводит к уравнению, которое также следует рассматривать как дифференциальное следствие уравнений (5.7) и (5.9):

$$\frac{\partial}{\partial x^q}\left(\frac{a'}{a}\right) = \mu b_q,$$

где скаляр μ получается из λ вычитанием второй логарифмической производной функции a по v.

Для дальнейшего анализа полученных уравнений (5.15) заметим, что уравнения (5.8) локально разрешимы. Всякое поле $\mathfrak{b}$, удовлетворяющее уравнениям (5.8), определяется некоторым скалярным полем β из расширенной алгебры, зависящим лишь от модуля вектора скорости:

$$b_r = \nabla_r \beta = \partial\beta / \partial x^r. \tag{5.16}$$

Подстановка (5.16) в уравнение (5.15) преобразует это уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial x^q}\left(\frac{a'}{a}\right) = \mu \frac{\partial \beta}{\partial x^q}. \tag{5.17}$$

Лемма 5.2. *Если пространственные градиенты двух функций $\alpha(\mathrm{x}, v)$ и $\beta(\mathrm{x}, v)$ пропорциональны: $\partial\alpha/\partial x^q = \mu\partial\beta/\partial x^q$, то в некоторой окрестности любой из точек, в которых градиент функции β отличен от нуля, имеется представление $\alpha = F(\beta, v)$, где F — некоторая функция двух переменных.*

Доказательство. Величина v в лемме 5.2 играет роль параметра. Поэтому для доказательства леммы удобно v считать фиксированным $v = v_0 = \mathrm{const}$. Тогда при условии $\operatorname{grad}\beta \neq 0$ локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ на M можно выбрать так, что $x^1 = \beta(\mathrm{x}, v_0)$. В этом случае из пропорциональности градиентов α и β имеем

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x^2} = \cdots = \frac{\partial\alpha}{\partial x^2} = 0.$$

Значит, $\alpha = \alpha(x^1, v_0)$. Функциональная зависимость α от x^1 и v_0 в этих специально выбранных координатах и определяет нам функцию $F(\beta, v)$. Выбор таких координат можно сделать гладко зависящим от параметра v_0. Поэтому $F(\beta, v)$ — гладкая функция двух переменных, определяющая связь α и β в форме соотношения: $\alpha = F(\beta, v)$. •

Применим лемму 5.2 к уравнениям (5.17). Это определяет дифференциальное уравнение, связывающее a и β:

$$\frac{\partial \ln |a|}{\partial v} = F(\beta, v). \tag{5.18}$$

Подставим (5.18) в уравнение (5.11), заменив в нем логарифмическую производную a по v на $F(\beta, v)$. Это дает

$$\frac{\partial \ln |a|}{\partial x^q} + F(\beta, v)\frac{\partial\beta}{\partial x^q} = \frac{\partial^2\beta}{\partial x^q\partial v}. \tag{5.19}$$

Обозначим через $\Phi(\beta, v)$ первообразную функции $F(\beta, v)$ по β при фиксированном v. Иными словами, функция Φ связана с F соотношением:

$$F(\beta, v) = \frac{\partial\Phi(\beta, v)}{\partial\beta}, \tag{5.20}$$

которое определяет $\Phi(\beta, v)$ с точностью до слагаемого, зависящего только от v:

$$\Phi(\beta, v) \to \Phi(\beta, v) + \Psi(v). \tag{5.21}$$

После подстановки (5.20) в (5.19) учет $\beta = \beta(\mathrm{x}, v)$ позволяет переписать уравнение (5.19) в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^q}\left(\ln|a| + \Phi(\beta, v) - \frac{\partial\beta}{\partial v}\right) = 0. \tag{5.22}$$

В силу (5.22) выражение в скобках есть величина, зависящая лишь от v. Поэтому учет произвола (5.21) в выборе функции $\Phi(\beta, v)$ дает

$$\ln|a| = \frac{\partial\beta}{\partial v} - \Phi(\beta, v). \tag{5.23}$$

Подстановка (5.23) в уравнение (5.18) приводит к дифференциальному уравнению, которое при заданном $\Phi(\beta, v)$ определяет зависимость β от v:

$$\beta'' = \frac{\partial\Phi(\beta, v)}{\partial\beta}(\beta' + 1) + \frac{\partial\Phi(\beta, v)}{\partial v}. \tag{5.24}$$

Связь величин β и $\Phi(\beta, v)$ с силовым полем динамической системы содержит элемент произвола (см. (5.21)). Этот произвол определяет следующие калибровочные преобразования, не изменяющие вида уравнения (5.24):

$$\begin{aligned} &\beta \to \widetilde{\beta}(\mathrm{x}, v) = \beta(\mathrm{x}, v) + \psi(v), \\ &\Phi \to \widetilde{\Phi}(\widetilde{\beta}, v) = \Phi(\widetilde{\beta} - \psi(v), v) + \psi'(v). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Преобразования (5.25) не изменяют величины $\alpha = \ln|a|$ в (5.23). Уравнение (5.24) можно переписать в форме системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \beta' = \alpha + \Phi(\beta, v), \\ \alpha' = \dfrac{\partial\Phi(\beta, v)}{\partial\beta}. \end{cases} \tag{5.26}$$

Система уравнений (5.26) также выдерживает калибровочные преобразования (5.25), дополненные соотношением $\alpha \to \widetilde{\alpha}(v) = \alpha(v)$.

Уравнение (5.24), так же как и систему (5.26), в общем случае невозможно разрешить явно. Однако это уравнение позволяет точно охарактеризовать степень произвола в определении силового поля динамической системы, допускающей нормальный сдвиг. При фиксированном выборе функции $\Phi(\beta, v)$ общее решение уравнения (5.24) содержит две константы интегрирования f и h:

$$\beta(v) = B_\Phi(v, f, h). \tag{5.27}$$

Параметры f и h в (5.27) могут зависеть от пространственных координат $x^1, \ldots, x^n$. Поэтому это два скалярных поля на многообразии: $f = f(\mathbf{x})$ и $h = h(\mathbf{x})$. Соответствующее силовое поле динамической системы для (5.27) имеет следующие компоненты:

$$F_q = \frac{\exp(\partial B_\Phi / \partial v)}{\exp(\Phi(B_\Phi, v))} N_q + |\mathbf{v}| \left(\frac{\partial B_\Phi}{\partial f} \nabla_i f + \frac{\partial B_\Phi}{\partial h} \nabla_i h \right) (2N^i N_q - \delta^i_q). \tag{5.28}$$

Формула (5.28) гораздо менее эффективна, чем формулы (5.9) и (5.10) для рассмотренных ранее случаев. Она содержит функцию B_Φ, которая не является произвольной. Некоторые частные случаи, когда эту формулу можно эффективизировать, мы рассмотрим в следующем разделе.

Теорема 5.1. *Силовое поле* $\mathbf{F}$ *динамической системы, допускающей нормальный сдвиг, локально определяется одной из трех формул* (5.9), (5.10) *или* (5.28). *В последнем случае оно содержит три свободных параметра: два скалярных поля* $f(\mathbf{x})$ *и* $h(\mathbf{x})$ *и одну функцию двух переменных* $\Phi(\beta, v)$.

Пример 3. В работах [9] и [10] был изучен класс метризуемых динамических систем, допускающих нормальный сдвиг. Построим эти системы в рамках изложенной выше конструкции. Выберем функцию $\Phi(\beta, v)$ специального вида:

$$\Phi(\beta, v) = -\ln H(v e^{-\beta/v}), \tag{5.29}$$

где $H = H(\xi)$ — некоторая гладкая функция одной переменной. Подстановка (5.29) в (5.24) приводит к уравнению

$$\beta'' = \frac{H'}{H} e^{-\beta/v}(\beta' - \beta/v). \tag{5.30}$$

Нахождение общего решения уравнения (5.30) в явном виде проблематично. Однако одно решение легко угадывается:

$$\beta(\mathbf{x}, v) = v f(\mathbf{x}). \tag{5.31}$$

Здесь f — некоторое скалярное поле на многообразии M. Подстановка (5.29) и (5.30) в (5.23) определяет поле a. Поле b также легко вычисляется:

$$a = H(ve^{-f})e^{f}, \qquad b_q = v\nabla_q f. \tag{5.32}$$

Поля (5.32) определяют динамические системы с силовым полем вида:

$$F_q = -|\mathbf{v}|^2 \nabla_q f + 2\nabla_k f v^k v_i + N_q H(|\mathbf{v}|e^{-f})e^{f}.$$

Это в точности силовое поле метризуемых динамических систем из [10]. Оно содержит одно произвольное скалярное поле f и одну произвольную функцию H одной переменной. Ясно, что это не исчерпывает функционального произвола, декларированного теоремой 5.1, что еще раз подтверждает существование нетривиальных неметризуемых систем, допускающих нормальный сдвиг, в размерности $n \geqslant 3$.

§6. Некоторые новые примеры

Пример 4. Рассмотрим случай, когда уравнение (5.24) становится линейным. Для этого выберем функцию $\Phi(\beta, v)$ линейной по β. Положим

$$\Phi(\beta, v) = -\frac{\phi''(v)}{\phi'(v)}\beta + \ln \phi'(v). \tag{6.1}$$

Выражение (6.1) не есть самый общий вид функции, линейной по β. Однако калибровочным преобразованием (5.25) общий случай может быть сведен к (6.1). Система уравнений (5.6), эквивалентная уравнению (5.24), при выборе функции $\Phi(\beta, v)$ в форме (6.1) записывается так:

$$\begin{cases} \beta' = \alpha - \frac{\phi''(v)}{\phi'(v)}\beta + \ln\phi'(v), \\ \alpha' = -\frac{\phi''(v)}{\phi(v)}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Система (6.2) легко интегрируется. В качестве констант интегрирования возникают два скалярных поля $f(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})$ на многообразии M:

$$\alpha = -\ln\phi'(v) + \ln h, \qquad \beta = \frac{\ln h\phi(v) + f}{\phi'(v)}. \tag{6.3}$$

Отсюда для силового поля $\mathbf{F}$ динамической системы в силу (4.20) и скалярной подстановки (3.2) получается выражение:

$$F_q = \frac{h}{\phi'(|\mathbf{v}|)}N_q + |\mathbf{v}|\left(\frac{\nabla_i h}{h}\frac{\phi(|\mathbf{v}|)}{\phi'(|\mathbf{v}|)} + \frac{\nabla_i f}{\phi'(|\mathbf{v}|)}\right)(2N^i N_q - \delta^i_q). \tag{6.4}$$

Рассмотрим вновь уравнение (5.24). Общее решение этого уравнения зависит от двух констант интегрирования $\beta = B_\Phi(v, f, h)$. Пусть параметр h функционально выражен через параметр f, т. е. $h = h(f)$. Это сокращает число произвольных параметров и приводит к функции

$$\beta = \beta(v, f) = B_\Phi(v, f, h(f)), \tag{6.5}$$

которая выделяет некоторое однопараметрическое подсемейство в двухпараметрическом семействе решений уравнения (5.24). Рассмотрим (6.5) просто как функцию двух переменных и продифференцируем ее по v. В результате этого получится еще одна функция двух переменных: $\beta' = \beta'(v, f)$. Без ограничения общности можно считать, что зависимость от f в (6.5) локально обратима, что выражается в виде $f = f(\beta, v)$. Подставим это в $\beta' = \beta'(v, f)$, в результате чего получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\beta' = U(\beta, v), \tag{6.6}$$

где $U(\beta, v) = \beta'(v, f(\beta, v))$. Уравнение (6.6) совместно с (5.24). Однопараметрическое семейство его решений — это в точности подсемейство (6.5) решений уравнения (5.24). Продифференцируем (6.6) по v и подставим в (5.24). Это приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\partial U(\beta,v)}{\partial \beta}U(\beta,v) + \frac{\partial U(\beta,v)}{\partial v} = \frac{\partial \Phi(\beta,v)}{\partial \beta}(U(\beta,v)+1) + \frac{\partial \Phi(\beta,v)}{\partial v}, \tag{6.7}$$

связывающему функции $U(\beta, v)$ и $\Phi(\beta, v)$. Соотношение (6.7) является в точности условием совместности двух обыкновенных дифференциальных уравнений (6.6) и (5.24).

Заметим, что (6.7) — это одно уравнение на две функции. Для разрешения (6.7) введем в рассмотрение новую функцию $W(\beta, v) = U(\beta, v) - \Phi(\beta, v)$. Тогда уравнение (6.7) можно переписать так:

$$\frac{\partial U(\beta,v)}{\partial \beta} - \frac{\partial W(\beta,v)}{\partial \beta}U(\beta,v) = \frac{\partial W(\beta,v)}{\partial v} + \frac{\partial W(\beta,v)}{\partial \beta}. \tag{6.8}$$

Сделаем в дифференциальное уравнение (6.8) следующую подстановку:

$$W(\beta,v) = -\ln w(\beta,v), \qquad U(\beta,v) = \frac{u(\beta,v)}{w(\beta,v)}. \tag{6.9}$$

Подстановка (6.9) делает уравнение (6.8) совсем простым, сводя его к линейному уравнению в частных производных на функции u и w:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial v} = 0. \tag{6.10}$$

Общее решение уравнения (6.10) локально задается одной произвольной функцией двух переменных $\phi(\beta, v)$:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial \beta} - \frac{\partial \phi}{\partial v}, \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial \beta}.$$

Отсюда для функции $U(\beta, v)$ и введенной выше функции $W(\beta, v)$ получаем

$$U = -\frac{\partial\phi/\partial v}{\partial\phi/\partial\beta} - 1, \qquad W = -\ln\left(\frac{\partial\phi}{\partial\beta}\right). \tag{6.11}$$

Запишем первое из соотношений (6.11) в форме уравнения на функцию $\phi(\beta, v)$:

$$\frac{\partial\phi(\beta, v)}{\partial\beta}(U(\beta, v) + 1) + \frac{\partial\phi(\beta, v)}{\partial v} = 0. \tag{6.12}$$

Такое уравнение решается методом характеристик. Характеристики уравнения (6.12) определяются обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\beta' = U(\beta, v) + 1, \tag{6.13}$$

а функция $\phi(\beta, v)$ в силу (6.12) является первым интегралом (законом сохранения) уравнения (6.13). Поэтому значение функции ϕ можно использовать для параметризации семейства решений уравнения (6.13). Запишем это так:

$$\beta = B(v, \phi). \tag{6.14}$$

Функция (6.14) отличается от (6.5). Она обращает функциональную зависимость ϕ от β, что выражается соотношением $B(v, \phi(\beta, v)) \equiv \beta$. Путем дифференцирования этого соотношения получаем

$$\frac{\partial B}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\beta} = 1, \qquad \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0. \tag{6.15}$$

Выразим из (6.15) производные $\partial\phi/\partial\beta$ и $\partial\phi/\partial v$ через $\partial B/\partial\phi$ и $\partial B/\partial v$ и подставим результат в (6.11). Это дает

$$U = \frac{\partial B}{\partial v} - 1, \qquad W = \ln\left(\frac{\partial B}{\partial\phi}\right). \tag{6.16}$$

Из (6.16) легко определяется функция Φ, но, разумеется, в переменных v и ϕ:

$$\Phi = U - W = B_v - \ln(B_\phi) - 1. \tag{6.17}$$

В этих же переменных v и ϕ естественно записать и уравнение (6.6), которое определяет зависимость β от v. Теперь это будет уравнение, определяющее зависимость ϕ от v:

$$\phi' = -\frac{1}{B_\phi(v,\phi)}. \tag{6.18}$$

Оно выводится из $\phi' = \partial\phi/\partial\beta \cdot U + \partial\phi/\partial v$ и соотношений (6.15), определяющих частные производные ϕ по v и β.

Резюмируя проделанные выкладки, заметим, что исходное уравнение (5.24) содержит произвольную функцию $\Phi(\beta, v)$, которую удалось выразить через $\phi(\beta, v)$, а ее в свою очередь через функцию $B(v,\phi)$. Поэтому удобно считать $B(v,\phi)$ первичной и выражать все в терминах этой функции.

Пример 5. Конкретизируем выбор функции $B(v,\phi)$ с тем, чтобы уравнение (6.18) стало явно разрешимым. Пусть

$$B(v,\phi) = -\frac{1}{3v}\ln\left(\frac{\phi}{\phi+3}\right).$$

Тогда уравнение (6.18) на функцию $\phi(v)$ приобретает вид уравнения Бернулли (см. уравнение 1.29 в справочнике Камке [13]):

$$\phi' = \phi^2 v + 3v\phi.$$

Общее решение этого уравнения содержит одну константу интегрирования f, которая, вообще говоря, зависит от пространственных переменных $x^1, \ldots, x^n$ и определяет скалярное поле на многообразии M:

$$\phi = \phi(v, f) = \frac{3}{\exp(-3v^2/2 - 2f) - 1}.$$

Теперь остается вычислить поля a и $\mathbf{b}$ в (4.20) для определения поля A скалярной подстановки (3.2)

$$a = e^W = B_\phi = -\frac{4}{9v}\operatorname{sh}^2(-3v^2/4 - f),$$
$$b_i = \frac{\partial\beta}{\partial x^i} = \frac{\partial B}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial f}\nabla_i f = -\frac{\nabla_i f}{3v}.$$

Теперь легко выводится выражение для компонент силового поля динамической системы, допускающей нормальный сдвиг:

$$F_q = -\frac{4}{9|\mathbf{v}|}\operatorname{sh}^2(-3|\mathbf{v}|^2/4 - f)N_q - \frac{\nabla_i f(2N^i N_q - \delta^i_q)}{3}. \tag{6.19}$$

Силовое поле (6.19) содержит лишь одно скалярное поле f, что отличает его от общего случая (5.28) и от случая (6.4). Это объясняется тем, что мы заменили уравнение второго порядка (5.24) уравнением первого порядка (6.6).

§8. Заключительные замечания

Три случая, определяемые формулами (5.9), (5.10) и (5.28), полностью характеризуют локальное строение динамических систем, допускающих нормальный сдвиг на римановых многообразиях размерности $n \geqslant 3$. Двумерный случай отличается большим разнообразием. В многомерном случае система уравнений нормальности сильно переопределена (хотя и совместна). Поэтому множество ее решений становится вполне обозримым.

Отметим, что факт существования и количество локальных решений уравнений нормальности никак не связаны с особенностями метрики (постоянством кривизны, числом изометрий и т. д.). Поэтому вопрос о существовании и количестве гладких глобальных решений этих уравнений связан исключительно с топологией многообразия M.

Список литературы

[1] Boldin A. Yu., Sharipov R. A., *Dynamical systems accepting the normal shift*, Preprint № 0001-M, Башкир. гос. ун-т, Уфа, 1993.

[2] Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Теор. и мат. физ. **97** (1993), № 3, 386–395.

[3] Tenenblat K., Terng C. L., *Bäcklund's theorem for n-dimensional submanifolds of* $\mathbb{R}^{2n-1}$, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 477–490.

[4] Terng C. L., *A higher dimension generalization of sine-Gordon equation and its soliton theory*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 491–510.

[5] Chern S. S., Terng C. L., *An analogue of Bäcklund's theorem in affine geometry*, Rocky Mountain J. Math. **10** (1980), no. 1, 105–124.

[6] Tenenblat K., *Bäcklund's theorem for submanifolds of space forms and a generalized wave equation*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **16** (1985), no. 2, 69–94.

[7] Болдин А. Ю., Дмитриева В. В., Сафин С. С., Шарипов Р. А., *Динамические системы на римановых многообразиях, допускающие нормальный сдвиг*, Теор. и мат. физ. **103** (1995), № 2, 256–266.

[8] Болдин А. Ю., Бронников А. А., Дмитриева В. В., Шарипов Р. А., *Условия полной нормальности для динамических систем на римановых многообразиях*, Теор. и мат. физ. **103** (1995), № 2, 267–275.

[9] Шарипов Р. А., *Проблема метризуемости динамических систем, допускающих нормальный сдвиг*, Теор. и мат. физ. **101** (1994), № 1, 85–93.

[10] Шарипов Р. А., *Метризуемость динамических систем конформно-эквивалентной метрикой*, Теор. и мат. физ. **103** (1995), № 2, 276–282.

[11] Boldin A. Yu., *On the self-similar solutions of normality equations in two-dimensional case*, Dynamical Systems Accepting the Normal Shift, Башкир. гос. ун-т, Уфа, 1994, сс. 31–40.

[12] Bronnikov A. A., Sharipov R. A., *Axially symmetric dynamical systems accepting the normal shift in* $\mathbb{R}^n$, Интегрируемость в динамических системах, Ин-т. мат. с ВЦ РАН, Уфа, 1994, сс. 62–69.

[13] Камке Э., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям,*, Изд. 3-е, испр., Наука, М., 1965.

Башкирский государственный университет
450074, Уфа, ул. Фрунзе, 32
E-mail: root@bgua.bashkiria.su

Поступило 7 ноября 1996 г.