Г. Г. Казарян, Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 143–159

https://www.mathnet.ru/tm2483

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

Г. Г. КАЗАРЯН

СРАВНЕНИЕ МОЩНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: R_n, E_n — n-мерные евклидовы пространства, $\mathbf{Z}_n^+$ — множество мультииндексов, т. е. n-мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in R_n$, $\alpha \in \mathbf{Z}_n^+$ положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_k = \dfrac{\partial}{\partial \xi_k}$ (или $D_k = \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $x \in E_n$) $(k = 1, \ldots, n)$; $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$. Положим также

$$R_n^{(0)} = \left\{\xi;\ \xi \in R_n, \prod_{j=1}^{n} \xi_j \neq 0\right\};\ P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha^P \xi^\alpha;\ (P) = \{\alpha;\ \alpha \in \mathbf{Z}_n^+,\ \gamma_\alpha^P \neq 0\}.$$

Всюду будем считать, что (P) — конечное множество.

Определение 1. *Будем говорить, что дифференциальный оператор $P(D) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha^P D^\alpha$ (с постоянными коэффициентами) мощнее дифференциального оператора $Q(D) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha^Q D^\alpha$, если для некоторой постоянной $C > 0$*

$$|Q(\xi)| \leqslant C(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R_n,$$

где $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ характеристические многочлены (символы) операторов соответственно $P(D)$ и $Q(D)$.

Если оператор $P(D)$ мощнее оператора $Q(D)$, то будем говорить также, что многочлен $P(\xi)$ мощнее многочлена $Q(\xi)$ и писать $Q < P$ (или $P > Q$).

Будем пользоваться следующим определением гипоэллиптичности.

Определение 2 (см. [1, теорема 4.1.3]). *Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипоэллиптическим, если для всех $\nu \in \mathbf{Z}_n^+$, $|\nu| \neq 0$*

$$|D^\nu P(\xi)| / |P(\xi)| \to 0 \ \text{при} \ \xi \to \infty.$$

Здесь мы находим некоторые условия гипоэллиптичности, связанные с обобщенно-однородными частями данного оператора P. При этом мы обобщаем теорему Л. Хёрмандера (см. [2]) о знакоопределенности старшей части гипоэллиптического оператора второго порядка с вещественными коэффициентами на случай операторов с постоянными коэффициентами любого порядка (см. также [3]). Мы также обобщаем и уточняем соответствующие результаты ряда авторов, в частности, мы освобождаемся от ограничения «постоянной кратности характеристик», которое ставилось при рассмотрении условий гипоэллиптичности операторов с постоянными коэффициентами в наших заметках [4] и [5].

Обобщается и уточняется также результат Б. Пини [6], относящийся к нахождению эквивалентной главной гипоэллиптической части гипоэллиптического оператора.

Для данного многочлена $P(\xi)$ определенного класса здесь дается описание множества многочленов $\{Q(\xi)\}$, удовлетворяющих условию $Q < P$. Оказывается, что эта задача тесно связана с задачей о нахождении условий гипоэллиптичности данного оператора.

§ 1. СРАВНЕНИЕ МОЩНОСТИ λ-ОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Определение 1.1. *Характеристическим многогранником (х. м.) или многогранником Ньютона $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ данного набора мультииндексов $\mathfrak{A} = \{\alpha^j\}_1^N$, называется наименьший выпуклый многогранник в R_n, содержащий все мультииндексы α^j $(j = 1, \ldots, N)$.*

Характеристическим многогранником (х. м.) $\mathfrak{N}(P)$ оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) называется х. м. набора (P).

Определение 1.2. *Многогранник $\mathfrak{N} \subset R_n$ с вершинами из Z_n^+ назовем полным, если $\mathfrak{N}$ имеет вершины в начале координат и (отличных от нее) на каждой оси координат Z_n^+.*

Грани размерности j многогранника $\mathfrak{N}$ обозначим через $\mathfrak{N}_i^j$ $(i = 1, \ldots, M_j', j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Определение 1.3. *Грань $\mathfrak{N}_i^j$ многогранника $\mathfrak{N}$ называется главной, если среди внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей этой грани существует нормаль, хотя бы одна координата которой положительна. Если же среди внешних нормалей грани $\mathfrak{N}_i^j$ существует нормаль, все координаты которой положительны, то грань $\mathfrak{N}_i^j$ назовем вполне правильной (в. п.).*

Многогранник $\mathfrak{N}$ назовем вполне правильным (в. п.), если а) $\mathfrak{N}$ — полный многогранник, б) *все $(n-1)$-мерные некоординатные грани $\mathfrak{N}$ вполне правильны.*

Точку $\alpha \in \mathfrak{N}$ назовем главной (соответственно вполне правильной (в. п.)), если α принадлежит замыканию хотя бы одной главной (соответственно в. п.) грани многогранника $\mathfrak{N}$.

Определение 1.4. *Грань $\mathfrak{N}_i^j$ многогранника $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(P)$ оператора $P(D)$ назовем P-регулярной, если $P^{i,j}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R_n^{(0)}$, где $P^{i,j}(\xi)$ — подмногочлен многочлена $P(\xi)$, отвечающий грани $\mathfrak{N}_i^j$, т. е. определяемый формулой*

$$P^{i,j}(\xi) = \sum_{\alpha \in \overline{\mathfrak{N}}_i^j} \gamma_\alpha^P \xi^\alpha.$$

Если существует точка $\eta \in R_n^{(0)}$ такая, что $P^{i,j}(\eta) = 0$, то грань $\mathfrak{N}_i^j$ назовем P-нерегулярной.

Легко видеть (см. [7]), что подмногочлен $P^{i,j}(\xi)$ является λ-однородным многочленом для любого вектора λ, являющегося внешней (относительно $\mathfrak{N}(P)$) нормалью этой грани, т. е. существует число $d(\lambda)$ такое, что

$$P^{i,j}(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) = d(\lambda)} \gamma_\alpha^P \xi^\alpha.$$

Очевидно, что для произвольной внешней нормали λ грани $\mathfrak{N}_i^j$ полного многогранника $\mathfrak{N}$ $d(\lambda) > 0$, если $\mathfrak{N}_i^j$ — главная грань, и $d(\lambda) = 0$ в противном случае.

Если все главные грани полного х. м. $\mathfrak{N}(P)$ оператора $P(D)$ P-регулярны, то $Q < P$, как только $\mathfrak{N}(Q) \subseteq \mathfrak{N}(P)$. Это непосредственно следует из результатов работы [7] В. П. Михайлова (для неполных многогранников см. [8]). Здесь мы будем рассматривать случай, когда некоторая главная грань многогранника $\mathfrak{N}(P)$ многочлена $P(\xi)$ P-нерегулярна. При этом для простоты будем считать, что P-нерегулярной могут быть только $(n-1)$-мерные главные грани. Более сложный и громоздкий случай наличия P-нерегулярной грани размерности $m < n-1$ рассматривается методами настоящей заметки и заметки [9]. При этом на протяжении всей работы будем считать, что P-нерегулярна только одна $(n-1)$-мерная главная грань. В случае наличия более одной $(n-1)$-мерной P-нерегулярной грани, условия ставятся на каждую такую грань.

Пусть $R(\xi)$ — λ-однородный многочлен порядка d_R, т. е. $R(t^\lambda \xi) \equiv R(t^{\lambda_1}\xi_1, \ldots, t^{\lambda_n}\xi_n) = t^{d_R} R(\xi)$, $t > 0$. Введем следующие обозначения:

$$\Sigma(R) = \{\eta;\ \eta \in R_n^{(0)},\ |\eta| = 1,\ R(\eta) = 0\},$$

$$\mathfrak{A}(\eta, R) = \{\nu;\ \nu \in Z_n^+,\ D^\nu R(\eta) \neq 0\},$$

$$\Delta(\eta, R) = \min_{\nu \in \mathfrak{A}(\eta, R)} (\lambda, \nu).$$

Рассмотрим сначала случай, когда многочлен $P(\xi)$ λ-однороден и при этом все грани (неполного) многогранника $\mathfrak{N}(P)$ P-регулярны, кроме одной $(n-1)$-мерной грани, совпадающей с $\mathfrak{N}(P)$. Тогда имеет место

Т е о р е м а 1. *Пусть $P(D)$ и $Q(D)$ — λ-однородные операторы порядков соответственно d_P и d_Q $(d_P \geqslant d_Q)$.*

Для выполнения соотношения $Q < P$ необходимо каждое из следующих условий 1) — 3) *и достаточно одновременное выполнение условий* 1) и 2):

1) $\mathfrak{N}(Q) \subseteq \mathfrak{N}[(P) \cup \{0\}]$;

2) *для каждой точки* $\eta \in \Sigma(P)$, $\xi \to \eta$

$$|Q(\xi)|^{\frac{1}{d_Q}} = O\left(|P(\xi)|^{\frac{1}{d_P}}\right), \qquad P(\xi) \neq 0; \tag{1.1}$$

3) $$\frac{d_Q}{d_P} \leqslant \frac{\Delta(\eta, Q)}{\Delta(\eta, P)} \qquad \forall \eta \in \Sigma(P). \tag{1.2}$$

З а м е ч а н и е 1. В случае $n = 2$ эта теорема доказана в работе [10]. При этом в случае $n = 2$ условие 2) настоящей теоремы является следствием условия 3) и соотношения $\Sigma(P) \subseteq \Sigma(Q)$. Это непосредственно следует из леммы 2.1 работы [11]. С другой стороны, очевидно, условие $\Sigma(P) \subseteq \Sigma(Q)$ необходимо для $Q < P$. В случае $n \geqslant 2$ в [9] получены условия справедливости $Q < P$, при этом на исследуемые λ-однородные многочлены накладывается ограничение, обеспечивающее выполнение условия 2) при выполнении условия 3).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Необходимость. Докажем, что выполнение условия (1.1) влечет выполнение условия (1.2). Пусть для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P)$

$$\frac{d_Q}{d_P} > \frac{\Delta(\eta, Q)}{\Delta(\eta, P)}. \tag{1.3}$$

Для точки $\eta \in \Sigma(P)$ составим набор $\mathfrak{A}(\eta, Q)$ и обозначим через $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ х. м. этого набора. Очевидно, он не является полным, так как, например, $0 = (0, \ldots, 0) \overline{\in} \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$. Из выпуклости многогранника $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор σ, $|\sigma| < \varepsilon$, такой, что $\lambda^\varepsilon = \lambda + \sigma$ — внешняя нормаль к некоторой вершине β многогранника $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$, т. е. $\forall\, \alpha \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$, $\alpha \neq \beta$ $(\lambda^\varepsilon, \beta) < (\lambda^\varepsilon, \alpha)$.

Положим $\eta_i^t = \eta_i + t^{-\lambda_i^\varepsilon}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $t > 0$. Тогда по формуле Тейлора

$$|Q(\eta^t)| = \left| \sum_{(\lambda, \alpha) \geqslant \Delta(\eta, Q)} (\eta^t - \eta)^\alpha \frac{D^\alpha Q(\eta)}{\alpha!} \right| = \left| \sum_{(\lambda, \alpha) \geqslant \Delta(\eta, Q)} t^{-(\lambda^\varepsilon, \alpha)} \frac{D^\alpha Q(\eta)}{\alpha!} \right| =$$
$$= t^{-(\lambda, \beta) - (\sigma, \beta)} \frac{|D^\beta Q(\eta)|}{\beta!} + o\left(t^{-(\lambda^\varepsilon, \beta)}\right) \geqslant t^{-\Delta(\eta, Q) - (\sigma, \beta)} (C + o(1)), \qquad C > 0. \tag{1.4}$$

Для многочлена $P(\xi)$ аналогично имеем

$$|P(\eta^t)| \leqslant C t^{-\Delta(\eta, P) - (\sigma, \alpha)}, \tag{1.4'}$$

где α — некоторый мультииндекс.

Так как $|\sigma| > 0$ можно брать произвольно малым, то представления (1.4), (1.4′) вместе с условием (1.3) показывают, что для нашей последовательности $\{\eta^t\}$

$$R(\eta^t) = |Q(\eta^t)|^{\frac{1}{d_Q}} / |P(\eta^t)|^{\frac{1}{d_P}} \to \infty. \tag{1.5}$$

Это значит, что нарушается условие 2) теоремы 1.

Теперь докажем, что $Q \not< P$, если нарушается условие 2) теоремы. Пусть для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P)$ и для некоторой последовательности $\{\eta^s\}$, $\eta^s \to \eta$ справедливо соотношение (1.5). Положим

$$t_s = |P(\eta^s)|^{-\frac{1}{d_P}}, \quad \xi^s = t_s^\lambda \eta^s, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$, поэтому и $|\xi^s| \to \infty$. На этой последовательности $\{\xi^s\}$ $P(\xi^s) = 1$, $s = 1, 2, \ldots$, $Q(\xi^s) = t_s^{d_Q}$. $Q(\eta^s) = t_s^{d_Q} [R(\eta^s)]^{d_Q} \times \times |P(\eta^s)|^{d_Q/d_P} = [R(\eta^s)]^{d_Q} \to \infty$. Это значит, что $Q \not< P$ и доказывает необходимость условий 2) и 3). Необходимость условия 1) для $Q < P$ доказывается просто, от противного, рассмотрением $\xi^t = t^\sigma$, где $t \to +\infty$, σ — внешняя нормаль вершины $\mathfrak{N}(Q)$, не содержащейся в $\mathfrak{N}[(P) \cup \{0\}]$.

Достаточность. Докажем, что при одновременном выполнении условий 1), 2) теоремы $Q < P$. Пусть, наоборот, при выполнении условий 1), 2) существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $\xi^s \to \infty$ и

$$|Q(\xi^s)| / (|P(\xi^s)| + 1) \to \infty. \tag{1.6}$$

В дальнейшем внешнюю относительно многогранника $\mathfrak{N}$ нормаль σ грани $\mathfrak{N}_i^j$ назовем $\mathfrak{N}$-нормалью грани $\mathfrak{N}_i^j$.

Не умаляя общности, можно считать, что все координаты векторов ξ^s положительны. Положим

$$\rho = \exp\left[\sum_{j=1}^n (\ln \xi_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \lambda_i = \ln \xi_i / \ln \rho, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда, очевидно,

$$\xi^s = \rho_s^{\lambda^s} \qquad (\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s},\ i = 1, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots),$$

где $\lambda^s = (\lambda_1^s, \dots, \lambda_n^s)$ — единичный вектор и $\rho_s \to \infty$, если $|\xi^s| \to \infty$ или если некоторая координата ξ^s стремится к нулю.

Так как векторы $\{\lambda^s\}$ единичны, то у последовательности $\{\lambda^s\}$ есть предельный вектор λ^∞, и за счет взятия подпоследовательности можно считать, что $\lambda^s \to \lambda^\infty$. Из выпуклости х. м. $\mathfrak{N}\,[(P) \cup \{0\}]$ следует, что λ^∞ является $\mathfrak{N}$-нормалью к некоторой (и только одной) грани х. м. $\mathfrak{N}\,[(P) \cup \{0\}]$.

Возьмем в R_n какой-нибудь ортогональный базис $(e^{1,1}, e^{1,2}, \dots, e^{1,n})$ с $e^{1,1} = \lambda^\infty$. Тогда $\lambda^s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{1,i}^s e^{1,i}$, причем, так как $\lambda^s \to \lambda^\infty = e^{1,1}$, то $\lambda_{1,1}^s \to 1$, $\lambda_{1,i}^2 = o(\lambda_{1,1}^s)$ при $i = 2, 3, \dots, n$, $s \to \infty$.

Если за счет возможного выбора подпоследовательности при всех достаточно больших s $\sum_{i=2}^{n} \lambda_{1,i}^s e^{1,i} = 0$, то базис $(e^{1,1}, \dots, e^{1,n})$ обозначим через $(e^1, \dots, e^n)$. В противном случае за счет возможного выбора подпоследовательности можно считать, что

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_{1,i}^s e^{1,i} \neq 0 \text{ и}$$

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_{1,i}^s e^{1,i} \Big/ \left| \sum_{i=2}^{n} \lambda_{1,i}^s e^{1,i} \right| \to e^{2,2}.$$

Перейдем в подпространстве, натянутом на $(e^{1,2}, \dots, e^{1,n})$, к какому-нибудь новому ортогональному базису $(e^{2,2}, \dots, e^{2,n})$ с определенным выше вектором $e^{2,2}$. Тогда $\lambda^s = \lambda_{1,i}^s e^{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_{2,i}^s e^{2,i}$, $\lambda_{2,2}^s = o(\lambda_{1,1}^s)$, $\lambda_{2,i}^s = o(\lambda_{2,2}^s)$, $i = 3, \dots, n$, $s \to \infty$.

Поступая аналогично в подпространстве с базисом $(e^{2,3}, \dots, e^{2,n})$ и т. д., получим в итоге (после переобозначений), что $\lambda^s = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i^s e^i$, где $\{e^1, \dots$ $\dots, e^n\}$ — ортонормированный базис $\varkappa_1^s \to 1$, $\varkappa_{i+1}^s = o(\varkappa_i^s)$, $i = 1, \dots, n-1$, $s \to \infty$. При этом существуют числа m и s_0 такие, что для всех $s \geqslant s_0$ $\varkappa_i^s \neq 0$ $(i = 1, \dots, m)$, $\varkappa_i^s = 0$ $(i = m+1, \dots, n)$. Без ограничения общности можно считать, что $s_0 = 1$ и что для всех s $\varkappa_i^s > 0$ $(i = 1, \dots, m)$.

Рассмотрим грани х. м. $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}\,[(P) \cup \{0\}]$: $\mathfrak{N}_{i_1}^{k_1}, \dots, \mathfrak{N}_{i_m}^{k_m}$, удовлетворяющие тем условиям, что $\mathfrak{N}_{i_1}^{k_1}$ лежит в опорной гиперплоскости к $\mathfrak{N}$ с внешней нормалью e^1, а каждая грань $\mathfrak{N}_{i_j}^{k_j}$ $(j = 2, \dots, m)$ либо совпадает с предыдущей, либо является ее подгранью, и в обоих случаях лежит в той ортогональной к опорной гиперплоскости k (рассматриваемой изолированно) предыдущей, для точек α которой (e^j, α) наибольшее.

Из построения граней $\{\mathfrak{N}_{i_j}^{k_j}\}_1^m$ видно, что их размерности связаны отношением $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_m$.

Пусть, как и выше, $P^{i_j, k_j}(\xi)$ — подмногочлен многочлена $P(\xi)$, отвечающий грани $\mathfrak{N}_{i_j}^{k_j}$, т. е.

$$P^{i_j, k_j}(\xi) = \sum_{\beta \in \overline{\mathfrak{N}}_{i_j}^{k_j}} \gamma_\beta^P \xi^\beta,$$

а α — произвольный мультииндекс, принадлежащий всем $\overline{\mathfrak{N}}_{i_j}^{k_j}$, т. е. $\alpha \in \mathfrak{N}_{i_m}^{k_m}$. Сравним при $\rho_s \to \infty$, $\xi^s = \rho_s^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varkappa_i^s e^i}$ поведение многочленов $P(\xi^s)$ и $Q(\xi^s)$. При этом ради простоты записи опустим в обозначениях индекс s. За счет возможного выбора подпоследовательности можно считать, что при некотором r $(1 \leqslant r \leqslant m)$

$$\rho^{\varkappa_r} \to \infty, \qquad \rho^{\varkappa_{r+1}} \to b \geqslant 1$$

(при $r = m = n$ положим по определению $\varkappa_{n+1} = 0$, e^{n+1} — любой единичный вектор).

Тогда из e^j-однородности многочленов $P^{i_j, k_j}(\xi)$, $Q^{i_j, k_j}(\xi)$, из выпуклости х. м. $\mathfrak{N}[(P) \cup \{0\}]$ и $\mathfrak{N}(Q)$ и их граней получаем при некоторых положительных $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_r'$

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \rho^{(\alpha, \varkappa_1 e^1)}\left[P^{i_1, k_1}\left(\rho^{\sum\limits_{j=2}^{n+1} \varkappa_j e^j}\right) + o(\rho^{-\varepsilon_1 \cdot \varkappa_1})\right] = \\ &= \rho^{(\alpha, \varkappa_1 e^1 + \varkappa_2 e^2)}\left[P^{i_2, k_2}\left(\rho^{\sum\limits_{j=3}^{n+1} \varkappa_j e^j}\right) + o(\rho^{-\varepsilon_2 \cdot \varkappa_2})\right] = \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\ &= \rho^{\left(\alpha, \sum\limits_{j=1}^{r-1} \varkappa_j e^j\right)}\left[P^{i_{r-1}, k_{r-1}}\left(\rho^{\sum\limits_{j=r}^{n+1} \varkappa_i e^i}\right) + o(\rho^{-\varepsilon_{r-1} \cdot \varkappa_{r-1}})\right] = \\ &= \rho^{\left(\alpha, \sum\limits_{j=1}^{r} \varkappa_j e^j\right)}\left[P^{i_r, k_r}\left(\rho^{\sum\limits_{j=r+1}^{n+1} \varkappa_j e^j}\right) + o(\rho^{-\varepsilon_r \cdot \varkappa_r})\right], \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$Q(\xi) = \rho^{\left(\beta, \sum\limits_{j=1}^{r} \varkappa_j e^j\right)}\left[Q^{i_r, k_r}\left(\rho^{\sum\limits_{j=r+1}^{n+1} \varkappa_j e^j}\right) + o(\rho^{-\varepsilon_r' \cdot \varkappa_r})\right]. \tag{1.8}$$

При этом подмногочлен $Q^{i_j, k_j}(\xi)$ определяется по многочлену $Q(\xi)$ и по вектору e^j аналогично многочлену $P^{i_j, k_j}(\xi)$, α и β — некоторые мультииндексы из $\mathfrak{N}[(P) \cup \{0\}]$.

По нашим предположениям имеем

$$\rho^h \equiv \rho^{\sum\limits_{j=r+1}^{n+1} \varkappa_j e^j} \to b^{e^{r+1}} \equiv \eta.$$

Очевидно, при всех $i = 1, \ldots, n$ $\quad 0 < \eta_i < \infty$.

Рассмотрим два возможных случая: I) $(e^1, \alpha) > 0$; II) $(e^1, \alpha) = 0$.

Случай I. Пусть сначала 1) $P^{i_r, k_r}(\eta) \neq 0$. Тогда для многочленов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ имеем из (1.7) и (1.8) соответственно

$$P(\xi) = \rho^{\left(\alpha, \sum\limits_{j=1}^{r} \varkappa_j e^j\right)} P^{i_r, k_r}(\eta)(1 + o(1)), \tag{1.9}$$

$$Q(\xi) = \rho^{\left(\beta, \sum\limits_{j=1}^{r} \varkappa_j e^j\right)} Q^{i_r, k_r}(\eta)(1 + o(1)). \tag{1.10}$$

Из условия 1) теоремы 1, из положительности $\varkappa_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ и из определения векторов $e^1, \ldots, e^r$ легко получаем, что $\left(\beta, \sum\limits_{j=1}^{r} \varkappa_j e^j\right) \leqslant \left(\alpha, \sum\limits_{j=1}^{r} \varkappa_j e^j\right)$.

Тогда представления (1.9) и (1.10) вместе противоречат (1.6) (так как $|P(\xi^s)| \to \infty$) и завершают рассмотрение случая I.1).

Случай I. 2) $P^{i_r, k_r}(\eta) = 0$. По предположению о P-регулярности всех k-мерных граней x. м. $\mathfrak{R}(P)$ при $k < n-1$, отсюда имеем, что $k_r = n-1$, $P^{i_r, k_r}(\xi) \equiv P(\xi)$, $Q^{i_r, k_r}(\xi) \equiv Q(\xi)$, $e^1 = \lambda$. Тогда $\eta \in \Sigma(P)$ и

$$P(\xi) = \rho^{(\alpha, \varkappa_1\lambda)} P(\rho^h), \tag{1.11}$$

$$Q(\xi) = \rho^{(\beta, \varkappa_1\lambda)} Q(\rho^h). \tag{1.12}$$

При этом, так как $\varkappa_1 \to 1$, то $(\alpha, \varkappa_1\lambda) \to d_P$, $(\beta, \varkappa_1\lambda) \to d_Q$. С другой стороны, так как $\rho^h \to \eta \in \Sigma(P)$, то по условию 2) для достаточно больших ρ

$$|Q(\rho^h)| \leqslant C|P(\rho^h)|^{\frac{d_Q}{d_P}} \tag{1.13}$$

Из (1.12), (1.13) имеем

$$|Q(\xi)| \leqslant C\rho^{(\beta, \varkappa_1\lambda)} |P(\rho^h)|^{\frac{d_Q}{d_P}}. \tag{1.14}$$

Обозначив $|P(\rho^h)| = y^{d_P}$ из (1.11), (1.14) и $d_Q \leqslant d_P$, имеем

$$|Q(\xi)| / (|P(\xi)| + 1) \leqslant C (\rho^{\varkappa_1} y)^{d_Q} / ((\rho^{\varkappa_1} y)^{d_P} + 1) \leqslant C_1.$$

Это противоречит (1.6) и завершается рассмотрение случая I.

Случай II рассматривается аналогично соответствующему случаю II леммы 1.1 работы [9], если заметить еще, что в этом случае грань многогранника $\mathfrak{R}[(P) \cup \{0\}]$, внешняя (относительно $\mathfrak{R}[(P) \cup \{0\}]$), нормаль которой является вектор e^1, P-регулярна.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть $P(\xi)$ — λ-однородный многочлен. Заметим, что всякий многочлен $Q(\xi)$ представим в виде суммы λ-однородных многочленов*

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(\lambda, \alpha)=\delta_j} \gamma_\alpha^Q \xi^\alpha, \qquad \delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_N \geqslant 0. \tag{1.15}$$

Соотношение $Q < P$ имеет место тогда и только тогда, когда условиям 1) — 3) *теоремы* 1 *удовлетворяет каждая λ-однородная пара $\{Q_k, P\}$, где Q_k взяты из* (1.15), $k = 1, \ldots, N$.

Доказательство достаточности очевидно.

Необходимость. Пусть $Q < P$. Тогда $Q(t^\lambda \xi) < P(t^\lambda \xi) = t^{d_P} P(\xi)$. Следовательно, $Q(t^\lambda \xi) < P(\xi)$ для всякого положительного t. Выберем N положительных чисел $t_1, \ldots, t_N$. Тогда из (1.15) имеем

$$Q(t_j^\lambda \xi) = \sum_{k=1}^{N} t_j^{\delta_k} Q_k(\xi),$$

и матрица $(t_j^{\delta_k})$ $j, k = 1, \ldots, N$ является невырожденной. Поэтому каждый из многочленов $Q_k(\xi)$ $(k = 1, \ldots, N)$ представляет собой линейную комбинацию многочленов $Q(t_j^\lambda \xi)$ и, следовательно, $Q_k < P$ $(k = 1, \ldots, N)$.

§ 2. СРАВНЕНИЕ МОЩНОСТИ ОБЩИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $P(\xi)$ — многочлен с полным *х. м.* $\mathfrak{R}(P)$, все главные грани которого P-регулярны, за исключением одной $(n-1)$-мерной P-нерегулярной главной грани $\mathfrak{R}_l^{n-1}$. Пусть λ — внешняя нормаль этой грани и $(\lambda, \alpha) = d_0$ —

уравнение (n — 1)-мерной опорной гиперплоскости, проходящей через эту грань. Обозначим

$$d_1 = \max_{\alpha \in (P) \setminus \overline{\mathfrak{N}}_l^{n-1}} (\lambda, \alpha)$$

$$P_1(\xi) \equiv P_{d_1}(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha)=d_1} \gamma_\alpha^P \xi^\alpha.$$

Пусть $Q(\xi)$ — произвольный многочлен с х. м. $\mathfrak{N}(Q) \subseteq \mathfrak{N}(P)$. По данному вектору λ представим многочлен $Q(\xi)$ в виде (1.15). Очевидно, если $Q_k < P$ ($k = 1, \ldots, N$), то $Q < P$. Поэтому естественно сначала сравнить λ-однородные многочлены с общим многочленом $P(\xi)$.

Итак, пусть $Q(\xi)$ — λ-однородный многочлен порядка d_Q. Из условия $\mathfrak{N}(Q) \subseteq \mathfrak{N}(P)$ следует, что $d_Q \leqslant d_0$. Наша цель в этом пункте — найти условия, при которых (общий) многочлен $P(\xi)$ мощнее λ-однородного многочлена $Q(\xi)$.

Будем сначала предполагать, что $P_1(\eta) \neq 0$ для всех точек $\eta \in \Sigma(P_0)$.

В работе [9] доказано, что при приведенном выше предположении о многочлене $P(\xi)$, если для каждой точки $\eta \in \Sigma(P_0)$ существует окрестность $O(\eta)$ такая, что $P_0(\xi)P_1(\xi) \geqslant 0$ $\forall \xi \in O(\eta)$, то имеет место неравенство

$$\sum_{\nu \in \mathfrak{N}^*} |\xi^\nu| \leqslant C(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R_n,$$

где

$$\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}^*(P) = \{\mu;\ \mu \in \mathbf{Z}_n^+ \cap \mathfrak{N},\ (\lambda, \mu) \leqslant d_1\}.$$

Отсюда следует, что если $\mathfrak{N}(Q) \subseteq \mathfrak{N}^*(P)$, то $Q < P$.

Поэтому будем считать, что $\mathfrak{N}(Q) \not\subseteq \mathfrak{N}^*(P)$, что для λ-однородного многочлена $Q(\xi)$ означает $d_Q > d_1$. Будем далее считать, что для каждой точки $\eta \in \Sigma(P_0)$ существует окрестность $O(\eta)$ такая, что

$$P_0(\xi)P_1(\xi) \geqslant 0 \quad \forall \xi \in O(\eta). \tag{2.1}$$

Это условие является необходимым для оценки $Q < P$ для произвольного λ-однородного многочлена $Q(\xi)$ порядка $d_Q \geqslant d_1$, что показывается так же, как в работе [12].

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{N}(P)$ *полный* х. м. *многочлена* $P(\xi)$, $\mathfrak{N}_l^{n-1}$ — *единственная главная P-нерегулярная грань* $\mathfrak{N}(P)$ *и* $P_1(\eta) \neq 0$ *при* $\eta \in \Sigma(P_0)$. *Пусть многочлен* $P(\xi)$ *удовлетворяет условию* (2.1) *для всех точек* $\eta \in \Sigma(P_0)$ *и* $Q(\xi)$ — *λ-однородный многочлен порядка* d_Q ($d_1 < d_Q \leqslant d_0$, $\mathfrak{N}(Q) \subseteq \mathfrak{N}(P)$). *Тогда для* $Q < P$ *необходимо каждое из нижеследующих условий 1)— 2) и достаточно условие* 2):

1) $$\frac{d_0 - d_1}{d_Q - d_1} \geqslant \frac{\Delta(\eta, P_0)}{\Delta(\eta, Q)} \quad \forall \eta \in \Sigma(P_0);$$

2) *для каждой точки* $\eta \in \Sigma(P_0)$

$$|Q(\xi)| = Q\left(|P_0(\xi)|^{\frac{d_Q - d_1}{d_0 - d_1}}\right) \text{ при } \xi \to \eta.$$

Доказательство. Необходимость условия 1). Пусть для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P_0)$

$$\frac{d_0 - d_1}{d_Q - d_1} < \frac{\Delta(\eta, P_0)}{\Delta(\eta, Q)}. \tag{2.2}$$

Положим ($\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in R_n$)

$$\xi_i = t^{\lambda_i} (\eta_i + \theta_i t^{-k\lambda_i}), \quad k > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда по формуле Тейлора имеем

$$Q(\xi) = t^{d_Q} Q(\eta + \theta t^{-k\lambda}) = t^{d_Q} \sum_{\alpha} t^{-k(\lambda, \alpha)} \frac{\theta^\alpha}{\alpha!} D^\alpha Q(\eta) =$$
$$= t^{d_Q - k\Delta(\eta, Q)} \sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta, Q)} \frac{\theta^\alpha}{\alpha!} D^\alpha Q(\eta) + o(t^{d_Q - k\Delta(\eta, Q)}).$$

Выберем вектор θ так, чтобы

$$\sum_{(\lambda, \alpha) = \Delta(\eta, Q)} \frac{\theta^\alpha}{\alpha!} D^\alpha Q(\eta) \neq 0.$$

Существование такого вектора с вещественными компонентами, очевидно, следует из определения числа $\Delta(\eta, Q)$. Тогда

$$|Q(\xi)| \geqslant C t^{d_Q - k\Delta(\eta, Q)}. \tag{2.3}$$

Для многочленов $P_0(\xi)$ и $P_1(\xi)$, очевидно, имеем

$$|P_0(\xi)| \leqslant C t^{d_0 - k\Delta(\eta, P_0)}, \quad |P_1(\xi)| = t^{d_1} P_1(\eta)(1 + o(1)). \tag{2.4}$$

Из очевидных геометрических соображений многочлен

$$r(\xi) \equiv P(\xi) - [P_0(\xi) + P_1(\xi)] = o(t^{d_1}), \quad t \to \infty. \tag{2.5}$$

Выберем число k так, чтобы $d_0 - k\Delta(\eta, P_0) = d_1 < d_Q - k\Delta(\eta, Q)$, что возможно в силу (2.2). Тогда в силу (2.4), (2.5), (2.3)

$$|P(\xi)| \leqslant C t^{d_1}(1 + o(1)) = o(|Q(\xi)|) \text{ при } t \to +\infty,$$

откуда следует, что $|Q(\xi)| / (|P(\xi)| + 1) \to \infty$ при $t \to +\infty$. Это доказывает необходимость условия 1) для $Q < P$.

Необходимость условия 2). Пусть для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P_0)$ существует последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что $\eta^s \to \eta$, $P_0(\eta^s) \neq 0$, $s = 1, 2, \ldots$, и

$$R(\eta^s) = |Q(\eta^s)| / |P_0(\eta^s)|^{\frac{d_Q - d_1}{d_0 - d_1}} \to \infty. \tag{2.6}$$

Положим

$$t_s = |P_0(\eta^s)|^{-\frac{1}{d_0 - d_1}}, \quad \xi^s = t_s^\lambda \eta^s, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Так как $\eta^s \to \eta \in \Sigma(P_0)$, то $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$. Тогда вследствие λ-однородности многочленов $P_0(\xi)$, $P_1(\xi)$ и $Q(\xi)$ имеем при $s \to \infty$

$$|P_0(\xi^s)| = t_s^{d_0} |P_0(\eta^s)| = t_s^{d_1}, \tag{2.7}$$

$$|P_1(\xi^s)| = t_s^{d_1} |P_1(\eta^s)| = t_s^{d_1} |P_1(\eta)| (1 + o(1)), \tag{2.8}$$

$$r(\xi^s) = o(t^{d_1}). \tag{2.9}$$

Представления (2.7) — (2.9) показывают, что при $s \to \infty$

$$|P(\xi^s)| \leqslant C t_s^{d_1}. \tag{2.10}$$

Для многочлена $Q(\xi)$ аналогично при допущении (2.6) имеем

$$|Q(\xi^s)| = t_s^{d_Q} |Q(\eta^s)| = t_s^{d_Q} R(\eta^s) |P_0(\eta^s)|^{\frac{d_Q - d_1}{d_0 - d_1}} = R(\eta^s) t_s^{d_1}. \tag{2.11}$$

Оценки (2.10), (2.11) вместе с условием $R(\eta^s) \to \infty$ при $s \to \infty$ показывают, что

$$|Q(\xi^s)| / (|P(\xi^s)| + 1) \to \infty \text{ при } s \to \infty. \qquad (2.12)$$

Этим необходимость условия 2) для $Q < P$ доказана.

Достаточность. Пусть при выполнении условий теоремы $Q \not< P$, т. е. существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $\xi^s \to \infty$ и имеет место (2.12).

Поступая, как при доказательстве теоремы 1, получим представления (1.7) и (1.8) для (общего) многочлена $P(\xi)$ и λ-однородного многочлена $Q(\xi)$, при этом случай I.1) и случай II рассматриваются аналогично. Рассмотрим случай I.2) $P^{i_r, k_r}(\eta) = 0$. В этом случае $P^{i_r, k_r}(\xi) \equiv P_0(\xi)$, $Q^{i_r, k_r}(\xi) \equiv Q(\xi)$, $e^1 = \lambda$. Представления (1.7) и (1.8) превращаются в представления

$$P(\xi^s) = \rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \alpha)} P_0(\rho_s^h) + \rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \beta)} P_1(\rho_s^h) + o(\rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \beta)}), \qquad (2.13)$$

$$Q(\xi^s) = \rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \delta)} Q(\rho_s^h), \qquad (2.14)$$

где при $s \to \infty$ $(\varkappa_1^s\lambda, \alpha) \to d_0$, $(\varkappa_1^s\lambda, \beta) \to d_1$, $(\varkappa_1^s\lambda, \delta) \to d_Q$.

Так как при $s \to \infty$ $\rho_s^h \to \eta \in \Sigma(P_Q)$, то для достаточно больших s (т. е. для достаточно больших ρ_s) выполняется условие 2) теоремы. Тогда из (2.14) получаем для достаточно больших s

$$|Q(\xi^s)| = \rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \delta)} |Q(\rho_s^h)| \leqslant \rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \delta)} |P_0(\rho^h)|^{\frac{d_Q - d_1}{d_0 - d_1}}. \qquad (2.15)$$

По условию (2.1) теоремы для достаточно больших s $P_0(\rho_s^h) P_1(\rho_s^h) \geqslant 0$, поэтому из (2.13) получаем, что для $r(\xi) = P(\xi) - [P_0(\xi) + P_1(\xi)]$ на нашей последовательности $\{\xi^s\}$ $|r(\xi^s)| / |P(\xi^s)| \to 0$, что в свою очередь показывает, что при $s \to \infty$

$$|P(\xi^s)| \geqslant C |\rho_s^{d_0} P_0(\rho_s^h) + \rho_s^{d_1} P_1(\rho_s^h)|. \qquad (2.16)$$

Применим теперь неравенство ($y \in [0, 1]$, $x \geqslant 1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$)

$$x^{d_Q} y^{\frac{d_Q - d_1}{d_0 - d_1}} \leqslant C(1 + a_1 x^{d_0} y + a_2 x^{d_1})$$

(которое доказывается просто, если заменить $y = z^{d_0 - d_1}$) для многочленов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$. При этом, очевидно, можно считать, что для достаточно больших s $\rho^s = x \geqslant 1$, $|P_0(\rho_s^h)| = y \in [0, 1]$.

Получим

$$\rho_s^{d_Q} |P_0(\rho^h)|^{\frac{d_Q - d_1}{d_0 - d_1}} \leqslant C(|\rho_s^{d_0} P_0(\rho_s^h) + \rho_s^{d_1} P_1(\rho_s^h)| + 1).$$

Это вместе с оценками (2.15), (2.16) противоречит (2.12) и доказывает теорему 2.

З а м е ч а н и е. Очевидно, теорема 1 является частным случаем теоремы 2, если считать, что $P_1(\xi) \equiv 1$. Но их мы сформулировали отдельно, так как, на наш взгляд, теорема 1 представляет самостоятельный интерес при желании подчеркнуть значение λ-однородного случая.

Далее нас будет интересовать следующий вопрос: пусть многочлены $Q(\xi)$ и $P(\xi)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, так что $Q < P$; какие λ-однородные многочлены $R(\xi)$ порядка d_R ($d_1 < d_R < d_0$) можно добавлять к $P(\xi)$, чтобы $Q < P + R$?

Помимо самостоятельного интереса, решение этой задачи имеет важное значение также и при рассмотрении условий гипоэллиптичности операторов.

Решение этой задачи дается следующим предложением:

Теорема 3. *Пусть многочлены $Q(\xi)$ и $P(\xi)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и, следовательно, $Q < P$. Пусть λ-однородный многочлен $R(\xi)$ порядка d_R ($d_1 < d_R < d_0$) удовлетворяет условиям:*

1) $\mathfrak{N}(R) \subseteq \mathfrak{N}(P)$, $\Sigma(R) \supset \Sigma(P_0)$;

2) *для каждой точки* $\eta \in \Sigma(P_0)$

$$|R(\xi)|^{\frac{1}{d_R-d_1}} = o\left(|P_0(\xi)|^{\frac{1}{d_0-d_1}}\right) \text{ при } \xi \to \eta. \tag{2.17}$$

Тогда а) $|R(\xi)| / (|P(\xi)| + 1) \to 0$ *при* $\xi \to \infty$, б) $Q < P + Q$.

Замечание 1. Так же как при доказательстве необходимости условия 2) теоремы 2, можно показать, что условие (2.17) необходимо для $Q < < P + R$.

Замечание 2. Для многочленов $Q(\xi)$ и $P(\xi)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, условие $(d_Q - d_1)/(d_0 - d_1) = \Delta(\eta, Q)/\Delta(\eta, P_0)$ для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P_0)$ не влечет $|Q(\xi)| / (|P(\xi)| + 1) \to 0$ при $\xi \to \infty$. Покажем это на следующем примере: пусть $n = 2$, $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^8 + + {}^1/_4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2$, $Q(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)$. Очевидно, $Q < P$. Однако положив $\xi_1 = t(1 + t^{-1/2})$, $\xi_2 = t$, получим при $t \to \infty$ $|Q(\xi)| / /|P(\xi)| \to 1$. Здесь для точки $\eta \in \Sigma(P_0)$ $\eta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (d_Q - d_1)/(d_0 - d_1) = = \Delta(\eta, Q)/\Delta(\eta, P_0) = {}^1/_2$.

Взяв ту же последовательность $\{\xi\}$, легко убедиться, что $P < P - Q$. Это показывает, что в данном примере нельзя в качестве «младшего члена» $R(\xi)$ брать многочлен $R(\xi) = -Q(\xi)$.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, достаточно доказать утверждение пункта а), так как пункт б) является следствием а) и условия $Q < P$. Пункт а) доказывается аналогично достаточности теоремы 2 с небольшими модификациями. Поэтому мы его не проводим.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ К ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathfrak{N}(P)$ — вполне правильный (в. п.) многогранник многочлена $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ с вещественными коэффициентами, Λ — множество единичных внешних[1] нормалей вполне правильных (в. п.) граней $\mathfrak{N}_i^k$ ($i = 1, \ldots$ $\ldots, M_k$, $k = 0, \ldots, n-1$) х. м. $\mathfrak{N}(P)$, $\Lambda_i^k = \Lambda(P^{i,k})$ — множество единичных внешних нормалей грани $\mathfrak{N}_i^k$ ($i = 1, \ldots, M_k$, $k = 0, \ldots, n-1$). Тогда имеет место

Теорема 4. *Пусть многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен. Представим для каждого вектора $\lambda \in \Lambda_i^k$ многочлен $P(\xi)$ в виде суммы λ-однородных многочленов*

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{N(\lambda)} P_{d_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{N(\lambda)} \sum_{(\lambda, \alpha) = d_j(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{3.1}$$

где $d_0(\lambda) > d_1(\lambda) > \ldots > d_N(\lambda) \geqslant 0$, $P_{d_0(\lambda)}(\xi) \equiv P^{i,k}(\xi)$.

Пусть для точки $\eta \in R_n$, $\eta \neq 0$, $P_{d_j(\lambda)}(\eta) = 0$, $0 \leqslant j < r$, $P_{d_r(\lambda)}(\eta) \neq 0$.

Тогда или для всех таких η $P_{d_r(\lambda)}(\eta) > 0$, *или для всех таких* η $P_{d_r(\lambda)}(\eta) < < 0$.

Следствие. Если $P^{i,k}(\xi)$ — подмногочлен многочлена $P(\xi)$, отвечающий некоторой в. п. грани $\mathfrak{N}_i^k$ х. м. $\mathfrak{N}(P)$, то

$$P^{i,k}(\xi) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \forall \xi \in R_n.$$

Доказательство теоремы 4. Пусть для некоторой грани $\mathfrak{N}_l^m$ существует пара точек η^1 и η^2 и вектор $\lambda \in \Lambda_l^m$ такие, что

$$P_{d_j(\lambda)}(\eta^1) = 0, \quad j = 1, \ldots, r_1 - 1, \quad P_{d_{r_1}(\lambda)}(\eta^1) > 0;$$

$$P_{d_j(\lambda)}(\eta^2) = 0, \quad j = 1, \ldots, r_2 - 1, \quad P_{d_{r_2}(\lambda)}(\eta^2) < 0.$$

Положим $\xi^i(t) = t^\lambda \eta^i$ $(i = 1, 2)$, где $t > 0$. Тогда из представления (3.1) многочлена $P(\xi)$ и из определения точек η^1, η^2 имеем

$$P(\xi^1(t)) = t^{d_{r_1}(\lambda)} P_{d_{r_1}(\lambda)}(\eta^1) + \sum_{j=r_1+1}^{N(\lambda)} t^{d_j(\lambda)} P_{d_j(\lambda)}(\eta^1), \tag{3.2}$$

$$P(\xi^2(t)) = t^{d_{r_2}(\lambda)} P_{d_{r_2}(\lambda)}(\eta^2) + \sum_{j=r_2+1}^{N(\lambda)} t^{d_j(\lambda)} P_{d_j(\lambda)}(\eta^2). \tag{3.3}$$

Из геометрических соображений ясно, что при $t \to \infty$

$$| P(\xi^i(t) - P_{d_{r_i}(\lambda)}(\xi^i(t)) | = o(t^{d_{r_i}(\lambda)}), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому из представлений (3.2), (3.3) получаем при $t \to \infty$

$$P(\xi^1(t)) \to +\infty, \quad P(\xi^2(t)) \to -\infty.$$

Это означает, что на некоторой последовательности $\tau^s \to \infty$ $P(\tau^s) = 0$, т. е. многочлен $P(\xi)$ не гипоэллиптичен. Теорема 4 доказана.

Следующее предложение доказывается просто.

Теорема 5. *Многочлен веторого порядка с постоянными вещестеенными коэффициентами гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда он эллиптичен.*

Доказательство. Пусть

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|=2} \gamma_\alpha \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=1} \gamma_\alpha \xi^\alpha + P_0 = P_2(\xi) + P_1(\xi) + P_0. \tag{3.4}$$

Гипоэллиптичность эллиптического многочлена известна (см. [1, теорема 4.1.7]), так что надо лишь доказать эллиптичность гипоэллиптического многочлена.

Пусть $P_2(\eta) = 0$ для некоторой точки $\eta \in R_2$, $\eta \neq 0$. Если $P_1(\eta) = 0$, то из (3.4) получаем, что $P(t\eta) = P_0$ ограничен при всех t. Это противоречит определению гипоэллиптичности. Если $P_1(\eta) \neq 0$, то $P(t\eta) = tP_1(\eta) + P_0$ принимает значения разных знаков, следовательно, и нулевые, вне любой сферы, что также противоречит гипоэллиптичности и доказывает теорему.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{N}_l^{n-1}$ *— единственная в. п. P-нерегулярная грань в. п. х. м.* $\mathfrak{N}(P)$ *многочлена* $P(\xi)$ *(вообще говоря, с комплексными коэффициентами). Обозначим через* $\mathfrak{N}'$ *множество в. п. точек из множества* $\mathfrak{N} \cap (P) \equiv (P)$ *и положим*

$$\mathcal{P}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}'} \gamma_\alpha \xi^\alpha + \sum_{\alpha \in (P_1) \setminus \mathfrak{N}'} \gamma_\alpha \xi^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}' \cup (P_1)} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

де многочлен $P_1(\xi) \equiv P_{d_1}(\xi)$ *для данной грани* $\mathfrak{N}_l^{n-1}$ *определяется, как в* § 2.

Пусть $\forall \eta \in \Sigma(P_0) \equiv (\Sigma(P^{l,n-1})$ $P_1(\eta) \neq 0$. *Тогда многочлен* $P(\xi)$ *гипоэллиптичен в том и только в том случае, когда гипоэллиптичен* $\mathcal{P}(\xi)$.

Для гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$ назовем $\mathcal{P}(\xi)$ его гипоэллиптической главной частью.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathcal{P}(\xi)$ гипоэллиптичен и $0 \neq \alpha \in \mathbf{Z}_n^+$. Имеем

$$\left|\frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)}\right| = \frac{|D^\alpha \mathcal{P}(\xi) + D^\alpha r(\xi)|}{|\mathcal{P}(\xi) + r(\xi)|} \Bigg| = \frac{|D^\alpha \mathcal{P}(\xi)/\mathcal{P}(\xi) + D^\alpha r(\xi)/\mathcal{P}(\xi)|}{|1 + r(\xi)/\mathcal{P}(\xi)|}. \tag{3.5}$$

Докажем, что при $|\alpha| \geqslant 0$ $|D^\alpha r(\xi)| / |\mathcal{P}(\xi)| \to 0$ при $|\mathcal{P}(\xi)| \to \infty$. По лемме 2 заметки [12]

$$\sum_{v \in \mathfrak{N}^*} |\xi^v| \leqslant C(|\mathcal{P}(\xi)| + 1) \qquad \forall \xi \in R_n, \tag{3.6}$$

где $\mathfrak{N}^* = \{\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{N} \cap \mathbf{Z}_n^+,\ (\lambda, \alpha) \leqslant d_1\}$.

Так как все точки множества $(D^\alpha r)$ являются неглавными точками (полного) многогранника $\mathfrak{N}^*$, то (см. [7]) для любого числа $\delta > 0$ существует постоянная $C(\delta) > 0$ такая, что

$$\sum_{v \in (D^\alpha r)} |\xi^v| \leqslant \delta \sum_{v \in \mathfrak{N}^*} |\xi^v| + C(\delta) \qquad \forall \xi \in R_n.$$

Отсюда и из (3.6) получаем

$$|D^\alpha r(\xi)| \leqslant \delta \cdot C |\mathcal{P}(\xi)| + \delta \cdot C(\delta)| \qquad \forall \xi \in R_n. \tag{3.7}$$

Это показывает, что при $|\mathcal{P}(\xi)| \to \infty$ отношение $|D^\alpha r(\xi)| / |\mathcal{P}(\xi)|$ становится сколь угодно малым.

Так как по предположению $\mathcal{P}(\xi)$ гипоэллиптичен, то $|\mathcal{P}(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$ (что следует и из теоремы 2 заметки [5]). Тогда из (3.5), из гипоэллиптичности $\mathcal{P}(\xi)$ и из полученных отношений (3.7) имеем, что при $\xi \to \infty$, $|\alpha| \neq 0$ $|D^\alpha P(\xi)| / |P(\xi)| \to 0$. Это значит, что многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен.

Необходимость. Рассуждая, как и выше имеем, что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbf{Z}_n^+$ $|D^\alpha r(\xi)| / |P(\xi)| \to \infty$, если $\xi \to \infty$ и $P(\xi)$ гипоэллиптичен. Меняя в соотношении (3.5) местами многочленов $P(\xi)$ и $\mathcal{P}(\xi)$, получим гипоэллиптичность $\mathcal{P}(\xi)$. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть* $\mathfrak{N}_l^{n-1}$ *— единственная в. п. P-нерегулярная грань в. п. х. м.* $\mathfrak{N}(P)$ *многочлена* $P(\xi)$ *с вещественными коэффициентами, при этом* $P_1(\eta) \neq 0$, *если* $\eta \in \Sigma(P_0)$.

Для того чтобы многочлен $P(\xi)$ *был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий*:

1) $\mathfrak{N}^*$ *— полный многогранник*;

2) $d_0 - \Delta(\eta, P_0) < d_1$. $\forall \eta \in \Sigma(P_0)$;

3) $P_0(\xi) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ $\quad \forall \xi \in R_n$; $P_1(\eta) > 0$ (<0) $\quad \forall \eta \in \Sigma(P_0)$;

4) *обозначим через* $\Sigma(\operatorname{grad} P_0) = \{\eta;\ \eta \in \Sigma(P_0),\ \operatorname{grad} P_0(\eta) = 0\}$. *Для каждой точки* $\eta \in \Sigma(\operatorname{grad} P_0)$, *при* $\xi \to \eta$

$$|D_i P_0(\xi)| \equiv \left|\frac{\partial P_0(\xi)}{\partial \xi_i}\right| = o\left(|P_0(\xi)|^{1 - \frac{\lambda_i}{d_0 - d_1}}\right), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Замечание. Легко видеть, что из условия 2) настоящей теоремы следует, что $1 - \lambda_i/(d_0 - d_1) < \Delta(\eta, D_i P_0)/\Delta(\eta, P_0)$ для всех точек $\eta \in$

$\in \Sigma$ (grad P_0), $i = 1, \ldots, n$. С другой стороны, при $n = 2$, а при произвольном n также и для тех многочленов P (ξ), все характеристики подмногочленов P_0 (ξ) которых имеют постоянную кратность, имеет место соотношение

$$|D_iP_0(\xi)| = o(|P_0(\xi)|^{\Delta(\eta,\, D_iP_0)/\Delta(\eta,\, P_0)}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.9}$$

для всех точек $\eta \in \Sigma$ (grad P_0) и для любой последовательности $\xi \to \eta$.

Поэтому в этих случаях условие 4) является следствием условия 2).

Доказательство теоремы 7. Необходимость условий 1) и 2) доказана в работах [11] и [12]. Необходимость условия 3) содержится в теореме 4 настоящей заметки.

Докажем необходимость условия 4). Пусть для некоторой точки $\eta \in \Sigma$ (grad P_0) существует последовательность $\{\eta^s\}$ и номер i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие, что $\eta^s \to \eta$ и

$$R_i(\eta^s) = |D_iP_0(\eta^s)| / |P_0(\eta^s)|^{1-\frac{\lambda_i}{d_0-d_1}} \geqslant \sigma > 0. \tag{3.10}$$

Поступая, как при доказательстве необходимости условия 2) теоремы 2, получим оценку (2.10) для многочлена P_0 (ξ).

Для многочлена $D_i(P_0$ (ξ), применяя (3.10), аналогично получаем

$$|D_iP_0(\xi^s)| = t_s^{d_0-\lambda_i}|D_iP_0(\eta^s)| \geqslant \sigma t_s^{d_0-\lambda_i-(d_0-d_1)\left(1-\frac{\lambda_i}{d_0-d_2}\right)} = \sigma t_s^{d_1}.$$

Так как, очевидно, при $t_s \to \infty$ и $r = P - P_0$

$$|D_ir(\xi^s)| = o(t_s^{d_1}),$$

то при $s \to \infty$

$$|D_iP(\xi^s)| \geqslant \sigma t_s^{d_1}|(1 + o(1)).$$

Это значит, что при $\xi^s \to \infty$

$$|D_iP(\xi^s)| / |P(\xi^s)| \not\to 0,$$

что и доказывает необходимость условия 4).

Достаточность. Если в условиях теоремы многочлен P (ξ) не является гипоэллиптическим, то для некоторой последовательности $\{\xi^s,\}$ $\xi^s \to \infty$ и для некоторого мультииндекса (достаточно считать, что $|\nu| = 1$, см. [1]) имеет место оценка

$$|D^\nu P(\xi^s)| / |P(\xi^s) \geqslant \sigma > 0. \tag{3.11}$$

Поступая, как при доказательстве теоремы 1, получаем представление (1.8) для многочлена P (ξ). При этом здесь мы будем рассматривать лишь случай 1.2), когда вектор $e^1 = \lambda$ является внешней нормалью грани $\mathfrak{N}_l^{n-1}$ и $P_0(\eta) = P^{l,n-1}(\eta) = 0$. Другие возможные случаи рассматриваются аналогично соответствующим случаям теоремы 1.

Так как $\rho_s^h \to \eta$, то в силу условия 4) теоремы для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших s (и, для определенности, $\nu = (1, 0, \ldots, 0)$) верна оценка

$$|D_1P_0(\xi^s)| = \rho_s^{(\varkappa_1\lambda,\, \alpha)-\varkappa_1\lambda_1}|D_1P_0(\rho_s^h)| \leqslant \varepsilon\rho_s^{(\varkappa_1\lambda,\, \alpha)-\varkappa_1\lambda_1}|P_0(\rho_s^h)|^{1-\frac{\lambda_1}{d_0-d_1}}. \tag{3.12}$$

Из очевидных геометрических соображений для многочлена $r(\xi) = P(\xi) - P_0(\xi)$ имеем

$$|D_1 r(\xi^s)| = o(\rho_s^{d_1}),$$

при этом при $s \to \infty$ $\varkappa_1 = \varkappa_1^s \to 1$, $(\varkappa_1\lambda, \alpha) \to d_0$.

В отмеченном случае

$$P(\xi^s) = \rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \alpha)} P_0(\rho_s^h) + \rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \beta)} P_1(\rho_s^h) + o(\rho_s^{(\varkappa_1\lambda, \beta)}), \tag{3.13}$$

где $(\varkappa_1 \lambda, \beta) \to d_1$ при $s \to \infty$.

Так как для достаточно больших s выполняется также условие 3) теоремы, то для таких s из (3.13) получаем

$$|P(\xi^s)| \geqslant C\,|\rho_s^{d_0} P_0(\rho_s^h) + \rho_s^{d_1} P_1(\rho_s^h)|. \tag{3.14}$$

Из того же условия 3) теоремы и из представления (3.14) следует, очевидно, что при $s \to \infty$

$$|D_1 r(\xi^s)| / |P(\xi^s)| \to 0. \tag{3.15}$$

Покажем, что для любого наперед заданного числа $\delta > 0$ существует номер s_0 такой, что при $s \geqslant s_0$

$$|D_1 P_0(\xi^s)| / |P(\xi^s)| \leqslant \delta. \tag{3.16}$$

Для этого согласно оценкам (3.12) и (3.14) достаточно доказать, что при $s \geqslant s_0$

$$\varepsilon \cdot \rho_s^{d_0 - \lambda_1} |P_0(\rho_s^h)|^{1 - \frac{\lambda_1}{d_0 - d_1}} \leqslant \delta \cdot |\rho_s^{d_0} P_0(\rho_s^h) + \rho_s^{d_1} P_1(\rho_s^h)|. \tag{3.17}$$

Неравенство (3.17) эквивалентно следующему:

$$\varepsilon \cdot (\rho_s \cdot z)^{d_0 - d_1 - \lambda_1} \leqslant \delta \cdot |(\rho_s z)^{d_0 - d_1} + P_1(\rho_s^h)|,$$

которое получается из (3.17) заменой $|P_0(\rho^h)| = z^{d_0 - d_1}$. Последнее неравенство, очевидно, выполняется, так как $P_1(\rho_s^h) \to P_1(\eta) > 0$, а число $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым. Соотношения (3.15) и (3.16) вместе доказывают теорему 7.

Наша цель, в дальнейшем, описать то множество «младших членов», добавление которых к гипоэллиптическому многочлену, удовлетворяющему условиям теоремы 7, сохраняет его гипоэллиптичность. При этом «младшими» мы называем многочлены, мультииндексы мономов которых $\alpha \in \mathfrak{N}(P) \setminus (\mathfrak{N}'(P) \cup (P_1))$.

Любой многочлен $R(\xi)$ можно представить в виде суммы λ-однородных многочленов: $R(\xi) = \sum_{j=1}^{M} R_j(\xi)$. Если для любого мультииндекса $\alpha \in (R)$ $(\lambda, \alpha) < d_1$, то из гипоэллиптичности $P(\xi)$ следует гипоэллиптичность $P(\xi) + R(\xi)$. Пусть поэтому для некоторых многочленов $R_i(\xi)$ $d_{R_i} > d_1$, где d_{R_i} — порядок λ-однородности многочлена $R_i(\xi)$ $(i = 1, \ldots, M)$. Не умаляя общности, можно считать, что это условие выполняется только для одного многочлена.

Итак, пусть $R(\xi)$ — λ-однородный многочлен порядка d_R такой, что $d_1 < d_R < d_0$.

Всюду, далее, не умаляя общности, будем предполагать, что $P_0(\xi) \geqslant 0$ $\forall \xi \in R_n$ (см. теорему 4).

Обозначим через $\omega(R)$ множество тех точек $\eta \in \Sigma(P_0) \cap \Sigma(R)$, для которых существует последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что $\eta^s \to \eta$, $R(\eta^s) < 0$, $s = 1, 2, \ldots$.

Тогда имеет место

Теорема 8. *Пусть многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 7 и, следовательно, гипоэллиптичен.*

Пусть $R(\xi)$ — λ-однородный многочлен порядка d_R такой, что $\mathfrak{R}(R) \subseteq \mathfrak{R}(P)$. Тогда многочлен $Q(\xi) = P(\xi) + R(\xi)$ гипоэллиптичен в том и только в том случае, когда одновременно выполняются следующие условия:

1) $R(\eta) > 0 \quad \forall \eta \in \Sigma(P_0) \setminus \Sigma(R)$;

2) для каждой точки $\eta \in \omega(R)$

$$\frac{d_R - d_1}{d_0 - d_1} < \frac{\Delta(\eta, R)}{\Delta(\eta, P_0)};$$

3) для каждой точки $\eta \in \omega(R)$ и каждой последовательности $\xi \to \eta$

$$|R(\xi)| = o\left(|P_0(\xi)|^{\frac{d_R - d_1}{d_0 - d_1}}\right).$$

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из теоремы 4. Необходимость условия 2) доказывается аналогично необходимости условия 1) теоремы 2. Необходимость условия 3) доказывается аналогично необходимости условия 2) теоремы 3.

Достаточность. Поступая, как при доказательстве теоремы 7, т. е. предполагая, что имеет место (3.11) для многочлена $Q(\xi)$, получим, что $\rho_s^h \to \eta$. Если $Q^{i_r, k_r}(\eta) \neq 0$, то рассмотрения ведутся аналогично. Если же $Q^{i_r, k_r}(\eta) = 0$, то надо различать следующие три возможных случая:

1) $\eta \in \Sigma(P_0) \setminus \Sigma(R)$, 2) $\eta \in \omega(R)$, 3) $\eta \in (\Sigma(P_0) \cap \Sigma(R) \setminus \omega(R))$.

В случае 1) противоречие с (3.11) получается благодаря условию 1) теоремы. В случае 2) противоречие получается благодаря тому, что по теореме 3 и условию 3) теоремы 8

$$|R(\xi^s)| / (|P(\xi^s)| + 1) \to 0 \text{ при } |\xi| \to \infty.$$

В случае 3) по определению множества $\omega(R)$ в некоторой окрестности $O(\eta)$ точки η $R(\xi) \geqslant 0$. Так как многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию 3) теоремы 7, т. е. $P_0(\xi) \geqslant 0$ при $\xi \in O(\eta)$ и $P_1(\eta) > 0$, то для достаточно больших s $|Q(\xi^s)| \geqslant |P(\xi^s)|$. Это противоречит (3.11) и доказывает теорему.

Замечание. Пусть $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ $(\xi \in R_n)$ — λ-однородные многочлены с порядками d_P, d_Q, при этом $d_Q \leqslant d_P$, $\Sigma(P) \subseteq \Sigma(Q)$. При $n = 2$, а в случае $n > 2$ для многочленов с характеристиками постоянной кратности,

$$|Q(\xi)|^{\frac{1}{\Delta(\eta, Q)}} = O\left(|P(\xi)|^{\frac{1}{\Delta(\eta, P)}}\right) \qquad \forall \eta \in \Sigma(P). \tag{3.18}$$

Поэтому в этих случаях сформулированные предложения имеют более компактный вид. Например, в теореме 8 условие 3) является следствием условия 2) и аналогично в других предложениях.

Нам не известен ответ на следующий вопрос: является ли условие (3.18) следствием условия $\Sigma(P) \subseteq \Sigma(Q)$ для λ-однородных многочленов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ в общем случае, когда $n > 2$?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1969.
2. *L. Hörmander.* Hypoelliptic second order equations.—Acta Math., 1967, **119**, 3—4, p. 147—161.
3. *Zuily C.* Sur L'hypoellipticité des opérateurs differentiels du second ordre a coefficients, réels.— J. math. pures et appl. 1976, 55, p. 99—125.
4. *Казарян Г. Г.* О гипоэллиптических полиномах.— ДАН СССР, 1974, **214**, № 5, с.1016—1019.
5. *Казарян Г. Г.* Об оценках мономов через данный многочлен и характеризация гипоэллиптичности.— ДАН СССР, 1975, 222, № 3, с. 530—533.
6. *Pini B.* Osservazóri sulla ipoellitticita.— Boll. Unione mat. ital. (3), 1963, **18**, p. 420—432.
7. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов.— Труды МИАН СССР, 1967, **91**, с. 59—81.
8. *Гиндикин С. Г.* Энергетические оценки, связанные с многогранником Ньютона.— Труды Моск. матем. об-ва, 1974, **131**, с. 189—236.
9. *Казарян Г. Г.* Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы.— Труды МИАН СССР, 1976, **140**, с. 130—161.
10. *Казарян Г. Г.* О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам.— Изв. АН АрмССР. Сер. мат., 1974, **9**, № 6, с. 473—485.
11. *Казарян Г. Г.* Об одном семействе гипоэллиптических полиномов.— Изв. АН АрмССР. Сер. мат., 1974, **9**, № 3, с. 189—211.
12. *Казарян Г. Г.* Характеризация гипоэллиптичности оценками снизу.— Труды МИАН СССР, 1976, **140**, с. 162—168.