Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Б. Жеглов, Теория Шура–Сато для квазиэллиптических колец, *Труды МИАН*, 2023, том 320, 128–176

DOI: 10.4213/tm4300

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
8 февраля 2025 г., 06:30:05

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2023, т. 320, с. 128–176

УДК 517.957+512.72+512.71

Теория Шура–Сато для квазиэллиптических колец*

А. Б. Жеглов[a]

Поступило 13.05.2022; после доработки 13.09.2022; принято к публикации 01.12.2022

Светлой памяти Алексея Николаевича Паршина

Понятие квазиэллиптических колец появилось в результате попытки классификации широкого класса коммутативных колец операторов, встречающихся в теории интегрируемых систем, таких как кольца коммутирующих дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных операторов. Они содержатся в некотором некоммутативном "универсальном" кольце — чисто алгебраическом аналоге кольца псевдодифференциальных операторов на многообразии и допускают (при достаточно слабых ограничениях) удобное алгебро-геометрическое описание. Важной алгебраической частью этого описания является теория Шура–Сато — обобщение хорошо известной теории для обыкновенных дифференциальных операторов. Некоторые части этой теории были изложены ранее в серии статей, в основном для размерности 2. В настоящей работе эта теория развивается для произвольной размерности. Она применяется для доказательства двух теорем классификации квазиэллиптических колец в терминах некоторых пар подпространств (пар Шура). Они необходимы для упомянутого выше алгебро-геометрического описания квазиэллиптических колец. Теория эффективна и имеет несколько других приложений, среди которых новое доказательство формулы обращения Абьянкара.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4300

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00272, https://rscf.ru/project/22-11-00272/.

[a] Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: azheglov@math.msu.su, alexander.zheglov@math.msu.ru, abzv24@mail.ru

© А.Б. Жеглов, 2023

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа появилась в результате попытки классифицировать широкий класс коммутативных колец операторов, встречающихся в теории (квантовых) интегрируемых систем, таких как кольца коммутирующих дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных операторов. Типичными примерами таких колец являются квантовые интегрируемые системы (см., например, [4, 6, 11–13, 21, 51]) и их изоспектральные деформации (см. [9]), коммутативные кольца разностных или дифференциально-разностных операторов (см., например, [17, 23, 29–31, 35]).

В результате появилось понятие *квазиэллиптических колец* (см. определение 4.4 ниже). Все такие кольца содержатся в некотором некоммутативном “универсальном” кольце $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ (см. разд. 2) — чисто алгебраическом аналоге кольца псевдодифференциальных операторов на многообразии и допускают (при некоторых слабых ограничениях) удобное алгебро-геометрическое описание. Важной алгебраической частью этого описания является *теория Шура–Сато* — обобщение хорошо известной теории для обыкновенных дифференциальных операторов (см. статьи [33, 34], которыми во многом вдохновлена наша работа; см. также [57, Ch. 9], где эта теория подробно изложена в наиболее адаптированном для нашего обобщения виде). Теория Шура–Сато также является одним из шагов к построению *многомерного соответствия Кричевера* — многомерного аналога известной и плодотворной взаимосвязи между КдФ- или КП-уравнениями и алгебраическими кривыми с дополнительными геометрическими данными. Эта теория описывает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности объектов на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
{[B \subset \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}]} \arrow[rr, "\text{Прямое отображение}"'] \arrow[dr, "\substack{\text{Теория}\\ \text{Шура}}"] & & {[\text{Проективные спектральные данные}]} \arrow[ll, bend right=10, "\text{Обратное отображение}"'] \arrow[dl, "\substack{\text{Отображение}\\ \text{КПО}}"'] \\
& {[\text{Пары Шура}]} \arrow[ul, bend left=30, "\text{Теория Сато}"] \arrow[ur, bend right=30, "\text{Прямое отображение}"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь через B мы обозначили квазиэллиптические кольца, а другие понятия, такие как пары Шура, теория Шура и теория Сато, объясняются в соответствующих разделах этой статьи. Соответствие между классами эквивалентности квазиэллиптических колец B и проективными спектральными данными было анонсировано в [56], но без подробностей. Эти подробности, а также другие части этой диаграммы будут объяснены в следующей работе[1]. Настоящая работа содержит необходимые предварительные результаты для нее. Кроме того, мы ожидаем, что результаты этой работы будут также полезны для различных приложений, например для явных вычислений примеров.

Напомним краткую историю соответствия Кричевера и его многомерных аналогов. В случае $n = 1$ (классическое соответствие Кричевера) теория хорошо известна и развита; в частности, хорошо известна теория классификации коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов (см., например, [10, 14, 22, 28, 33, 35, 40, 42, 45, 50], а также дальнейшую библиографию в книге [57], которая содержит подробное изложение этой классификации).

В случае $n = 2$ (и частично в случае произвольного n, например, для отображения Кричевера–Паршина–Осипова (КПО) для некоторых геометрических данных в [36]) в работах А.Н. Паршина [37–39] было начато исследование многомерного аналога соответствия Кричевера, которое затем развивалось в работах [25–27, 36, 53–55, 58, 59] и связанных с этой темой статьях [9, 24, 56]. В частности, в серии работ [9, 24, 27, 54, 55, 58] были установлены взаимно

[1] *Zheglov A.* Commuting partial differential operators and higher-dimensional algebraic varieties in connection with higher-dimensional analogues of the KP theory. In preparation.

однозначные соответствия на приведенной выше диаграмме и найдены некоторые примеры в случае $n = 2$.

В настоящей работе мы улучшаем соответствующие результаты и распространяем их со случая $n = 2$ на общий случай.

Стартуя с кольца операторов в частных производных $D_n = K[[x_1, \dots, x_n]][\partial_1, \dots, \partial_n]$, где K — поле нулевой характеристики, можно определить его пополнение. Существует несколько версий пополнения. В работах [54, 55] использовалась "несимметричная" версия $\widehat{D}_2$ (при $n = 2$). Там было показано, что коммутативные подкольца $B \subset \widehat{D}_2$, удовлетворяющие некоторым условиям, классифицируются в терминах специальных геометрических спектральных данных и эта классификация является в некотором смысле естественным обобщением классификации Кричевера коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов (ОДО). Напомним, что классификация коммутирующих ОДО наиболее просто формулируется для подколец *ранга* 1, поскольку любая коммутативная подалгебра ОДО ранга 1 по существу определяется (с точностью до линейной замены переменных) чисто геометрическими (спектральными) данными, состоящими из проективной кривой, регулярной точки на кривой и когерентного пучка без кручения ранга 1 на кривой (см., например, подробное изложение этого случая в [57, Theorem 10.26]). Аналогичным свойством обладает классификация коммутативных подколец в $\widehat{D}_2$ *ранга* 1 (при правильно определенном понятии ранга, см. [55]), а похожая классификация квазиэллиптических колец ранга 1 в $\widehat{D}_n$ была анонсирована в [56]. Одной из основных целей данной работы является подробное доказательство предварительных теорем классификации квазиэллиптических колец ранга 1 и даже ранга r в терминах пар Шура (см. объяснение ниже). Они необходимы для доказательства теоремы из работы [56].

Преимуществом "несимметричной" версии $\widehat{D}_n$ пополнения (см. разд. 3) является существование теории Шура для тесно связанного с ним кольца формальных псевдодифференциальных операторов $\widehat{E}_n$ (см. разд. 3, 5) — важного инструмента теории классификации. С другой стороны, существует "симметричная" версия пополнения $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, введенная впервые в [9, Definition 5.1], которая в ряде случаев более удобна (в частности, в этом кольце вычислялись важные явные примеры из [9]) и которая содержит несимметричную. Мы напоминаем определение и основные свойства этого кольца (с небольшими дополнениями) в разд. 2. Кольцо $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ можно рассматривать как простой чисто алгебраический аналог кольца (аналитических) псевдодифференциальных операторов на многообразии (ср. [47]).[2] В конце разд. 2 мы приводим одно неожиданное приложение этой конструкции — новое доказательство формулы обращения Абьянкара из работы [1] (см. также [3, Ch. III, § 2]).

Обобщение классической теории Шура (ср. [33, 44]) для колец $\widehat{D}_n$, $\widehat{E}_n$ дано в разд. 5. Некоторые элементы этой теории появились ранее в работе [37] для колец псевдодифференциальных операторов от n переменных и в работе [54] для пополненного кольца $\widehat{D}_2$. Это важный алгебраический инструмент для изучения основных алгебраических свойств коммутирующих операторов, мы приводим его в п. 5.5.

Обобщение классической теории Сато (см. [33, 43]) дано в разд. 6. Некоторые элементы этой теории появлялись ранее в работе [54] для случая $n = 2$ и в работе [9, Sect. 5] для общего n, но только для специальных подпространств. В частности, операторы Сато, рассмотренные в последней работе, принадлежали кольцу $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. С другой стороны, подпространства и операторы Сато из [54] имели другую природу (в частности, они не принадлежали $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$). Чтобы объединить формально различные предыдущие версии теорий Сато, мы разрабатываем единую теорию Сато в общем случае, следуя изложению [9]. Теперь подпространства и опера-

[2] Хотя похожие конструкции колец встречались в различных областях математики — от анализа многообразий до деформационного квантования, квантовых групп и теории чисел (см. [15], а также замечание 6.2 ниже), мы не смогли найти более или менее точного аналога нашей конструкции в литературе.

торы Сато принадлежат более широкому пространству (точнее, бимодулю) $\widehat{\Pi}_n$, введенному в разд. 3. В качестве следствия этой новой единой теории Сато мы получаем понятие пар Шура из диаграммы выше и выводим две конструкции, связывающие их с квазиэллиптическими кольцами операторов $B\subset\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ (см. п. 6.3). Еще одним приложением является новое краткое доказательство (хотя и неэффективное) теоремы М. Мyласе [32] об обобщенном разложении Биркгофа (см. пример 6.2).

В разд. 7 мы развиваем другой аналог теории Шура, теперь уже для кольца $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. Разница между этой теорией Шура и теорией Шура из разд. 5 существенна: операторы Шура из разд. 5 принадлежат кольцу формальных псевдодифференциальных операторов $\widehat{E}_n$ (которое содержит формальный обратный оператор к дифференцированию), а операторы Шура из разд. 7 принадлежат кольцу “псевдодифференциальных” операторов $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ (которое не содержит формальных обратных к дифференцированиям). Кроме того, различие между кольцами $\widehat{E}_n$ и $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ существенно уже в случае $n=1$: так, например, кольцо $\widehat{E}_1$ не имеет делителей нуля, в отличие от кольца $\widehat{D}_1^{\mathrm{sym}}$. Теория Шура из разд. 7 используется для доказательства улучшенной классификации квазиэллиптических колец ранга 1 в разд. 8 и для описания (в том же разделе) допустимых операторов из п. 5.4. Кроме того, она более удобна для явных вычислений, чем другая теория Шура, и необходима для ряда результатов последующей статьи (см. замечание 4.1).

Краткое содержание статьи таково.

В разд. 2 мы вводим определение и описываем основные свойства кольца $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ и его функции порядка **ord**, которые широко используются во всей статье. В конце раздела мы даем новое доказательство формулы обращения Абьянкара.

В разд. 3 мы вводим определение и даем основные свойства колец $\widehat{D}_n$, $\widehat{E}_n$, E_n, Π_n и бимодуля $\widehat{\Pi}_n$, которые позже используются в обобщенных теориях Шура и Сато. Кроме того, мы вводим важное техническое понятие *разложения на слайсы* оператора.

В разд. 4 мы напоминаем и расширяем понятие *спектрального модуля*, а в п. 4.2 мы определяем другую важную функцию порядка ord_Γ и понятие квазиэллиптических колец. Отношения эквивалентности между этими кольцами вводятся позже, в разд. 8.

В разд. 5 мы развиваем обобщение классической теории Шура на кольца $\widehat{D}_n$, $\widehat{E}_n$, как упоминалось выше. Мы следуем стандартным шагам классической теории из [33], вводя понятия операторов Шура, корней, нормализованных операторов и допустимых операторов для наших расширенных и пополненных колец. В качестве приложения теории Шура мы выводим основные алгебраические свойства квазиэллиптических колец в п. 5.5.

В разд. 6 мы развиваем обобщение классической теории Сато для бимодуля $\widehat{\Pi}_n$. В этом разделе определяются такие важные понятия, как регулярные операторы (п. 6.1), действие Сато и операторы Сато (п. 6.2), пары Шура и (аналитический) ранг квазиэллиптических колец и пар Шура (п. 6.3). В качестве приложения теории мы получаем описание единиц (п. 6.2) и выводим две конструкции, связывающие пары Шура с квазиэллиптическими кольцами операторов (п. 6.3). В п. 6.4 мы вводим понятие допустимых линейных замен переменных, которое используется в улучшенной классификации квазиэллиптических колец ранга 1, и доказываем важные технические утверждения, необходимые для доказательства этой классификации в разд. 8.

В разд. 7 мы развиваем еще один аналог теории Шура для кольца $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, как было сказано выше. Этот раздел разделен на три части, в которых мы сначала даем описание централизаторов операторов с постоянными коэффициентами (п. 7.1), затем описываем эту теорию для случая $n=1$ (п. 7.2; в этом случае результаты упрощаются и служат шагом индукции к следующему разделу) и, наконец, описываем ее в общем случае (п. 7.3).

В разд. 8 мы объединяем всю технику, чтобы доказать две теоремы классификации: одна справедлива для квазиэллиптических колец любого ранга, а другая дает улучшенную классификацию для квазиэллиптических колец ранга 1. Подчеркнем, что определение ранга в данной работе слабее, чем в [55, 56]: в нашем случае это просто аналитический ранг из указанных работ без дополнительных условий типа конечной порожденности спектрального модуля, сильной допустимости квазиэллиптического кольца и др.

В настоящей работе все кольца предполагаются *кольцами над* K, т.е. ассоциативными K-алгебрами с мультипликативной единицей 1, где K — поле нулевой характеристики. Большинство результатов доказано даже для более общего относительного случая, т.е. для колец над $K_y = K[[y_1, \dots, y_m]]$, $m \geq 0$. Для удобства читателя мы постарались сделать изложение самодостаточным.

Список обозначений. Для удобства читателя приведем наиболее важные обозначения, используемые в статье.

1. Мы рассматриваем кольца $K_y := K[[y_1, \dots, y_m]]$, $m \geq 0$, $\widehat{R}_y := K_y[[x_1, \dots, x_n]]$ и K-векторное пространство

$$\mathcal{M}_n := \widehat{R}_y[[\partial_1, \dots, \partial_n]] = \left\{ \sum_{\underline{k} \geq \underline{0}} a_{\underline{k}} \, \underline{\partial}^{\underline{k}} \;\middle|\; a_{\underline{k}} \in \widehat{R}_y \;\; \forall \, \underline{k} \in \mathbb{N}_0^n \right\};$$

$\upsilon \colon \widehat{R}_y \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ — дискретное нормирование, определенное единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m} = (y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n)$ кольца $\widehat{R}_y$. Для любого элемента $0 \neq P := \sum_{\underline{k} \geq \underline{0}} a_{\underline{k}} \, \underline{\partial}^{\underline{k}} \in$ $\in \mathcal{M}_n$ определена функция порядка

$$\mathbf{ord}(P) := \sup\bigl\{ |\underline{k}| - \upsilon(a_{\underline{k}}) \;\big|\; \underline{k} \in \mathbb{N}_0^n \bigr\} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

и мы полагаем

$$\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} := \bigl\{ Q \in \mathcal{M}_n \;\big|\; \mathbf{ord}(Q) < \infty \bigr\};$$

$P_m := \sum_{|\underline{i}| - |\underline{k}| = m} \alpha_{\underline{k},\underline{i}} \, \underline{x}^{\underline{i}} \underline{\partial}^{\underline{k}}$ — *однородная компонента* степени m оператора P, $\sigma(P) := P_{\mathbf{ord}(P)} =$ $= P_{-d}$ — старший символ.

2. Мы рассматриваем кольца $\widehat{D}_n = \widehat{D}_n^n[\partial_n]$, где $\widehat{D}_n^n$ — подкольцо в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, состоящее из операторов, *не зависящих от* ∂_n, $\widehat{E}_n = \widehat{D}_n^n((\partial_n^{-1}))$, $E_n = D_n^n((\partial_n^{-1}))$ и $\Pi_n = \{P \in \widehat{E}_n \mid \mathbf{ord}(P) < \infty\}$, векторное пространство $\widehat{\mathcal{M}}_n := \bigl\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \partial_n^i \mid a_i \in \widehat{D}_n^n \bigr\}$ и его подпространство

$$\widehat{\Pi}_n := \bigl\{ P \in \widehat{\mathcal{M}}_n \;\big|\; \mathbf{ord}(P) < \infty \bigr\},$$

являющееся левым $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$-модулем и правым Π_n-модулем. *Функция порядка* ord_n на $\widehat{E}_n$ определяется как $\mathrm{ord}_n(P) = l$, если $\widehat{E}_n \ni P = \sum_{s=-\infty}^{l} p_s \partial_n^s$.

3. Первое *разложение на слайсы* элементов из $\widehat{\Pi}_n$ имеет вид

$$P = \sum_{\underline{i} \geq \underline{0}} \frac{\underline{x}^{\underline{i}}}{\underline{i}!} P_{(\underline{i})}, \qquad \text{где} \quad \underline{i} \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^m, \quad \underline{x}^{\underline{i}} = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m}, \quad \underline{i}! = i_1! \dots j_m!,$$

$$P_{(\underline{i})} = \underline{i}! \sum_{\substack{\underline{k} \in \mathbb{N}_0^{n-1} \times \mathbb{Z} \\ |\underline{k}| - |\underline{i}| \leq d = \mathbf{ord}(P)}} \alpha_{\underline{k},\underline{i}} \, \underline{\partial}^{\underline{k}}, \qquad \alpha_{\underline{k},\underline{i}} \in K, \qquad \text{— слайс;}$$

здесь $|\underline{i}| = i_1 + \ldots + j_m$.

4. Для коммутативного кольца $B \subset \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ определяется его *спектральный модуль*

$$F := \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} / (x_1, \dots, x_n) \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} \simeq K_y[[\partial_1, \dots, \partial_n]] \cap \Pi_n.$$

5. Г-порядок и квазиэллиптические кольца вводятся в определениях 4.2 и 4.4.

6. Мы используем пространство $V_n := K_y\{\{\partial_1,\dots,\partial_{n-1}\}\}((\partial_n^{-1}))$, где $K_y\{\{\partial_1,\dots,\partial_{n-1}\}\} = K_y[[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]]\cap \widehat{D}_n^n$. Это пространство имеет структуру правого $\widehat{E}_n$-модуля через изоморфизм векторных пространств $V_n \simeq \widehat{E}_n/(x_1,\dots,x_n)\widehat{E}_n$.

Пары Шура $A, W\subset V_n$ и понятие ранга для них и для квазиэллиптических колец вводятся в определениях 6.7 и 6.8.

7. Второе *разложение на слайсы* элементов из $\widehat{\Pi}_n$ имеет вид

$$P=\sum_{\underline{i}\,\geq\,\underline{0}}\frac{\underline{x}^{\underline{i}}}{\underline{i}!}P_{(\underline{i})},\qquad \text{где}\quad \underline{x}^{\underline{i}}=x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n},\quad i!=i_1!\dots i_n!,$$

$$P_{(\underline{i})}=\underline{i}!\sum_{\substack{\underline{k}\in\mathbb{N}_0^{n-1}\times\mathbb{Z}\\ |\underline{k}|-|\underline{i}|\leq d=\mathbf{ord}(P)}}\alpha_{\underline{k},\underline{i}}\,\underline{\partial}^{\underline{k}}\in V_n\cap\Pi_n,\qquad \alpha_{\underline{k},\underline{i}}\in K_y,\qquad \text{— слайс;}$$

здесь $|\underline{i}|=i_1+\dots+i_n$.

Частичное разложение на слайсы имеет вид $P=\sum_{q\geq 0}P_{[q]}$, где

$$P_{[q]}:=\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}_0^n,\ |\underline{k}|=q}\frac{x^{\underline{k}}}{\underline{k}!}P_{(\underline{k})}.$$

Для оператора $P\in\widehat{\Pi}_n$ полагаем $\overline{P}:=P|_{y=0}$. Через $\widetilde{K}$ обозначаем расширение поля K при помощи некоторых корней из единицы.

2. КОЛЬЦО $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ И ЕГО ФУНКЦИЯ ПОРЯДКА **ord**

Обозначим через $K_y := K[[y_1,\dots,y_m]]$, $m\geq 0$, кольцо формальных степенных рядов над K (если $m=0$, положим $K_y=K$). В этом разделе мы определяем симметричную версию пополнения алгебры операторов в частных производных $D_n = K_y[[x_1,\dots,x_n]][\partial_1,\dots,\partial_n]$. Это пополнение можно рассматривать как простой чисто алгебраический аналог алгебры (аналитических) псевдодифференциальных операторов на многообразии. Впервые такое пополнение появилось в работе [9]. Здесь мы приводим изложение его свойств с небольшими дополнениями по сравнению с указанной работой, при этом мы будем использовать несколько иные обозначения, чем в [9, Sect. 5].

Положим $\widehat{R}_y := K_y[[x_1,\dots,x_n]]$. Рассмотрим векторное K-пространство

$$\mathcal{M}_n := \widehat{R}_y[[\partial_1,\dots,\partial_n]] = \left\{\sum_{\underline{k}\,\geq\,\underline{0}} a_{\underline{k}}\,\underline{\partial}^{\underline{k}}\ \middle|\ a_{\underline{k}}\in\widehat{R}_y\ \ \forall\,\underline{k}\in\mathbb{N}_0^n\right\},$$

где $\underline{k}$ — мультииндекс, $\underline{\partial}^{\underline{k}}=\partial_1^{k_1}\dots\partial_n^{k_n}$ и $\underline{k}\geq\underline{0}$ означает, что $k_i\geq 0$ для всех $1\leq i\leq n$.

Пусть $v\colon \widehat{R}_y\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ — дискретное нормирование, определенное по единственному максимальному идеалу $\mathfrak{m}=(y_1,\dots,y_m;x_1,\dots,x_n)$ кольца $\widehat{R}_y$. Положим $|\underline{k}|=k_1+\dots+k_n$.

Определение 2.1. Для любого элемента $0\neq P:=\sum_{\underline{k}\,\geq\,\underline{0}}a_{\underline{k}}\,\underline{\partial}^{\underline{k}}\in\mathcal{M}_n$ определим его *порядок*

$$\mathbf{ord}(P):=\sup\bigl\{|\underline{k}|-v(a_{\underline{k}})\ \big|\ \underline{k}\in\mathbb{N}_0^n\bigr\}\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}\tag{2.1}$$

и положим $\mathbf{ord}(0):=-\infty$. Определим

$$\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}:=\bigl\{Q\in\mathcal{M}_n\ \big|\ \mathbf{ord}(Q)<\infty\bigr\}.$$

Пусть $P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. Тогда однозначно определены коэффициенты $\alpha_{\underline{k},\underline{i}} \in K$ такие, что

$$P = \sum_{\underline{k},\underline{i} \geq \underline{0}} \alpha_{\underline{k},\underline{i}}\, \underline{x}^{\underline{i}}\, \underline{\partial}^{\underline{k}}, \tag{2.2}$$

где $\underline{i} \in \mathbb{N}_0^{n+m}$, $\underline{x}^{\underline{i}} = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} y_1^{i_{n+1}} \dots y_m^{i_{n+m}}$.

Для любого $m \geq -d := \mathbf{ord}(P)$ пусть

$$P_m := \sum_{|\underline{i}|-|\underline{k}|=m} \alpha_{\underline{k},\underline{i}}\, \underline{x}^{\underline{i}}\, \underline{\partial}^{\underline{k}}$$

— *однородная компонента* степени m оператора P. Заметим, что $\mathbf{ord}(P_m) = -m$ и определено разложение на *однородные компоненты* $P = \sum_{m=-d}^{\infty} P_m$.

Замечание 2.1. Для оператора в частных производных P с *постоянным* старшим символом порядок $\mathbf{ord}(P)$ и обычный порядок совпадают.

Определение 2.2. *Старшим символом* оператора $P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ назовем $\sigma(P) := P_{\mathbf{ord}(P)} = P_{-d}$. Будем говорить, что $P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ является *однородным*, если $P = \sigma(P)$.

Теорема 2.1. *Имеют место следующие свойства пространства* $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$:

(1) $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ *— кольцо (с естественными операциями* $\cdot$, $+$, *происходящими из* D_n); $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} \supset D_n$;

(2) $\widehat{R}_y$ *имеет естественную структуру левого* $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$*-модуля, согласованную с его естественной структурой левого* D_n*-модуля*;

(3) *имеется естественный изоморфизм векторных* K*-пространств*

$$\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}/\mathfrak{m}\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} \to K[\partial_1, \dots, \partial_n];$$

(4) *операторы из* $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ *могут реализовывать произвольные эндоморфизмы* K*-алгебры* $\widehat{R}_y$, *непрерывные в* $\mathfrak{m}$*-адической топологии*;

(5) *в этом кольце есть дельта-функции Дирака, операторы интегрирования, разностные операторы.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) по существу доказаны в [9, Theorem 5.3] (наше расширение кольца коэффициентов не существенно для доказательства).

Докажем утверждение (4). Пусть $\alpha \in \mathrm{End}^{\mathrm{c}}_{K\text{-alg}}\widehat{R}$ — эндоморфизм непрерывных алгебр. Тогда он определяется образами $\alpha(x_i) \in \mathfrak{m}$. Положим $u_i = \alpha(x_i) - x_i$ и определим $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} \ni P_\alpha = \sum_{\underline{i} \geq 0} (\underline{i}!)^{-1} \underline{u}^{\underline{i}} \underline{\partial}^{\underline{i}}$. Тогда для любого $f \in \widehat{R}$ имеем

$$P_\alpha \circ f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n);$$

в частности, P_α реализует эндоморфизм α. Заметим, что P_α можно получить следующим образом. Рассмотрим коммутативное кольцо степенных рядов $K[[y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n; \partial_1, \dots, \partial_n]]$ с умножением, обозначаемым через $*$. Если взять для экспоненты $\exp(u_1 * \partial_1 + \ldots + u_n * \partial_n)$ ее ряд Тейлора, записать все коэффициенты в нем при степенях ∂_i слева и заменить затем $*$ на $\cdot$, мы получим оператор P_α.

Докажем утверждение (5). Заметим, что $\delta_i := \exp((-x_i) * \partial_i)$ (частный случай оператора сдвига P_α) реализует i-ю дельта-функцию Дирака (ср. [9, Example 5.4])

$$\delta_i \circ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n);$$

операторы

$$\int_i := \bigl(1 - \exp((-x_i) * \partial_i)\bigr) \cdot \partial_i^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} (-\partial)^k$$

реализуют операторы интегрирования (ср. [9, Example 5.5])

$$\int_i \circ x_i^m = \frac{x_i^{m+1}}{m+1};$$

обыкновенные разностные операторы $\sum_{i=0}^{M} f_i(n)T^i$, где $T\circ f(n) = f(n+1)$, можно получить, например, так:

$$\sum_{i=0}^{M} f_i(n)T^i \hookrightarrow \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}, \qquad T\mapsto x, \quad n\mapsto -x\partial. \qquad \square$$

Замечание 2.2. В отличие от обычного кольца операторов в частных производных, кольцо $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ содержит делители нуля. Имеются следующие очевидные свойства функции порядка и старшего символа (см. доказательство теоремы 5.3 в [9]):

(1) $\mathbf{ord}(P\cdot Q) \le \mathbf{ord}(P) + \mathbf{ord}(Q)$, и равенство имеет место, если $\sigma(P)\cdot\sigma(Q)\neq 0$;

(2) $\sigma(P\cdot Q) = \sigma(P)\cdot\sigma(Q)$ при условии $\sigma(P)\cdot\sigma(Q)\neq 0$;

(3) $\mathbf{ord}(P+Q) \le \max\{\mathbf{ord}(P), \mathbf{ord}(Q)\}$.

В частности, функция $-\mathbf{ord}$ определяет дискретное псевдонормирование на кольце $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$.

Замечание 2.3. Возможны и другие способы определения “симметричного” пополнения кольца D_n (см. [54, п. 2.1.5]). Например, для каждой последовательности $\{(P_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ в $\mathfrak{m}D_n$ такой, что $P_n(R)$ сходится равномерно в $\widehat{R}$ (т.е. для любого $k>0$ существует $N>0$ такое, что $P_n(\widehat{R})\subseteq \mathfrak{m}^k$ для $n\ge N$), мы можем определить k-линейный оператор $P\colon \widehat{R}\to\widehat{R}$ как

$$P(f) = \varinjlim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{n} P_v(f), \qquad P := \sum_n P_n,$$

и определить пополнение как кольцо, состоящее из таких операторов. Это пополнение больше, но $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ обладает лучшими свойствами, достаточными для многих целей. В частности, теория классификации из [54] имеет дело с коммутативными подкольцами, принадлежащими более узкому кольцу $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$.

Теперь мы выведем одно неожиданное следствие нашей первой теоремы — новое доказательство формулы Абьянкара (см. [1; 3, Ch. III, § 2; 16; 18]). Введем сначала обозначения, следуя изложению [3].

Положим

$$\mathrm{MA}_n^0((K)) = \bigl\{F = (F_1,\dots,F_n) \bigm| F_i \in K[[x_1,\dots,x_n]],\ F_i(0)=0,\ i=1,\dots,n\bigr\}.$$

Если $U\in K[[x_1,\dots,x_n]]$ и $F\in \mathrm{MA}_n^0((K))$, положим $U(F) = U(F_1,\dots,F_n)$. Матрица Якоби элемента $F\in\mathrm{MA}_n^0((K))$ равна $J(F) = (\partial_i(F_j))$, а ее определитель обозначим через $j(F) = \det J(F)$. Существует гомоморфизм моноидов

$$J_0\colon\ \mathrm{MA}_n^0((K)) \to M_n(K), \qquad J_0(F) = J(F)(0).$$

Обозначим через $\mathrm{GA}_n^0((K))$ группу обратимых элементов в $\mathrm{MA}_n^0((K))$; она состоит из тех F, для которых $J_0(F)$ обратима. Имеется расщепимая точная последовательность

$$1\to \mathrm{GA}_n^1((K)) \to \mathrm{GA}_n^0((K)) \xrightarrow{J_0} \mathrm{GL}_n(K) \to 1,$$

где для $a=(a_{ij})\in\mathrm{GL}_n(K)$ расщепление задается как $L(a) = (L_1,\dots,L_n)$ с $L_i = \sum_j a_{ij}x_j$, $i = 1,\dots,n$. Ядро $\mathrm{GA}_n^1((K))$ отображения J_0 состоит из тех F вида $\underline{x}+H$, для которых H состоит лишь из мономов степени ≥ 2 от $\underline{x}$.

Для данного F определим дифференцирования $\Delta_i\colon K[[\underline{x}]] \to K[[\underline{x}]]$ как

$$\Delta_i(G) := \det J(F_1, \dots, F_{i-1}, G, F_{i+1}, \dots, F_n), \qquad G \in K[[\underline{x}]].$$

Если $j(F) = 1$, имеем $\Delta_i(F_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Таким образом, Δ_i коммутируют в $K[[F]]$ и, следовательно, также в $K[[\underline{x}]]$. Ясно, что $\Delta_i = \sum_{j=1}^n \Delta_i(x_j)\partial_j$ и отображение $\phi(x_i) := F_i$, $\phi(\partial_i) := \Delta_i$ определяет эндоморфизм кольца D_n. Для $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ знаменитая открытая гипотеза о якобиане утверждает, что обратное отображение $G\colon K[x_1, \dots, x_n] \to K[x_1, \dots, x_n]$ задается многочленами. Понятно, что для этого достаточно показать, что эндоморфизм ϕ n-й алгебры Вейля является автоморфизмом — это формулировка другой открытой гипотезы Диксмье (ср. [19, 48, 49]).

Следствие 2.1 (формула Абьянкара). *Пусть $F \in \mathrm{GA}_n^1((K))$ и $j(F) = 1$. Положим $H_i := x_i - F_i(\underline{x})$. Тогда обратное отображение $G = (G_1, \dots, G_n)$ задается формулой*

$$G_i = \sum_{\underline{p} \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^{\underline{p}}}{\underline{p}!}(x_i H^{\underline{p}}). \tag{2.3}$$

Аналогично для любого $U \in K[[x_1, \dots, x_n]]$ имеем

$$U = \sum_{\underline{p} \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^{\underline{p}}}{\underline{p}!}(U(F) H^{\underline{p}}). \tag{2.4}$$

Доказательство. По теореме 2.1 оператор $S := \exp(-H_1 * \partial_1 - \ldots - H_n * \partial_n)$ действует на $f(x_1, \dots, x_n)$ как $S \circ f(\underline{x}) = f(\underline{x} + H)$; следовательно, $Sf(\underline{x})S^{-1} = f(\underline{x} + H)$ в кольце $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. Поскольку $\mathbf{ord}(\exp(-H_1 * \partial_1 - \ldots - H_n * \partial_n) - 1) < 0$ в силу предположений относительно H, обратный оператор задается рядом $S^{-1} = 1 + S_- + S_-^2 + \ldots$, где $S_- = 1 - S$.

Обозначим через $*\colon D_n \to D_n$, $*(x_i) := x_i$, $*(\partial_i) := -\partial_i$ антиизоморфизм на кольце дифференциальных операторов. Его можно распространить на некоторые операторы из $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, в частности на S, S^{-1} (поскольку S_- есть сумма дифференциальных операторов строго убывающего порядка). Так как

$$*(Sx_iS^{-1}) = *(S^{-1})x_i * (S) = *(F_i) = F_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

получаем $[x_i, *(S)S] = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$; следовательно, $f := *(S)S \in K[[x_1, \dots, x_n]]$. С другой стороны, имеем

$$S\partial_i S^{-1} = \partial_i + S\partial_i(S^{-1}) = \sum_{j=1}^n \Delta_i(x_j)\partial_j, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Действительно, $S^{-1} = 1 - S_-^{-1}$, где все мономы из S_-^{-1} зависят от некоторого ∂_i, а значит, все мономы из $S\partial_i S^{-1}$ также зависят от некоторого ∂_i. С другой стороны, $[F_i, S\partial_j S^{-1}] = [x_i, \partial_j] = \delta_{ij}$, т.е. оператор $S\partial_j S^{-1} - \sum_{j=1}^n \Delta_i(x_j)\partial_j$ коммутирует со всеми F_i. Поскольку все его мономы зависят от некоторого ∂_i, он должен быть равен нулю. Итак, получаем

$$*(S\partial_i S^{-1}) = - * (S^{-1})\partial_i * (S) = *(\Delta_i) = -\sum_{j=1}^n \partial_j \Delta_i(x_j) = -\sum_{j=1}^n \Delta_i(x_j)\partial_j - \sum_{j=1}^n \partial_j(\Delta_i(x_j))$$

при $i = 1, \dots, n$. Заметим, что $\sum_{j=1}^n \partial_j(\Delta_i(x_j)) = 0$. Действительно, матрица $(\Delta_i(x_j))$, $i, j = 1, \dots, n$, является обратной к матрице $J(F)$, т.е. равна $J(G)$. Нетрудно видеть, что $J(G) = E + N$, где N — нильпотентная матрица. Тогда

$$\sum_{j=1}^n \partial_j(\Delta_i(x_j)) = \sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_i(G_j)) = \partial_i(\mathrm{Tr}(J(G))) = 0.$$

Отсюда $*(S^{-1})\partial_i * (S) = S\partial_i S^{-1}$ и, следовательно, $[\partial_i, *(S)S] = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, т.е. $f \in K$. Так как $f = \sum_{\underline{p}\in\mathbb{N}_0^n} (\underline{\partial}^{\underline{p}}/\underline{p}!)(H^{\underline{p}})$, это выражение должно быть равно 1, т.е. $*(S) = S^{-1}$.

Теперь имеем $G_i = *(S)x_iS$. Так как $G_i \in K[[x_1, \dots, x_n]]$ и $S = 1 - S_-$, где все мономы из S_- зависят от некоторого ∂_i, достаточно найти только свободный член оператора $*(S)x_i$. Поскольку $*(S) = \exp(\partial_1 * H_1 + \ldots + \partial_n * H_n)$, мы сразу получаем формулу (2.3). Вторая формула (2.4) теперь очевидна. $\square$

3. КОЛЬЦА $\widehat{D}_n$, $\widehat{E}_n$, E_n И ИХ ФУНКЦИЯ ПОРЯДКА ord_n

С технической точки зрения удобнее иметь дело с более узким несимметричным вариантом пополнения $\widehat{D}_n$ (он хорошо приспособлен для классификации коммутативных подколец). В частности, для него есть важный для нас аналог теории Шура (см. ниже).

Определение 3.1. Положим $\widehat{D}_1 = D_1$ и определим $\widehat{D}_n = \widehat{D}_n^n[\partial_n]$, где $\widehat{D}_n^n$ — подкольцо в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, состоящее из операторов, *не зависящих от* ∂_n. Очевидно, что $\widehat{D}_n \subset \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$.

Определим ассоциированные псевдодифференциальные кольца $\widehat{E}_n = \widehat{D}_n^n((\partial_n^{-1}))$ и $E_n = D_n^n((\partial_n^{-1}))$ (ср. [54, п. 2.1.4] и [55, определение 1]).

Подмножество

$$\Pi_n = \{P \in \widehat{E}_n \mid \mathbf{ord}(P) < \infty\}, \tag{3.1}$$

очевидно, образует подкольцо. Рассмотрим векторное пространство

$$\widehat{\mathcal{M}}_n := \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\partial_n^i \;\middle|\; a_i \in \widehat{D}_n^n \right\}.$$

Функция **ord** естественным образом продолжается на это пространство.

Определим векторное подпространство

$$\widehat{\Pi}_n := \{P \in \widehat{\mathcal{M}}_n \mid \mathbf{ord}(P) < \infty\}.$$

Определение 3.2. Введем *функцию порядка* ord_n на $\widehat{E}_n$ как $\mathrm{ord}_n(P) = l$, если $\widehat{E}_n \ni P = \sum_{s=-\infty}^{l} p_s\partial_n^s$, и положим $\mathrm{ord}_n(0) := -\infty$.

Коэффициент p_l назовем *старшим* и будем обозначать через $\mathrm{HT}_n(P)$ (как элемент, естественно связанный с функцией ord_n).

Символ σ в $\widehat{\Pi}_n$ определяется таким же образом, как в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$.

Функция порядка ord_n и старший коэффициент HT_n ведут себя как функция **ord** и старший символ. А именно, имеют место следующие свойства:

(1) $\mathrm{HT}_n(P \cdot Q) = \mathrm{HT}_n(P) \cdot \mathrm{HT}_n(Q)$ при условии $\mathrm{HT}_n(P) \cdot \mathrm{HT}_n(Q) \neq 0$;

(2) $\mathrm{ord}_n(P \cdot Q) \le \mathrm{ord}_n(P) + \mathrm{ord}_n(Q)$, и равенство достигается, если $\mathrm{HT}_n(P) \cdot \mathrm{HT}_n(Q) \neq 0$;

(3) $\mathrm{ord}_n(P + Q) \le \max\{\mathrm{ord}_n(P), \mathrm{ord}_n(Q)\}$.

В частности, функция $-\mathrm{ord}_n$ определяет дискретное псевдонормирование на кольце $\widehat{D}_n$.

Пространство $\widehat{\Pi}_n$ обладает естественной структурой левого $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$-модуля. Чтобы это показать, нам понадобится еще одно

Определение 3.3. Пусть $P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ — оператор порядка d, заданный как в (2.2). Имеется другая форма разложения оператора P, которую мы будем называть *разложением на слайсы*:

$$P = \sum_{\underline{i}\,\ge\,0} \frac{\underline{x}^{\underline{i}}}{\underline{i}!} P_{(\underline{i})}, \qquad \text{где} \quad \underline{i} \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^m, \quad \underline{x}^{\underline{i}} = x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} y_1^{j_1} \ldots y_m^{j_m}, \quad \underline{i}! = i_1! \ldots j_m!,$$
$$P_{(\underline{i})} = \underline{i}! \sum_{\substack{\underline{k}\,\ge\,0 \\ |\underline{k}|-|\underline{i}|\le d}} \alpha_{\underline{k},\underline{i}}\, \underline{\partial}^{\underline{k}}, \qquad \alpha_{\underline{k},\underline{i}} \in K; \tag{3.2}$$

здесь $|\underline{i}| = i_1 + \ldots + j_m$. Для любого мультииндекса $\underline{i}$ оператор с постоянными коэффициентами $P_{(\underline{i})} \in K[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ называется *$\underline{i}$-м слайсом* оператора P.

Аналогично для всякого элемента $P \in \widehat{\mathcal{M}}_n$ разложение на слайсы определяется как

$$P = \sum_{\underline{i} \geq \underline{0}} \frac{x^{\underline{i}}}{\underline{i}!} P_{(\underline{i})}, \qquad \text{где} \quad P_{(\underline{i})} = \underline{i}! \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}_0^{n-1} \times \mathbb{Z}} \alpha_{\underline{k},\underline{i}}\, \underline{\partial}^{\underline{k}}, \quad \alpha_{\underline{k},\underline{i}} \in K. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. *Существует естественная структура левого $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$-модуля и правого Π_n-модуля на $\widehat{\Pi}_n$: $(P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}, A \in \widehat{\Pi}_n, Q \in \Pi_n) \to P \circ A \circ Q \in \widehat{\Pi}_n$.*

Кроме того, свойства (1)–(3) *из замечания* 2.2 *выполнены также для модуля $\widehat{\Pi}_n$.*

Доказательство. Любой элемент $A \in \widehat{\Pi}_n$ можно однозначно представить как сумму $A = A_+ + A_-$, где $A_+ \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ и $A_- = \sum_{i\geq 0} A_i \partial_n^{-i}$. Определим структуру левого $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$-модуля по правилу $P \circ A := P \cdot A_+ + P \circ A_-$, где

$$P \circ A_- = \sum_{i\geq 0} (P \cdot A_i)\partial_n^{-i}. \tag{3.4}$$

Эта сумма корректно определена по следующим причинам. В силу свойств функции $\mathbf{ord}$ имеем $\mathbf{ord}(A_i) \leq \mathbf{ord}(A) + i$ для любого $i \geq 0$ и, следовательно, $\mathbf{ord}(P \cdot A_i) \leq \mathbf{ord}(P) + \mathbf{ord}(A_i) + i$ (в частности, $\mathbf{ord}(P \circ A_-) < \infty$ и эта сумма корректно определена). Пусть $P \cdot A_i = \sum_{j\geq 0} B_{i,j}\, \partial_n^j$. Тогда

$$B_{i,j} = \sum_{l\geq 0} C_{j+l}^l P_{j+l}\, \partial_n^l(A_i), \qquad \text{где} \quad P = \sum_{l\geq 0} P_l \partial_n^l,$$

и

$$(P \cdot A_i)\partial_n^{-i} = \sum_{k=-i}^{\infty} C_{i,k}\, \partial_n^k, \qquad \text{где} \quad C_{i,k} = B_{i,k+i}.$$

Тогда сумма (3.4) корректно определена, если суммы $\sum_{i\geq 0} C_{i,k}$ корректно определены для любого k. Заметим, что $\mathbf{ord}(C_{i,k}) \leq \mathbf{ord}(P) + \mathbf{ord}(A) - k$, и, следовательно, необходимо изучить разложение на слайсы для $C_{i,k}$. Так как

$$C_{i,k} = B_{i,k+i} = \sum_{l\geq 0} C_{k+i+l}^l\, P_{k+i+l}\, \partial_n^l(A_i)$$

и $\mathbf{ord}(P_l) \leq \mathbf{ord}(P) - l$, то в случае, когда $\alpha := \mathbf{ord}(P) - k - i < 0$, разложение на слайсы имеет вид

$$C_{i,k} = \sum_{|\underline{p}|\geq|\alpha|} \frac{x^{\underline{p}}}{\underline{p}!} (C_{i,k})_{(\underline{p})}.$$

Таким образом, сумма $\sum_{i\geq 0} C_{i,k}$ корректно определена, так как есть лишь конечное число слагаемых вида $(x^{\underline{p}}/\underline{p}!)(C_{i,k})_{(\underline{p})}$ для любого данного $|\underline{p}|$ в разложениях на слайсы.

Аналогично $P \circ A = \sum_{l=0}^{\infty} (P_l \partial_n^l) \circ A$ (так как есть лишь конечное число слагаемых вида $(x^{\underline{p}}/\underline{p}!)((P_l \partial_n^l) \circ A)_{(\underline{p})}$ для любого данного $|\underline{p}|$ во всей сумме) и

$$(P_l \partial_n^l) \circ A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (P_l \partial_n^l) \cdot (A_i \partial_n^{-i})$$

(произведение берется в кольце Π_n), поскольку есть лишь конечное число слагаемых данного ord_n-порядка в этой сумме. Следовательно,

$$P \circ A = \sum_{l\geq 0} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (P_l \partial_n^l) \cdot (A_i \partial_n^{-i});$$

в частности, выполнены все аксиомы из определения левого модуля.

Аналогично определим структуру правого Π_n-модуля по правилу $A\circ Q := A\circ Q_+ + A\circ Q_-$, где $A\circ Q_+ = A_+\cdot Q_+ + A_-\cdot Q_+$ (первое произведение берется в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, а второе в Π_n) и $A\circ Q_- = A_+\circ Q_- + A_-\cdot Q_+$. По тем же причинам, что и выше,

$$A\circ Q=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\geq m}(A_i\partial_n^{-i})\cdot(Q_j\partial_n^{-j}).$$

Следовательно, поскольку Π_n — кольцо,

$$\begin{aligned}(P\circ A)\circ Q&=\sum_{j\geq m}\sum_{l\geq 0}\sum_{i\in\mathbb{Z}}((P_l\partial_n^l)\cdot(A_i\partial_n^{-i}))\cdot(Q_j\partial_n^{-j})=\\&=\sum_{l\geq 0}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\geq m}(P_l\partial_n^l)\cdot((A_i\partial_n^{-i})\cdot(Q_j\partial_n^{-j}))=P\circ(A\circ Q)\end{aligned}$$

и A — бимодуль.

Свойства (1)–(3) теперь очевидны. □

4. КОММУТАТИВНЫЕ ПОДКОЛЬЦА В $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ И ИХ СПЕКТРАЛЬНЫЕ МОДУЛИ

4.1. Спектральные модули. Пусть $B\subset\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ — коммутативное подкольцо.

Определение 4.1. B-модуль $F:=\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}/(x_1,\dots,x_n)\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}\simeq K_y[[\partial_1,\dots,\partial_n]]\cap\Pi_n$ называется *спектральным модулем* кольца B.

Отметим, что F на самом деле является правым $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$-модулем. Однако, поскольку кольцо B коммутативно, мы будем рассматривать F как левый B-модуль, имея в виду естественное правое действие. Следующее предложение объясняет термин “спектральный” (ср. [56, Proposition 4.2]).

Предложение 4.1. *Пусть $K_y=K$. Пусть $B\subset\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ — конечно порожденное коммутативное подкольцо над K_y такое, что спектральный модуль F конечно порожден.*

Для любого характера $\chi_q\colon B\to K_q$, где $q\subset B$ — максимальный идеал, а $K_q=B/q$ — поле вычетов, рассмотрим векторное пространство

$$\mathsf{Sol}(B,\chi_q)=\big\{f\in K_q[[x_1,\dots,x_n]]\;\big|\;Q(f)=\chi_q(Q)f\;\;\forall Q\in B\big\}.$$

Заметим, что $\mathsf{Sol}(B,\chi_q)$ имеет естественную B-модульную структуру:

$$f\in\mathsf{Sol}(B,\chi_q)\qquad\Rightarrow\qquad Q(f)\in\mathsf{Sol}(B,\chi_q)\quad\forall Q\in B.$$

При этом K-линейное отображение

$$F\xrightarrow{\eta_{\chi_q}}\mathsf{Sol}(B,\chi_q)^*,\qquad\underline{\partial}^{\underline{i}}\mapsto\left(f\mapsto\frac{1}{\underline{p}!}\,\frac{\partial^{|p|}f}{\partial x_1^{p_1}\dots\partial x_n^{p_n}}\bigg|_{(0,0)}\right)\tag{4.1}$$

также B-линейно, где $\mathsf{Sol}(B,\chi_q)^*=\mathrm{Hom}_{K_q}\big(\mathsf{Sol}(B,\chi_q),K_q\big)$ — векторное пространство, двойственное к пространству решений. Более того, индуцированное отображение

$$F|_{\chi_q}:=(B/\ker(\chi_q))\otimes_B F\xrightarrow{\overline{\eta}_{\chi_q}}\mathsf{Sol}(B,\chi_q)^*\tag{4.2}$$

является изоморфизмом B-модулей. В частности, $\dim_K(\mathsf{Sol}(B,\chi_q))<\infty$ для любого χ_q.

Доказательство. В одномерном случае для кольца D_1 изоморфизм (4.2) показан Мамфордом в [35, Sect. 2]. В нашем случае доказательство практически такое же, как и для операторов с частными производными в [9, Theorem 4.5(2)] (см. [8, Theorem 1.14] и [27, Remark 2.3]). Для удобства читателя мы приводим его здесь.

Сначала заметим, что отображение

$$\mathrm{Hom}_{K_q}(F, K_q) \xrightarrow{\Phi} K_q[[x_1, \ldots, x_n]], \qquad \lambda \mapsto \sum_{\underline{p} \geq 0} \frac{1}{\underline{p}!} \lambda(\underline{\partial}^{\underline{p}}) \underline{x}^{\underline{p}} \tag{4.3}$$

является изоморфизмом левых $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$-модулей, где структура $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$-модуля на Hom_{K_q} задается, как обычно, по правилу $(P \cdot \lambda)(-) := \lambda(- \cdot P)$ и $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ действует на $K_q[[x_1, \ldots, x_n]]$ как обычный оператор на функцию.

Пусть $B \xrightarrow{\chi_q} K_q$ — характер. Тогда $K_q = B/\ker(\chi_q)$ — левый B-модуль. Получаем B-линейное отображение

$$\Psi\colon \mathrm{Hom}_B(F, K_q) \xrightarrow{I} \mathrm{Hom}_{K_q}(F, K_q) \xrightarrow{\Phi} K_q[[x_1, \ldots, x_n]], \tag{4.4}$$

где I — забывающее отображение. Образ I состоит из тех K_q-линейных функционалов, которые также являются B-линейными, т.е.

$$\mathsf{Im}(I) = \bigl\{\lambda \in \mathrm{Hom}_{K_q}(F, K_q) \bigm| \lambda(- \cdot P) = \chi_q(P) \cdot \lambda(-) \ \ \forall\, P \in B\bigr\}.$$

Отсюда следует, что $\mathsf{Im}(\Psi) = \mathsf{Sol}(B, \chi_q)$. Далее, имеем канонический изоморфизм B-модулей $\mathrm{Hom}_B(F, K_q) \cong \mathrm{Hom}_{K_q}((B/\ker(\chi_q)) \otimes_B F, K_q)$. Снова дуализируя, мы получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Psi^*\colon \mathsf{Sol}(B, \chi_q)^* \to \bigl((B/\ker(\chi_q)) \otimes_B F\bigr)^{**} \cong (B/\ker(\chi_q)) \otimes_B F.$$

Остается заметить, что Ψ^* также является B-линейным и $(\Psi^*)^{-1} = \overline{\eta}_{\chi_q}$. $\square$

Типичными примерами колец, удовлетворяющих условиям из предложения, являются кольца с особым условием для их старших символов.

Теорема 4.1 [27, Theorem 2.1]**.** *Пусть $P_1, \ldots, P_n \in D_n = K[[x_1, \ldots, x_n]][\partial_1, \ldots, \partial_n] \subset \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ — произвольные коммутирующие операторы положительного порядка. Пусть B — произвольная коммутативная K-подалгебра в D_n, содержащая операторы $P_1, \ldots, P_n$. Предположим, что пересечение характеристических дивизоров операторов $P_1, \ldots, P_n$ пусто.*

Тогда отображение из $\mathrm{gr}(D_n)$ в $\mathrm{gr}(D_n)/\mathfrak{m}\mathrm{gr}(D_n) = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, где gr обозначает ассоциированное градуированное кольцо относительно фильтрации, заданной обычным порядком на D_n, индуцирует вложение на $\mathrm{gr}(B)$, а также имеют место следующие свойства:

1. *$K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ конечно порожден как $\mathrm{gr}(B)$-модуль*;
2. *кольца B и $\mathrm{gr}(B)$ являются конечно порожденными целыми K-алгебрами размерности Крулля n*;
3. *аффинное многообразие $U = \mathrm{Spec}(B)$ над K естественным образом дополняется до n-мерного неприводимого проективного многообразия X с краем C, который является целым дивизором Вейля, не содержащимся в сингулярном множестве многообразия X*; *более того, C является унирациональным и обильным дивизором $\mathbb{Q}$-Картье*;
4. *B-модуль $F = D_n/\mathfrak{m}D_n$, определяющий когерентный пучок на U, естественно продолжается до когерентного пучка без кручения $\mathcal{F}$ на X. При этом индекс самопересечения (C^n) на X равен $\delta^n/\mathrm{rk}(\mathcal{F})$, где*

$$\delta = \mathrm{gcd}\bigl\{n \bigm| B_n/B_{n-1} \neq 0,\ n \geq 1\bigr\}. \tag{4.5}$$

4.2. Г-порядок и квазиэллиптические кольца. В этом пункте мы опишем упомянутые во введении коммутативные подкольца в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ — квазиэллиптические кольца, которые допускают эффективное описание в терминах алгебро-геометрических спектральных данных.

Сначала введем понятие Г-порядка. Этот порядок определен на *некоторых элементах* кольца $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ или кольца $\widehat{E}_n$.

Определение 4.2. Обозначим через $\widehat{D}_n^{i_1,\dots,i_q}$ подкольцо в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, состоящее из операторов, *не зависящих* от $\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_q}$. Определим Г-порядок рекурсивно.

Скажем, что ненулевой оператор $P\in\widehat{D}_n^{2,3,\dots,n}$ имеет Г-порядок k_1, если $P=\sum_{s=0}^{k_1}p_s\partial_1^s$, где $0\neq p_{k_1}\in\widehat{R}$.

Будем говорить, что ненулевой оператор $P\in\widehat{D}_n^{i+1,i+2,\dots,n}$ имеет Г-порядок $(k_1,\dots,k_i)$, если $P=\sum_{s=0}^{k_i}p_s\partial_i^s$, где $p_s\in\widehat{D}_n^{i,i+1,\dots,n}$, а Г-порядок оператора p_{k_i} равен $(k_1,\dots,k_{i-1})$.

Будем говорить, что ненулевой оператор $P\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ *имеет* Г-*порядок*

$$\mathrm{ord}_\Gamma(P)=(k_1,\dots,k_n),$$

если $P=\sum_{s=0}^{k_n}p_s\partial_n^s$, где $p_s\in\widehat{D}_n^n$ и Г-порядок оператора p_{k_n} равен $(k_1,\dots,k_{n-1})$.

В этой ситуации скажем, что оператор P является *моническим*, если старший коэффициент $p_{k_1,\dots,k_n}$ (определяемый рекурсивно аналогичным образом) равен 1.

Это же определение работает для колец $\widehat{E}_n$, $\widehat{\Pi}_n$ с минимальной модификацией на последнем шаге: $P\in\widehat{\Pi}_n$ *имеет* Г-*порядок*

$$\mathrm{ord}_\Gamma(P)=(k_1,\dots,k_n),$$

если $P=\sum_{s=-\infty}^{k_n}p_s\partial_n^s$, где $p_s\in\widehat{D}_n^n$ и Г-порядок оператора p_{k_n} равен $(k_1,\dots,k_{n-1})$.

Заметим, что Г-порядки упорядочены относительно антилексикографического порядка на $\mathbb{Z}^n$, т.е. $(k_1,\dots,k_n)<(k_1',\dots,k_n')$ тогда и только тогда, когда либо $k_n<k_n'$, либо $k_n=k_n'$ и $k_{n-1}<k_{n-1}'$, либо $k_n=k_n'$, $k_{n-1}=k_{n-1}'$ и $k_{n-2}<k_{n-2}'$ и т.д.

Определение 4.3. Будем говорить, что оператор $P\in\widehat{E}_n$ *удовлетворяет условию* A_1, если $\mathbf{ord}(P)\le|\mathrm{ord}_\Gamma(P)|$.

Легко видеть, что произвольный *монический* оператор P удовлетворяет условию A_1 тогда и только тогда, когда $\mathbf{ord}(P)=|\mathrm{ord}_\Gamma(P)|$.

Г-порядок имеет схожие свойства с функцией **ord**.

Лемма 4.1 (ср. [54, лемма 2.7]). *Предположим, что* $P_1,P_2\in\widehat{E}_n$ *удовлетворяют условию* A_1. *Тогда* P_1P_2 *удовлетворяет условию* A_1 *и* $\mathrm{ord}_\Gamma(P_1P_2)=\mathrm{ord}_\Gamma(P_1)+\mathrm{ord}_\Gamma(P_2)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из второго и свойств функции **ord**. Второе утверждение выводится индукцией по n с использованием свойств старшего коэффициента HT_n. Для $n=1$ это верно, потому что $\widehat{R}_y$ — область целостности. $\square$

Следствие 4.1. *Если оператор* $S=1-S_-$, *где* $S_-\in\widehat{D}_n^n[[\partial_n^{-1}]]\partial_n^{-1}$, *удовлетворяет условию* A_1 (*или, что эквивалентно,* $\mathbf{ord}(S)=|\mathrm{ord}_\Gamma(S)|=0$), *то оператор* $S^{-1}=1+\sum_{q=1}^{\infty}(S_-)^q$ *также удовлетворяет ему* (*и* $\mathbf{ord}(S^{-1})=0$, $|\mathrm{ord}_\Gamma(S^{-1})|=0$).

Доказательство. В силу свойств функции **ord** имеем $\mathbf{ord}(S_-)\le 0$. Следствие будет доказано, если мы покажем, что ряд $1+\sum_{q=1}^{\infty}(S_-)^q$ определен корректно. В силу свойств функции ord_n имеем $\mathrm{ord}_n(S_-)^k\le -k$. Следовательно, ряд корректно определен и задает обратный оператор. Ясно, что он удовлетворяет условию A_1 и $\mathrm{ord}_\Gamma(S^{-1})=(0,\dots,0)$. $\square$

Определение 4.4. Подкольцо $B\subset\widehat{D}_n\subset\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ коммутирующих операторов называется 1-*квазиэллиптическим* (или просто квазиэллиптическим для краткости), если существуют n операторов $P_1,\dots,P_n\in B$ таких, что

(1) $\mathrm{ord}_\Gamma(P_i)=(0,\dots,0,1,0,\dots,0,l_i)$ для $1\le i<n$, где 1 стоит на i-м месте и $l_i\in\mathbb{Z}_+$;

(2) $\mathrm{ord}_\Gamma(P_n)=(0,\dots,0,l_n)$, где $l_n>0$;

(3) для $1\le i\le n$ имеем $\mathbf{ord}(P_i)=|\mathrm{ord}_\Gamma(P_i)|$;

(4) P_i монические.

В общем случае мы называем операторы $P_1, \ldots, P_n \in \widehat{E}_n$ *формально квазиэллиптическими*, если они удовлетворяют указанным выше условиям (1)–(3), и мы называем их *моническими формально квазиэллиптическими*, если они удовлетворяют условиям (1)–(4).

Замечание 4.1. По определению квазиэллиптические кольца содержатся в $\widehat{D}_n$. Однако мы будем рассматривать их в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ из-за слабого отношения эквивалентности, используемого в одной из классификационных теорем (теореме 8.2) ниже. Кроме того, если мы рассмотрим квазиэллиптическое кольцо ранга 1 (см. определение 6.8 ниже), обладающее некоторыми дополнительными естественными свойствами, то его централизатор в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ будет тоже коммутативным квазиэллиптическим кольцом, содержащимся в $\widehat{D}_n$. Доказательство этого результата представляется весьма нетривиальным и требует не только техники, разработанной в этой статье, но и нескольких дополнительных результатов, которые мы представим в следующей работе.

Пример 4.1. Непосредственно из определения 4.4 следует, что 1-квазиэллиптические подалгебры в $\widehat{D}_1$ являются в точности *эллиптическими* подалгебрами обыкновенных дифференциальных операторов.

Напомним, обыкновенный дифференциальный оператор $P = a_n\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \ldots + a_0 \in$ $\in D_1$ положительного порядка n называется (*формально*) *эллиптическим*, если $a_n \in K^*$. Кольцо $B \subset D_1$, содержащее эллиптический оператор, называется *эллиптическим*.

Существует хорошо известная обширная теория классификации таких колец (см. введение).

5. ТЕОРИЯ ШУРА ДЛЯ $\widehat{D}_n$

Многие свойства 1-квазиэллиптических колец основаны на технике, развитой в многомерном аналоге теории Шура. В данном разделе мы собрали технические формулировки этой теории для кольца $\widehat{D}_n$. Обзор теории Шура для кольца D_1 см. в [33] и [41, Sect. 5] для относительного случая. Для кольца $\widehat{D}_2$ эта теория содержится в [54, 58].

5.1. Корни из формально квазиэллиптических операторов.

Лемма 5.1. *Пусть* $P_1, \ldots, P_n \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ *— монические формально квазиэллиптические операторы такие, что* $\mathrm{ord}_\Gamma(P_i) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, l_i)$, $i < n$, *где* 1 *стоит на* i*-м месте, а* $\mathrm{ord}_\Gamma(P_n) = (0, \ldots, 0, l_n)$. *Тогда*

(1) *существуют единственные монические коммутирующие операторы* $L_1, \ldots, L_n \in \widehat{E}_n$ *с* $\mathrm{ord}_\Gamma(L_i) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 *стоит на* i*-м месте*) *такие, что* $L_n^{l_n} = P_n$ *и* $L_i L_n^{l_i} = P_i$, $i < n$;

(2) *если* $P_1, \ldots, P_n$ *удовлетворяют условию* A_1, *то* $L_1, \ldots, L_n$ *удовлетворяют условию* A_1; *в частности, они монические и формально квазиэллиптические*;

(3) *если* $P_1, \ldots, P_n \in D_n$, *то* $L_1, \ldots, L_n \in E_n$.

Доказательство представляет собой простое обобщение доказательства аналогичного утверждения из [54, лемма 2.9].

Начнем с утверждения (1). Мы можем найти все коэффициенты оператора $L_n = \partial_n + u_0 +$ $+ u_{-1}\partial_n^{-1} + \ldots$, где $u_i \in \widehat{D}_n^n$, шаг за шагом, решая систему уравнений, которая получается сравнением коэффициентов при P_n и $L_n^{l_n}$: если $P_n = \sum_{i=1}^{l_n} p_i\partial_n^i$ и $p_{l_n} = 1$, то

$$l_n u_0 = p_{l_n-1}, \qquad l_n u_{-i} + F(u_0, \ldots, u_{-i+1}) = p_{l_n-1-i}, \tag{5.1}$$

где F — многочлен от $u_0, \ldots, u_{-i+1}$ и их производных. Ясно, что эта система однозначно разрешима. Следовательно, оператор L_n определен однозначно. Заметим, что L_n обратим в $\widehat{E}_n$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(L_n^{-1}) = (0, \ldots, 0, -1)$. Следовательно, операторы $L_i = P_i L_n^{-l_i}$ при $i < n$ также определены однозначно.

Те же аргументы показывают справедливость утверждения (3).

Доказательство утверждения (2) проводится по индукции. Если $P_1,\dots,P_n$ удовлетворяют условию A_1, то из уравнений (5.1) получаем $\mathbf{ord}(u_0)\le 1$ и $\mathbf{ord}(u_{-i})\le 1+i$, так как $F(u_0,\dots,u_{-i+1})$ — это коэффициент при ∂_n^{-i} выражения $(\partial_n+u_0+\ldots+u_{-i+1}\partial_n^{-i+1})^{l_n}$, порядок которого не меньше $1+i$, как можно показать по индукции (и, очевидно, $\mathbf{ord}(p_{l_n-1-i})\le$ $\le 1+i$). Тогда $\mathbf{ord}(L_n)=1$ (поскольку $\mathbf{ord}(\partial_n)=1$). Очевидно, $\mathrm{ord}_\Gamma(L_n)=(0,\dots,0,1)$, и, следовательно, L_n удовлетворяет условию A_1. □

5.2. Нормализованные квазиэллиптические операторы.

Определение 5.1. Будем говорить, что монические формально квазиэллиптические операторы $P_1,\dots,P_n\in\widehat{E}_n$ являются *почти нормализованными*, если

$$P_n=\partial_n^{l_n}+\sum_{s=-\infty}^{l_n-1}p_{n,s}\,\partial_n^s,\qquad P_i=\partial_i\partial_n^{l_i}+\sum_{s=-\infty}^{l_i-1}p_{i,s}\,\partial_n^s,\quad i<n,$$

где $p_{j,s}\in\widehat{D}_n^n$.

Будем говорить, что $P_1,\dots,P_n$ *нормализованы*, если

$$P_n=\partial_n^{l_n}+\sum_{s=-\infty}^{l_n-2}p_{n,s}\,\partial_n^s,\qquad P_i=\partial_i\partial_n^{l_i}+\sum_{s=-\infty}^{l_i-1}p_{i,s}\,\partial_n^s,\quad i<n,$$

где $p_{j,s}\in\widehat{D}_n^n$.

Назовем коммутативное подкольцо $B\subset\widehat{E}_n$ *нормализованным*, если оно содержит набор нормализованных квазиэллиптических операторов.

Следствие 5.1. *Пусть $P_1,\dots,P_n\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ — монические формально квазиэллиптические операторы из леммы 5.1. Они нормализованы (почти нормализованы) тогда и только тогда, когда нормализованы (почти нормализованы) соответствующие операторы $L_1,\dots,L_n$.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из доказательства леммы 5.1. □

Лемма 5.2. *Для произвольных монических формально квазиэллиптических операторов $P_1,\dots,P_n\in\widehat{E}_n$ таких, что $\mathrm{ord}_\Gamma(P_i)=(0,\dots,0,1,0,\dots,l_i)$, $i<n$, где 1 стоит на i-м месте, а $\mathrm{ord}_\Gamma(P_n)=(0,\dots,0,l_n)$, справедливы следующие утверждения:*

(1) *существует обратимая функция $f\in\widehat{R}_y$ такая, что операторы $f^{-1}P_1f,\dots,f^{-1}P_nf$ почти нормализованы;*

(2) *если $P_1,\dots,P_n$ почти нормализованы, то существует обратимый оператор $S\in\widehat{D}_n^n$ вида $S=\exp\bigl(\int p\,dx_n\bigr)$ с $\mathbf{ord}(S)=0$, где $\partial_i(p)=0$ при $i<n$, такой, что операторы $S^{-1}P_1S,\dots,S^{-1}P_nS$ нормализованы. В сочетании с утверждением (1) отсюда следует, что для любых монических формально квазиэллиптических операторов $P_1,\dots,P_n\in$ $\in\widehat{E}_n$ существует обратимый оператор $S\in\widehat{D}_n^n$ с $\mathbf{ord}(S)=0$ такой, что операторы $S^{-1}P_1S,\dots,S^{-1}P_nS$ нормализованы;*

(3) *если S_1 — другой оператор с таким свойством, то все коэффициенты оператора $S^{-1}S_1$ принадлежат K_y; в частности, если $K_y=K$, то $S^{-1}S_1\in K$.*

Доказательство представляет собой простое обобщение доказательства аналогичного утверждения из [54, лемма 2.10].

(1) Покажем, что существует обратимая функция $f\in\widehat{R}_y$ такая, что

$$f^{-1}P_nf=\partial_n^{l_n}+\sum_{s=-\infty}^{l_n-1}p'_{n,s}\,\partial_n^s,\qquad f^{-1}P_if=\partial_i\,\partial_n^{l_i}+\sum_{s=-\infty}^{l_i-1}p'_{i,s}\,\partial_n^s.\tag{5.2}$$

Пусть $P_i = \sum_{s=-\infty}^{l_i} p_{i,s}\partial_n^s$ и $p_{i,l_i} = \partial_i\partial_n^{l_i} + g_i$, $g_i \in \widehat{R}_y$. Поскольку операторы P_i коммутируют, g_i не зависят от x_n ни при каком $i < n$.

Несложные прямые вычисления показывают, что для любой обратимой функции $f \in \widehat{R}_y$ имеем

$$f^{-1}P_n f = \partial_n^{l_n} + \sum_{s=-\infty}^{l_n-1} p'_{n,s}\,\partial_n^s, \qquad f^{-1}P_i f = \bigl(\partial_i + f^{-1}\partial_i(f) + g_i\bigr)\partial_n^{l_i} + \sum_{s=-\infty}^{l_i-1} p'_{i,s}\,\partial_n^s, \quad i<n,$$

с некоторыми коэффициентами $p'_{j,s} \in \widehat{D}_n^n$. Теперь мы можем построить нужную функцию по индукции. Сначала мы можем найти функцию f_1 в виде $f_1 = \exp\bigl(-\int g_1\,dx_1\bigr)$. После сопряжения всех операторов с f_1 получаем новые операторы $P_1,\dots,P_n$, где P_1 имеет выражение, указанное в (5.2). Поскольку операторы P_i коммутируют, новые функции g_i, $i>1$, не зависят от x_n, x_1 (как показывают несложные прямые вычисления со старшими членами). Тогда мы можем найти функцию f_2 в виде $f_2 = \exp\bigl(-\int g_2\,dx_2\bigr)$. Так как она тоже не зависит от x_n, x_1, то после сопряжения всех операторов с f_2 получим новые операторы $P_1,\dots,P_n$, где P_1, P_2 имеют выражения, указанные в (5.2). Продолжая эту процедуру, мы можем найти нужную функцию как произведение $f := f_1\dots f_{n-1}$.

(2) По утверждению (1), сопрягая соответствующей функцией f, можно свести утверждение к операторам $P_1,\dots,P_n$, имеющим вид правой части в (5.2) (очевидно, $\mathbf{ord}(f)=0$). Тогда непосредственные вычисления показывают, что для любого $i<n$

$$0 = [P_i,P_n] = \partial_i(p_{n,l_n-1})\partial_n^{l_n+l_i-1} + A,$$

где A состоит из мономов ord_n-порядка меньше l_n+l_i-1, т.е. выражение p_{n,l_n-1} не зависит от x_i, $i<n$. Следовательно, мы можем искать такой оператор S, что $\partial_i(S)=0$, $i<n$. Прямые вычисления (заметим, что такой S коммутирует с $p_{n,l_n-1} \in \widehat{D}_n^n$) показывают, что

$$\begin{aligned} S^{-1}P_nS &= \partial_n^{l_n} + \bigl(p_{n,l_n-1} + l_nS^{-1}\partial_n(S)\bigr)\partial_n^{l_n-1} + \sum_{s=-\infty}^{l_n-2} p'_{n,s}\,\partial_n^s,\\ S^{-1}P_iS &= \partial_i\,\partial_n^{l_i} + \sum_{s=-\infty}^{l_i-1} p'_{i,s}\,\partial_n^s. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Следовательно, мы можем найти нужный оператор в виде $S = \exp\bigl(-\int(p_{n,l_n-1}/l_n)\,dx_n\bigr)$, где интеграл выбираем так, чтобы $\bigl(-\int(p_{n,l_n-1}/l_n)\,dx_n\bigr)\big|_{\underline{x=0}} = 0$. Поскольку $\mathbf{ord}(P_n)=l_n$, имеем $\mathbf{ord}(p_{n,l_n-1}) \le 1$ и, следовательно, $\mathbf{ord}\bigl(-\int(p_{n,l_n-1}/l_n)\,dx_n\bigr) \le 0$. Так как $p_{n,l_n-1} \in \widehat{D}_n^n$ и коэффициенты выражения $\bigl(-\int(p_{n,l_n-1}/l_n)\,dx_n\bigr)$ не зависят от $x_1,\dots,x_{n-1}$, экспонента определена корректно и ее порядок равен нулю. Ясно, что S обратим. Поскольку сопряжение с f и с S сохраняет ord_Γ-порядки и $\mathbf{ord}$-порядки операторов P_i, нормализованные операторы также формально квазиэллиптичны.

(3) Пусть $S' := S^{-1}S_1$. Тогда сопряжение с S' сохраняет нормализованный вид операторов $P_1,\dots,P_n$. Поэтому из (5.3) следует, что $\partial_n(S')=0$. Ясно, что мы также должны иметь $(S')^{-1}\partial_iS' = \partial_i$, откуда $\partial_i(S')=0$ для всех $i\le n$. Следовательно, коэффициенты оператора S' принадлежат K_y. Если $K_y = K$, то, поскольку $\mathbf{ord}(S')=0$, имеем $S'\in K$. $\square$

5.3. Многомерный аналог теоремы Шура.

Теорема 5.1. *Пусть $L_1,\dots,L_n \in \widehat{E}_n$ — монические почти нормализованные формально квазиэллиптические операторы с* $\mathrm{ord}_\Gamma(L_i) = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, *где* 1 *стоит на* i*-м месте,* $1\le i\le n$:

$$L_n = \partial_n + v_{n,0} + \sum_{q=1}^{\infty} v_{n,q}\,\partial_n^{-q}, \qquad L_i = \partial_i + \sum_{q=1}^{\infty} v_{i,q}\,\partial_n^{-q}, \quad i<n.$$

Тогда

(1) *существует монический обратимый оператор* $S = 1 + S^-$, *где* $S^- \in \widehat{D}_n^n[[\partial_n^{-1}]]\partial_n^{-1}$ *и* $\mathrm{ord}_\Gamma(S) = \mathrm{ord}_\Gamma(S^{-1}) = (0,0)$, *такой, что* $S^{-1}\partial_i S = L_i$, $1 \le i < n$, *и* $S^{-1}L_{n,0}S = L_n$, *где* $L_{n,0} = \partial_n + v_{n,0}$. *Кроме того,* S *удовлетворяет условию* A_1; *в частности,*

$$\mathbf{ord}(S) = |\mathrm{ord}_\Gamma(S)| = \mathbf{ord}(S^{-1}) = |\mathrm{ord}_\Gamma(S^{-1})| = 0;$$

(2) *если* S_1 *— другой оператор с таким свойством, то*

$$SS_1^{-1} \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]((L_{n,0}^{-1})) \cap \Pi_n$$

и SS_1^{-1} *удовлетворяет условию* A_1. *В частности, если* $K_y = K$ *или* $SS_1^{-1} \in E_n$, *то* $SS_1^{-1} \in K_y[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]((L_{n,0}^{-1}))$;

(3) *если* $L_1, \dots, L_n \in E_n$, *то* $S \in E_n$.

Доказательство представляет собой простое обобщение аналогичного доказательства леммы 2.11 из [54] (см. также аналогичную теорему в [37]).

(1) Достаточно доказать следующий факт: если

$$L_n = \partial_n + v_{n,0} + \sum_{q=k\ge 1}^{\infty} v_{n,q}\,\partial_n^{-q}, \qquad L_i = \partial_i + \sum_{q=k\ge 1}^{\infty} v_{i,q}\,\partial_n^{-q}, \qquad [L_i, L_j] = 0, \qquad 1 \le i,j < n,$$

то существует оператор $S_k = 1 + s_k\partial_n^{-k}$ с $s_k \in \widehat{D}_n^n$ такой, что

$$S_k^{-1}L_iS_k = \partial_i + \sum_{q=k+1}^{\infty} v'_{i,q}\,\partial_n^{-q}, \quad 1 \le i < n, \qquad S_k^{-1}L_nS_k = \partial_n + v_{n,0} + \sum_{q=k+1}^{\infty} v'_{n,q}\,\partial_n^{-q}.$$

Действительно, если этот факт доказан, то $S^{-1} = \prod_{q=1}^{\infty} S_q$, где S_1 берется для заданных $L_1, \dots, L_n$, S_2 берется для $S_1^{-1}L_iS_1$ и т.д. Нетрудно видеть, что последовательность $\bigl\{\prod_{q=1}^{m} S_q\bigr\}$ сходится в $\widehat{E}_n$ (относительно топологии, заданной псевдонормированием $-\mathrm{ord}_n$), т.е. бесконечное произведение корректно определено.

Чтобы доказать этот факт, заметим сначала, что так как $[L_i, L_j] = 0$, то $\partial_i(v_{j,k}) - \partial_j(v_{i,k}) = 0$ для $i, j \ne n$ и $\partial_n(v_{j,k}) - \partial_j(v_{n,k}) + [v_{n,0}, v_{j,k}] = 0$, $\partial_j(v_{n,0}) = 0$ для $j \ne n$. Кроме того,

$$S_k^{-1}\partial_iS_k = \partial_i + S_k^{-1}\partial_i(S_k) = \partial_i + \partial_i(s_k)\partial_n^{-k} + \dots, \qquad i < n,$$

$$S_k^{-1}L_{n,0}S_k = \partial_n + S_k^{-1}\partial_n(S_k) + S_k^{-1}v_{n,0}S_k = \partial_n + v_{n,0} + \bigl(\partial_n(s_k) + [v_{n,0}, s_k]\bigr)\partial_n^{-k} + \dots,$$

и потому s_k можно найти из следующей системы:

$$\partial_i(s_k) = -v_{i,k}, \quad 1 \le i < n, \qquad \partial_n(s_k) + [v_{n,0}, s_k] = -v_{n,k}. \tag{5.4}$$

Эта система разрешима, так как она совместна и все коэффициенты $v_{i,k}$ принадлежат $\widehat{R}_y$ (так что их всегда можно проинтегрировать).

Поскольку $\mathbf{ord}(L_i) = |\mathrm{ord}_\Gamma(L_i)| = 1$ для всех $1 \le i \le n$, имеем $\mathbf{ord}(v_{i,k}) \le 1 + k$ и, следовательно, $\mathbf{ord}(s_k) \le k$. Тогда $\mathbf{ord}(S_k) = 0$ (поскольку $\mathbf{ord}(s_k\partial_n^{-k}) \le 0$ и $\mathbf{ord}(1) = 0$). Следовательно, $\mathbf{ord}\bigl(\prod_{q=1}^{\infty} S_q\bigr) = 0$. Ясно, что оператор $\prod_{q=1}^{\infty} S_q$ обратим, поскольку он имеет вид $1 + S^-$, где $S^- \in \widehat{D}_n^n[[\partial_n^{-1}]]\partial_n^{-1}$. По той же причине его Γ-порядок равен $(0, \dots, 0)$, т.е. оператор $S := \bigl(\prod_{q=1}^{\infty} S_q\bigr)^{-1}$ удовлетворяет условию A_1. Остальная часть утверждения вытекает из следствия 4.1.

(2) Ясно, что $[SS_1^{-1}, \partial_i] = 0$ для любого $1 \le i < n$ и $[SS_1^{-1}, L_{n,0}] = 0$. Заметим, что любой ряд в $\widehat{E}_n$ можно записать как ряд от $L_{n,0}^{-1}$ с коэффициентами в $\widehat{D}_n^n$ и наоборот (при этом

$L_{n,0}^{-1} = \partial_n^{-1}(1 + v_{n,0}\partial_n^{-1})^{-1}$ и $\partial_n^{-1} = L_{n,0}^{-1}(1 - v_{n,0}L_{n,0}^{-1})^{-1}$). Следовательно, оператор SS_1^{-1}, записанный в виде ряда от $L_{n,0}^{-1}$, имеет постоянные коэффициенты, ибо все эти коэффициенты коммутируют с ∂_i, $i < n$, и с $v_{n,0}$ (поскольку они не зависят от ∂_n и от x_i при $i < n$) и, следовательно, должны коммутировать и с ∂_n, т.е. они лежат в K_y.

По лемме 4.1 и следствию 4.1 оператор SS_1^{-1} удовлетворяет условию A_1. Тогда если $K_y = K$, то $SS_1^{-1} \in K[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]((\partial_n^{-1}))$.

(3) Доказательство такое же, как для утверждения (1). Отметим, что в этом случае $L_{n,0}, L_{n,0}^{-1} \in E_n$. $\square$

Из всех этих технических утверждений непосредственно вытекает

Следствие 5.2. *Пусть $P_1, \dots, P_n \in \widehat{E}_n$ — монические формально квазиэллиптические операторы.*

Множество коммутирующих с $P_1, \dots, P_n$ операторов в $\widehat{E}_n$ является коммутативным кольцом, которое можно вложить в кольцо $K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]((\partial_n^{-1}))$.

Аналогично множество коммутирующих с $P_1, \dots, P_n$ операторов в Π_n является коммутативным кольцом, которое можно вложить в кольцо $K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]((\partial_n^{-1})) \cap \Pi_n$.

Если $K_y = K$, то такое кольцо можно вложить в кольцо $K[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]((\partial_n^{-1}))$ (соответственно $K[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]((\partial_n^{-1})) \cap \Pi_n$).

Доказательство. По лемме 5.2 существует обратимый оператор $S \in \widehat{D}_n^n$ такой, что операторы $P_i' := S^{-1}P_iS$ нормализованы. По лемме 5.1 и следствию 5.1 соответствующие операторы $L_1, \dots, L_n$ также нормализованы. По теореме 5.1 существует обратимый оператор S_1 такой, что $S_1L_iS_1^{-1} = \partial_i$. В частности, $S_1P_n'S_1^{-1} = \partial_n^{l_n}$ и $S_1P_i'S_1^{-1} = \partial_i\partial_n^{l_i}$ для $i < n$.

Если $[Q, P_i] = 0$, то $[S_1S^{-1}QSS_1^{-1}, \partial_n^{l_n}] = 0$ и $[S_1S^{-1}QSS_1^{-1}, \partial_i\partial_n^{l_i}] = 0$ для $i < n$. Положим $Q' := S_1S^{-1}QSS_1^{-1}$ и предположим, что $Q' = \sum_{j=N}^{\infty} q_j\partial_n^{-j}$ с $q_j \in \widehat{D}_n^n$. Предположим, что q_l — первый коэффициент, не принадлежащий кольцу $K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]$. Тогда

$$0 = [Q', \partial_n^{l_n}] = -l_i\partial_n(q_l)\partial_n^{l_i-1-l} + \text{Члены меньшего } \mathrm{ord}_n\text{-порядка},$$

откуда $\partial_n(q_l) = 0$. Аналогично

$$0 = [Q', \partial_i\partial_n^{l_i}] = -\partial_i(q_l)\partial_n^{l_i-l} + \text{Члены меньшего } \mathrm{ord}_n\text{-порядка},$$

откуда $\partial_i(q_l) = 0$ для всех $i < n$. Следовательно, q_l имеет постоянные коэффициенты, $q_l \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]$ — противоречие. Если $K_y = K$, то, поскольку $\mathbf{ord}(q_l) < \infty$, мы должны иметь $q_l \in K[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]$.

Итак, $Q' \in K_y[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]((\partial_n^{-1}))$ и, следовательно, множество операторов в $\widehat{E}_n$, коммутирующих с $P_1, \dots, P_n$, образует коммутативное подкольцо, которое можно вложить в кольцо $K_y[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]((\partial_n^{-1}))$.

Если $Q \in \Pi_n$, то и $Q' \in \Pi_n$, так как S и S_1 имеют конечный порядок. Таким образом, $Q' \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]((\partial_n^{-1})) \cap \Pi_n$. $\square$

Замечание 5.1. Вложение из следствия производится с помощью сопряжения оператором S. Мы будем называть его *оператором Шура*. Заметим, что он имеет обратимый символ, поэтому мы получаем $\sigma(S^{-1}QS) = \sigma(S)^{-1}\sigma(Q)\sigma(S) \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]((\partial_n^{-1})) \cap \Pi_n$ для любого оператора Q, коммутирующего с $P_1, \dots, P_n$. Обозначим через B кольцо операторов, коммутирующих с $P_1, \dots, P_n$. Тогда мы получаем вложение кольца $\mathrm{gr}(B)$ в кольцо псевдодифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, где $\mathrm{gr}(B)$ — ассоциированное градуированное кольцо относительно фильтрации, определяемой функцией **ord**.

Другое следствие — результат о "чистоте" колец дифференциальных операторов.

Следствие 5.3. *Предположим, что $K_y = K$. Пусть $B \subset D_n \subset \widehat{D}_n$ — квазиэллиптическое кольцо коммутирующих дифференциальных операторов. Тогда централизатор $C(B) \subset \widehat{D}_n$ тоже является кольцом дифференциальных операторов, т.е. $C(B) \subset D_n$.*

Доказательство представляет собой простое обобщение доказательства предложения 3.1 из [54].

По лемме 5.2 существует обратимая функция f такая, что операторы $P_i' := f^{-1}P_i f$ почти нормализованы, где P_i — квазиэллиптические операторы из B. По лемме 5.1 и следствию 5.1 соответствующие операторы $L_1, \dots, L_n \in E_n$ также почти нормализованы. Тогда те же рассуждения, что и в доказательстве следствия 5.2, вместе с утверждением (3) теоремы 5.1 показывают, что существует оператор $S \in E_n$ такой, что $SBS^{-1} \subset K_y[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]((L_{n,0}^{-1}))$. А именно, если $[Q, P_i'] = 0$, то $\left[SQS^{-1}, L_{n,0}^{l_n}\right] = 0$ и $\left[SQS^{-1}, \partial_i L_{n,0}^{l_i}\right] = 0$ для $i < n$. Положим $Q' := SQS^{-1}$ и предположим, что $Q' = \sum_{j=N}^{\infty} q_j L_{n,0}^{-j}$, где $q_j \in \widehat{D}_n^n$. Предположим, что q_l — первый коэффициент, не принадлежащий кольцу $K[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]$. Тогда (заметим, что $[q_l, L_{n,0}] \in \widehat{D}_n^n$)

$$0 = \left[Q', L_{n,0}^{l_n}\right] = -l_i[q_l, L_{n,0}]\partial_n^{l_i-1-l} + \text{Члены меньшего } \mathrm{ord}_n\text{-порядка},$$

откуда $[q_l, L_{n,0}] = 0$. Аналогично

$$0 = \left[Q', \partial_i L_{n,0}^{l_i}\right] = -\partial_i(q_l)\partial_n^{l_i-l} + \text{Члены меньшего } \mathrm{ord}_n\text{-порядка},$$

откуда $\partial_i(q_l) = 0$ для всех $i < n$. Следовательно, q_l имеет постоянные коэффициенты. Поскольку $\mathbf{ord}(q_l) < \infty$, мы должны иметь $q_l \in K[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]$ — противоречие.

Но тогда

$$SC(B)S^{-1} \subset K[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]((L_{n,0}^{-1})) \subset E_n.$$

Следовательно, $C(B) \subset \widehat{D}_n \cap E_n = D_n$. $\square$

5.4. Допустимые операторы. Еще одним следствием является описание так называемых допустимых операторов. Они естественно возникают как композиции обратимых операторов S, S^{-1} из леммы 5.2 и теоремы 5.1 для различных вариантов выбора формально квазиэллиптических операторов $P_1, \dots, P_n$. Это описание понадобится нам для доказательства теорем классификации в разд. 8. В этом разделе мы даем только предварительный результат, окончательный результат будет дан в предложении 8.1 ниже.

Определение 5.2 (ср. [54, определение 3.3])**.** Оператор $T \in \Pi_n$ назовем 1-*допустимым*, если это обратимый оператор с $\mathrm{ord}_n(T) = 0$ такой, что $T^{-1}\partial_i T \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]((\partial_n^{-1})) \cap \Pi_n$ для $1 \le i \le n$.

Лемма 5.3. *Пусть $T \in \Pi_n$ является 1-допустимым оператором. Тогда*

$$\mathrm{ord}_n(T^{-1}qT) = \mathrm{ord}_n(q), \qquad \mathbf{ord}(T^{-1}qT) = \mathbf{ord}(q) \qquad \forall q \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]]((\partial_n^{-1})) \cap \Pi_n.$$

В частности, операторы $T^{-1}\partial_i T$ удовлетворяют условию A_1.

Доказательство. Пусть $q' = T^{-1}qT$. Предположим, что $s = \mathrm{ord}_n(q') \ne \mathrm{ord}_n(q)$. Поскольку $Tq' = qT$ и $\mathrm{HT}_n(q')$, будучи оператором с постоянными коэффициентами, не является правым делителем нуля, согласно результатам разд. 3 имеем

$$\mathrm{ord}_n(Tq') = \mathrm{ord}_n(T) + \mathrm{ord}_n(q') \le \mathrm{ord}_n(q) + \mathrm{ord}_n(T), \tag{5.5}$$

т.е. $s = \mathrm{ord}_n(q') \le \mathrm{ord}_n(q)$. Если мы возьмем обратимый оператор q в $\widehat{E}_n$ (скажем, $q = \partial_n$), то получим $\mathrm{ord}_n(T^{-1}q^lT) = \mathrm{ord}_n((T^{-1}qT)^l) = ls$ для любого $l \in \mathbb{Z}$, поскольку $T^{-1}qT$ имеет постоянные коэффициенты. С другой стороны, согласно результатам разд. 3

$$sl = \mathrm{ord}_n(T^{-1}q^lT) \le \mathrm{ord}_n(T^{-1}) + \mathrm{ord}_n(q^l) + \mathrm{ord}_n(T) = \mathrm{ord}_n(T^{-1}) + l\,\mathrm{ord}_n(q),$$

что невозможно, если $l \ll 0$ и $s \ne \mathrm{ord}_n(q) \ne 0$, так как $T^{-1} \in \widehat{E}_n$ имеет конечный ord_n-порядок. Если $\mathrm{ord}_n(q) = 0$ и $s < 0$, то в силу тех же рассуждений

$$0 = \mathrm{ord}_n(q^l) = \mathrm{ord}_n(T(q')^lT^{-1}) \le ls + \mathrm{ord}_n(T^{-1}),$$

что невозможно, если $l \gg 0$. Поскольку любой оператор q является произведением обратимого элемента (∂_n^k) и элемента нулевого ord_n-порядка, первое утверждение доказано.

Теперь покажем, что $\mathbf{ord}(T^{-1}\partial_i T) = 1$ для $1 \le i \le n$. Пусть $q_i' = T^{-1}\partial_i T$. По тем же рассуждениям, что и выше (см. (5.5)), имеем $\mathbf{ord}(q_i') \le \mathbf{ord}(\partial_i) = 1$ (мы используем только то, что T имеет конечный $\mathbf{ord}$-порядок, так как $T \in \Pi_n$). Поскольку $\mathrm{ord}_n(q_n') = 1$, имеем $q_n' = c_n\partial_n + \mathrm{l.o.t.}$, где l.o.t. — слагаемые ord_n-порядка меньше 1. Заметим, что $c_n = 1$ (в этом легко убедиться непосредственно, сравнив коэффициенты операторов $\partial_n T$ и $T(c_n\partial_n + \mathrm{l.o.t.})$). Итак, имеем $\mathbf{ord}(q_n') \ge 1$; следовательно, $\mathbf{ord}(q_n') = 1$.

Если $\mathbf{ord}(q_i') \le 0$, то $\mathrm{HT}_n(q_i') \in K \bmod \mathfrak{m} \cap K_y$. Если $\mathrm{HT}_n(q_i') = c_i + a_i$, где $c_i \in K$ и $a_i \in \mathfrak{m} \cap K_y$, то $q_i' = c_i + a_i + w_i$, где $\mathrm{ord}_n(w_i) < 0$. Тогда $w_i + a_i = T^{-1}(\partial_i - c_i)T$, но в этом случае $\mathrm{ord}_n(Tw_iT^{-1}) < 0$, $Ta_iT^{-1} \in \mathfrak{m} \cap K_y$ и $\partial_i - c_i = Tw_iT^{-1} + Ta_iT^{-1}$ — противоречие с тем, что $\mathrm{ord}_n(\partial_i - c_i) = 0$, $\partial_i - c_i \notin \mathfrak{m}$. Таким образом, $\mathbf{ord}(q_i') = 1$.

Ясно, что тогда мы должны иметь $\mathbf{ord}(T^{-1}qT) = \mathbf{ord}(q)$ для всех q. $\square$

5.5. Алгебраические свойства квазиэллиптических колец. В этом пункте мы даем еще одно приложение теории Шура — описание основных алгебраических свойств квазиэллиптических подколец.

Предложение 5.1. *Пусть B — квазиэллиптическое коммутативное подкольцо в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. Тогда*

(1) *B и $\mathrm{gr}(B)$ целые, где gr обозначает ассоциированное градуированное кольцо относительно фильтрации, определяемой функцией $\mathbf{ord}$, а функция $-\mathbf{ord}$ индуцирует дискретное нормирование ранга 1 на B и на его поле частных $\mathrm{Quot}(B)$, а также на $\mathrm{gr}(B)$, вложенном в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ (см. замечание 5.1);*

(2) *если $K_y = K$, то Γ-порядок определен на всех элементах кольца B; в частности, функция $-\mathrm{ord}_\Gamma$ является дискретным нормированием ранга n;*

(3) *естественное отображение*
$$\Phi\colon\ \mathrm{gr}(\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}) \to \mathrm{gr}(\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}})/(x_1,\dots,x_n)\mathrm{gr}(\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}) \simeq K_y[\xi_1,\dots,\xi_n]$$
индуцирует вложение векторных пространств при ограничении на $\mathrm{gr}(B)$;

(4) *спектральный модуль F не имеет кручения;*

(5) *если $K_y = K$, то $\mathbf{ord}(P) = |\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(P))|$ для любого $P \in B$;*

(6) *$\mathrm{trdeg}_{K'}(\mathrm{Quot}(B)) = n$, где $K' = \mathrm{Quot}(K_y)$, поле $\mathrm{Quot}(B)$ конечно порождено над K' и локализация $\mathrm{Quot}(B)\cdot F$ — конечно порожденный $\mathrm{Quot}(B)$-модуль.*

Замечание 5.2. В отличие от случая $n = 1$, квазиэллиптические кольца не обязательно конечно порождены. Самый простой пример — подкольцо $K[1,\ \partial_1^i\partial_2^j,\ i \ge 0,\ j > 0] \subset \widehat{D}_2$. Более интересные примеры можно найти в [20].

Доказательство предложения 5.1. Утверждение (1) вытекает из следствия 5.2 и замечания 5.1.

Докажем утверждение (2). По лемме 5.2 существует обратимая функция f такая, что операторы $P_i' := f^{-1}P_i f$ почти нормализованы, где P_i — квазиэллиптические операторы из B. По лемме 5.1 и следствию 5.1 соответствующие операторы $L_1,\dots,L_n \in E_n$ также почти нормализованы. Заметим, что сопряжение при помощи функции сохраняет Γ-порядок. Тогда те же рассуждения, что и в доказательстве следствия 5.3, вместе с утверждением (3) теоремы 5.1 показывают, что существует оператор $S \in \widehat{E}_n$ такой, что $SBS^{-1} \subset K[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]((L_{n,0}^{-1}))$. Так как $\mathrm{ord}_\Gamma(S) = (\underline{0})$ и Γ-порядок определен на всех элементах кольца $K[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]((L_{n,0}^{-1}))$, получаем требуемое утверждение.

Доказательство утверждений (3)–(5) представляет собой простое обобщение доказательства леммы 2 из [55].

По лемме 5.2 в сочетании с теоремой 5.1 и следствием 5.2 существует обратимый оператор S вида $S=S_1S_2$, где $S_1\in \widehat{D}_n^n$ обратим и $S_2\in\widehat{E}_n$ удовлетворяет условию A_1, так что $SBS^{-1}\in$ $\in K_y[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]((\partial_n^{-1}))$. При этом $S_1=fS_1'$, где f — обратимая функция и $\partial_i(S_1')=0$ при $i<n$.

Поскольку S обратим, для любого ненулевого элемента $Q\in B$ имеем $\mathbf{ord}(SQS^{-1})=\mathbf{ord}(Q)$. Но так как символ оператора SQS^{-1} имеет постоянные коэффициенты, то образ $\sigma'(Q)=$ $=\Phi(\sigma(Q))\in K_y[\xi_1,\dots,\xi_n]$ не равен нулю. Действительно, с одной стороны, имеем

$$\mathrm{HT}_n\bigl(\sigma(S)\cdot\sigma(Q)\cdot\sigma(S)^{-1}\bigr)=\mathrm{HT}_n(\sigma(S))\cdot\mathrm{HT}_n(\sigma(Q))\cdot\mathrm{HT}_n(\sigma(S)^{-1}).$$

С другой стороны, $\mathrm{HT}_n(\sigma(S)\cdot\sigma(Q)\cdot\sigma(S)^{-1})=C_1\in K_y[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]$, $\sigma(S)=\sigma(S_1)\cdot\sigma(S_2)$ и $\mathrm{HT}_n(\sigma(S))=\sigma(S_1)$. Значит, $\mathrm{HT}_n(\sigma(Q))=\sigma(S_1)^{-1}\cdot C_1\cdot\sigma(S_1)=C_1$, так как $\sigma(S_1)=\sigma(f)\sigma(S_1')=$ $=c\sigma(S_1')$, где $c\in K_y$, и $\partial_i(S_1')=0$ для $i<n$ (т.е. C_1 коммутирует с $\sigma(S_1)$). Это означает, что $\sigma'(Q)\neq 0$ в $K_y[\xi_1,\dots,\xi_n]$. Таким образом, $\mathrm{gr}(B)$ вкладывается в $K_y[\xi_1,\dots,\xi_n]$ как *векторное пространство.*

Модуль F является B-модулем без кручения, так как для любого ненулевого $f\in F$ имеем $fS\notin(x_1,\dots,x_n)\widehat{E}_n$ и для любого ненулевого $b\in B$

$$fb=fS^{-1}(SbS^{-1})S\notin(x_1,\dots,x_n)\widehat{E}_n.$$

Если $K_y=K$, то из приведенных выше рассуждений следует $\mathbf{ord}(\sigma(Q))=|\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(Q))|$ и, следовательно, $\mathbf{ord}(Q)=|\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(Q))|$ для любого $Q\in B$.

Доказательство утверждения (6) является простым обобщением доказательства леммы 2 из [59].

Рассмотрим подпространство $\triangle(N)=\{a\in F\mid \mathbf{ord}(a)<N\}$, где $N\in\mathbb{N}$. Заметим, что это подпространство имеет конечную размерность над полем K' и эта размерность не превосходит N^n.

Предположим, что локализация $\mathrm{Quot}(B)\cdot F$ бесконечно порождена. Это, в частности, означает, что в F существует бесконечно много линейно независимых над $K'[P_1,\dots,P_n]$ элементов, где $P_1,\dots,P_n\in B$ — формально квазиэллиптические операторы. Очевидно, $P_1,\dots,P_n$ алгебраически независимы (см. теорему 5.1).

Мы можем оценить размерность подпространства, порожденного над K' степенями операторов $P_1,\dots,P_n$, лежащими в подпространстве $\triangle(N)$ для некоторого N. Ясно, что эта размерность выглядит как многочлен степени n по N при $N\gg 0$, скажем,

$$\dim_{K'}(\triangle(N))=e_nN^n+e_{n-1}N^{n-1}+\ldots+e_0$$

для некоторых чисел e_i.

Рассмотрим M линейно независимых над $K'[P_1,\dots,P_n]$ элементов $a_1,\dots,a_M\in F$, где M таково, что $Me_n>1$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{ord}(a_1)\geq\mathbf{ord}(a_i)$ для всех i. Поскольку размерность подпространства, порожденного над K' степенями операторов $P_1,\dots,P_n$, лежащими в подпространстве $\triangle(N-M\,\mathbf{ord}(a_1))$, для больших N равна $e_n(N-M\,\mathbf{ord}(a_1))^n+\ldots+e_0$, получаем, что размерность подпространства, порожденного над K' произведениями элементов $a_1,\dots,a_M$ на степени операторов $P_1,\dots,P_n$, лежащими в подпространстве $\triangle(N-M\,\mathbf{ord}(a_1))$, не меньше $M(e_n(N-(M-1)\mathbf{ord}(a_1))^n+\ldots+e_0)$. Последнее подпространство находится внутри $\triangle(N)$. С другой стороны, поскольку $Me_n>1$, для достаточно больших N имеем $M(e_n(N-(M-1)\mathbf{ord}(a_1))^n+\ldots+e_0)>N^n>\dim_{K'}\triangle(N)$ — противоречие. $\square$

6. ТЕОРИЯ САТО ДЛЯ $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$

Другим важным инструментом исследования коммутативных подколец в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ является многомерный аналог теории Сато в размерности 1. В этом разделе мы приводим ряд технических утверждений этой теории для кольца $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. Они улучшают соответствующие результаты, приведенные в [9, Sect. 5]. Обзор теории Шура для кольца D_1 см. в [33] и в [41] для относительного случая.

6.1. Регулярные операторы и единицы. Рассмотрим кольцо

$$V_n := K_y\{\{\partial_1,\dots,\partial_{n-1}\}\}((\partial_n^{-1})),$$

где $K_y\{\{\partial_1,\dots,\partial_{n-1}\}\} = K_y[[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]]\cap\widehat{D}_n^n$. Оно имеет структуру правого $\widehat{E}_n$-модуля через изоморфизм векторных пространств $V_n\simeq\widehat{E}_n/(x_1,\dots,x_n)\widehat{E}_n$. Мы распространим все определения, относящиеся к кольцу $\widehat{E}_n$ (понятия порядков, условие A_1 и т.д.), также на кольцо V_n.

Используя антилексикографический порядок на группе $\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}$, определим *младший член* $\mathrm{LT}(a)$ любого ряда a из V_n следующим образом: если $a=\sum_{\underline{i}\le\mathrm{ord}_\Gamma(a)}a_{\underline{i}}\,\underline{\partial}^{\underline{i}}$, то

$$\mathrm{LT}(a)=\overline{a}_{\underline{\mathrm{ord}_\Gamma(a)}}\,\underline{\partial}^{\underline{\mathrm{ord}_\Gamma(a)}}\in K[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]((\partial_n^{-1})),$$

где $\overline{a}_{\underline{\mathrm{ord}_\Gamma(a)}}\in K$ — вычет элемента $a_{\underline{\mathrm{ord}_\Gamma(a)}}$ из K_y по модулю идеала $\mathfrak{m}$ (очевидно, порядок ord_Γ корректно определен на всех элементах из V_n).

Определение 6.1. *Носителем* K_y-подпространства $W\subset V_n$ называется K_y-подпространство $\mathrm{Supp}(W)$ в пространстве V_n, порожденное младшими членами $\mathrm{LT}(a)$ всех $a\in W$.

Определение 6.2. Подпространство $W\subset V_n\cap\Pi_n$ называется 1-*пространством*, если существует базис $\{w_k\}$ в W такой, что элементы $\overline{w}_k:=w_k|_{y=0}$ образуют базис пространства $\mathrm{Supp}(W)$.

Определение 6.3. Пусть $W\subseteq V_n$ является 1-подпространством. Тогда

- для любого $k\in\mathbb{Z}$ положим $W_k:=\{w\in W\mid \mathbf{ord}(w)\le k\}$;
- $H_W(k):=\dim_K(\overline{W}_k)$ — *функция Гильберта* подпространства W.

Определение 6.4. Элемент $P\in\widehat{\Pi}_n$ называется *регулярным*, если K-линейное отображение $F\xrightarrow{\pi(-\circ\sigma(P))}V_n$ является инъективным, где $\circ$ означает действие на модуле $\widehat{\Pi}_n$ и

$$\pi\colon\ \widehat{\Pi}_n\to\widehat{\Pi}_n/(x_1,\dots,x_n)\widehat{\Pi}_n=V_n\cap\Pi_n$$

— отображение проекции. В частности, P регулярен тогда и только тогда, когда регулярен его символ $\sigma(P)$.

Обозначим через $f\diamond P:=\pi(f\circ P)$, $f\in F$, $P\in\widehat{\Pi}_n$, приведенное выше отображение.

Лемма 6.1 (ср. [9, Lemma 5.9]). *Пусть $P\in\widehat{\Pi}_n$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(1) *элемент P регулярен тогда и только тогда, когда для любого $m\in\mathbb{N}_0$ элементы множества $\{\underline{\partial}^{\underline{k}}\diamond\sigma(P)\mid \underline{k}\in\mathbb{N}_0\colon|\underline{k}|=m\}\subset V_n$ линейно независимы*;

(2) *если P регулярен, то P не является элементом кручения, т.е. из уравнения $Q\circ P=0$ для $Q\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ следует, что $Q=0$.*

Доказательство. (1) Пусть $d:=\mathbf{ord}(P)=\mathbf{ord}(\sigma(P))$. Тогда для любого $\underline{k}\in\mathbb{N}_0$ имеем $\mathbf{ord}(\underline{\partial}^{\underline{k}}\circ\sigma(P))=|\underline{k}|+d$ при условии $\underline{\partial}^{\underline{k}}\circ\sigma(P)\ne 0$. Следовательно, линейное отображение $F\xrightarrow{\pi(-\circ\sigma(P))}V_n\cap\Pi_n\subset V_n$ распадается в прямую сумму своих градуированных компонент $F_m\xrightarrow{\pi(-\circ\sigma(P))}(V_n\cap\Pi_n)_{m+d}$, что доказывает первое утверждение.

(2) Пусть $Q \neq 0$ таково, что $Q \circ P = 0$. Тогда и $\sigma(Q) \neq 0$, в то время как $\sigma(Q) \circ \sigma(P) = 0$. Далее, существует $\underline{k} \in \mathbb{N}_0$ такое, что $F \ni \pi(\underline{\partial}^{\underline{k}} \circ \sigma(Q)) \neq 0$ в V_n. С другой стороны,

$$\pi\big(\pi(\underline{\partial}^{\underline{k}} \circ \sigma(Q)) \circ \sigma(P)\big) = \pi\big(\underline{\partial}^{\underline{k}} \circ \sigma(Q) \circ \sigma(P)\big) = 0.$$

Следовательно, P не является регулярным — противоречие. $\square$

Введем теперь небольшую модификацию разложения на слайсы из определения 3.3, которую мы будем использовать в этом разделе и которая справедлива также для элементов из $\widehat{\Pi}_n$:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{\underline{i} \geq \underline{0}} \frac{\underline{x}^{\underline{i}}}{\underline{i}!} P_{(\underline{i})}, \qquad \text{где} \quad \underline{x}^{\underline{i}} = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad i! = i_1! \dots i_n!, \\ P_{(\underline{i})} &= \underline{i}! \sum_{\substack{\underline{k} \in \mathbb{N}_0^{n-1} \times \mathbb{Z} \\ |\underline{k}| - |\underline{i}| \leq d = \mathbf{ord}(P)}} \alpha_{\underline{k},\underline{i}} \, \underline{\partial}^{\underline{k}} \in V_n \cap \Pi_n, \qquad \alpha_{\underline{k},\underline{i}} \in K_y. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Лемма 6.2. *Верно следующее утверждение: для любых $P, Q \in \widehat{\Pi}_n$*

$$P = Q \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\partial}^{\underline{i}} \diamond P = \underline{\partial}^{\underline{i}} \diamond Q \quad \forall\, \underline{i} \in \mathbb{N}_0^n.$$

Доказательство. Заметим, что для любого $\underline{i} \in \Sigma$ справедливо тождество $\underline{\partial}^{\underline{i}} \diamond P = P_{(\underline{i})} + {}$ $+ \, \mathrm{l.o.t.}$, где члены меньшего порядка — это элементы вида $\underline{\partial}^{\underline{j}} \cdot P_{(\underline{k})}$ с $|\underline{j}| < |\underline{i}|$ и $|\underline{k}| < |\underline{i}|$.

В частности, $1 \diamond P = P_{(\underline{0})}$, и, следовательно, из равенств

$$\underline{\partial}^{\underline{i}} \diamond P = \underline{\partial}^{\underline{i}} \diamond Q$$

индукцией по $|\underline{i}|$ получаем равенство всех слоев операторов P и Q, а значит, и равенство самих операторов P и Q. $\square$

Определение 6.5. Пусть $\widehat{D}_{n,-}^{\mathrm{sym}} := \{P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} \mid \mathbf{ord}(P) \leq 0\}$ и $\widehat{U}_n^{\mathrm{sym}} \subset \widehat{D}_{n,-}^{\mathrm{sym}}$ — группа единиц.

Лемма 6.3 (ср. [9, Lemma 5.11])**.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $P \in \widehat{D}_{n,-}^{\mathrm{sym}}$, то $P \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$ тогда и только тогда, когда $\sigma(P) \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$;*

(2) *если $Q \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$, то $\mathbf{ord}(Q) = 0$ и $\overline{Q_{(\underline{0})}} \in K^*$; более того, Q регулярен.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно. В утверждении (2) ясно, что $\mathbf{ord}(Q) = 0$ и $\overline{Q_{(\underline{0})}} \in K^*$. Тогда $\sigma(Q)$ является единицей по утверждению (1). Если Q не является регулярным, то $\sigma(Q)$ не является регулярным и, следовательно, существует $w \in F$ такой, что $w \diamond \sigma(Q) = 0$. Но тогда

$$w = w \cdot \sigma(Q) \cdot (\sigma(Q))^{-1} = 0 \qquad \mathrm{mod}\ (x_1, \dots, x_n)\widehat{D}_n$$

— противоречие. $\square$

6.2. Многомерный аналог теоремы Сато.

Определение 6.6. Пусть $\mu \in \mathbb{Z}$.

1. Положим

$$\mathsf{Gr}_\mu(V_n) := \big\{1\text{-пространства } W \subseteq V_n \cap \Pi_n \;\big|\; H_W(\mu + k) = C_{n+k}^n \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}\big\}$$

(напомним, что $H_F(k) = C_{n+k}^n$).

2. Пусть $W \in \mathsf{Gr}_\mu(V_n)$. Тогда $S \in \widehat{\Pi}_n$ называется *оператором Сато* пространства W, если выполнены следующие условия:

- S регулярен и $\mathbf{ord}(S) = \mu$;
- имеем $W = F \diamond S$.

Пример 6.1. Заметим, что $F \in \mathsf{Gr}_0(V_n)$. Если $K_y = K$, то любая единица $U \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$ является оператором Сато для F. Действительно, в силу леммы 6.3 и свойств функции **ord** имеем $\mathbf{ord}(\underline{\partial}^{\underline{k}} \cdot U) = |\underline{k}|$. Более того, $\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond U \in F$ и все такие элементы линейно независимы, так как U регулярен (см. лемму 6.1). Следовательно, $F_k \diamond U = F_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$ по соображениям размерности и $F = F \diamond U$.

Лемма 6.4. *Пусть $\mu \in \mathbb{Z}$, $W \in \mathsf{Gr}_\mu(V_n)$ и T — оператор Сато пространства W. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *$U \cdot T$ является оператором Сато пространства W для любого обратимого оператора $U \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$;*

(2) *линейное отображение $F \xrightarrow{-\diamond T} W$ является биекцией.*

Доказательство. (1) Если $U \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$, то $U \cdot T \neq 0$ и $\mathbf{ord}(U \cdot T) = \mathbf{ord}(U) + \mathbf{ord}(T) = \mu$. Далее, $F \diamond (U \circ T) = (F \diamond U) \diamond T = F \diamond T = W$. Наконец, $\sigma(U \circ T) = \sigma(U) \circ \sigma(T)$, поскольку $\sigma(U)$ обратим и регулярен. Следовательно, линейное отображение $F \xrightarrow{-\diamond\sigma(U\circ T)} V_n$ инъективно, а значит, оператор $U \circ T$ регулярен. Следовательно, $U \cdot T$ действительно является оператором Сато пространства W.

(2) Поскольку T регулярен, все элементы из $F_m \diamond \sigma(T)$, $m \in \mathbb{N}_0$, линейно независимы. В частности, $\mathbf{ord}(\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond \sigma(T)) = |\underline{k}| + \mu$. Следовательно, все элементы из $F_m \diamond T$ также линейно независимы, поэтому для любого $m \in \mathbb{N}_0$ линейное отображение $F_m \xrightarrow{-\diamond T} W_{m+\mu}$ является изоморфизмом по причинам равенства размерностей. Отсюда вытекает второе утверждение. $\square$

Следующая теорема является улучшением результатов [54, теорема 3.1] и [9, Theorem 5.16].

Теорема 6.1. *Пусть $\mu \in \mathbb{Z}$ и $W \in \mathsf{Gr}_\mu(V_n)$. Тогда верны следующие утверждения*:

(1) *для векторного пространства W существует оператор Сато S; если T — еще один оператор Сато для W, то существует однозначно определенный обратимый оператор $U \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$ такой, что $S = U \circ T$;*

(2) *если $W \subset F$, то $S \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$;*

(3) *если $\mu = 0$ и $\mathrm{Supp}(W) = F$, то существует единственный оператор Сато $S = 1 + S_-$, где $S_- \in \widehat{D}_{\underline{n}}^n[[\partial_n^{-1}]]\partial_n^{-1}$, поэтому $|\mathrm{ord}_\Gamma(S)| = \mathbf{ord}(S) = 0$; в частности, S обратим в $\widehat{E}_n$, $S^{-1} = 1 + \widetilde{S}_-$, где $\widetilde{S}_- = -S_- + S_-^2 - \dots$;*

(4) *в частности, если $\mu = 0$, $\mathrm{Supp}(W) = F$ и S — оператор Сато, то существует единственное разложение $S = U \circ S_0$, где S_0 — оператор из утверждения (3) и $U \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$;*

(5) *справедливо равенство*

$$\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} = \bigl\{P \in \widehat{\Pi}_n \bigm| F \diamond P \subseteq F\bigr\}.$$

Доказательство. (1) Наша конструкция оператора Сато S является алгоритмической и зависит от следующего выбора: для любого $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$ мы выбираем элемент $w_{\underline{k}} \in W_{\mu+|\underline{k}|}$ такой, что для любого $m \in \mathbb{N}_0$ множество $\{\overline{w}_{\underline{k}} \mid \underline{k} \in \mathbb{N}_0^n\colon |\underline{k}| = m\}$, где $\overline{w}_{\underline{k}}$ — класс вычетов в пространстве $W_{m+\mu}/W_{m+\mu-1}$, образует базис векторного пространства $W_{m+\mu}/W_{m+\mu-1}$ (здесь мы существенно используем предположение о функции Гильберта подпространства W). Тогда верны следующие утверждения:

- $\mathbf{ord}(w_{\underline{k}}) = \mu + |\underline{k}|$ для всех $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$;
- множество $\{w_{\underline{k}} \mid \underline{k} \in \mathbb{N}_0^n\colon |\underline{k}| \leq m\}$ образует базис векторного пространства $W_{m+\mu}$.

Нам нужно построить оператор S вида $S := \sum_{\underline{k}\geq\underline{0}}(\underline{x}^{\underline{k}}/\underline{k}!)S_{(\underline{k})} \in \widehat{\Pi}_n$ такой, что $\mathbf{ord}(S_{(\underline{k})}) \leq \mu + |\underline{k}|$ для всех $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$.

Положим $S_{(\underline{0})} = w_{\underline{0}}$. Теперь мы можем найти все слайсы $S_{(\underline{k})}$ рекурсивно: если известны все слайсы с $|\underline{k}| \leq m-1$, то слайсы с $|\underline{k}| = m$ можно найти из линейных уравнений

$$w_{\underline{k}} = \underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond S = S_{(\underline{k})} + \text{Известные члены}, \tag{6.2}$$

где $|\underline{k}| = m$, а известные члены включают линейные комбинации слагаемых вида $S_{(\underline{l})} \cdot \underline{\partial}^{\underline{t}}$, где $|\underline{l}| < m$ и $|\underline{l}| + |\underline{t}| \leq \mu + m$. Очевидно, что эта система имеет единственное решение, определяющее слайс $S_{(\underline{k})}$. По построению S имеем

- $\mathbf{ord}(S) = \mu$ (так как $\mathbf{ord}(S_{(\underline{0})}) = \mu$ и $\mathbf{ord}(S_{(\underline{k})}) \leq \mu + |\underline{k}|$);
- $\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond S = w_{\underline{k}}$ для всех $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$, откуда $W = F \diamond S$;
- $\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond \sigma(S) = \sigma(w_{\underline{k}})$ для всех $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$. Так как множество $\{\overline{w}_{\underline{k}} \mid \underline{k} \in \mathbb{N}_0^n \colon |\underline{k}| = m\}$ образует базис векторного пространства $W_{m+\mu}/W_{m+\mu-1}$, то согласно лемме 6.1 оператор S регулярен.

Таким образом, S является оператором Сато векторного пространства W.

Пусть S и T — два оператора Сато в W. Поскольку оба оператора регулярны, для любого $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$ существует элемент $w'_{\underline{k}} \in F$ порядка $\mathbf{ord}(w'_{\underline{k}}) = |\underline{k}|$ такой, что

$$\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond S = w'_{\underline{k}} \diamond T.$$

Так как элементы $\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond \sigma(S)$, $|\underline{k}| = m$, линейно независимы, то и элементы $w'_{\underline{k}} \diamond \sigma(T)$, а следовательно, и $w'_{\underline{k}}$ линейно независимы. Тогда по соображениям размерности имеем

$$W' = \langle w'_{\underline{k}},\, \underline{k} \in \mathbb{N}_0^n \rangle = F.$$

Пусть $U \in \widehat{\Pi}_n$ — оператор, построенный, как указано выше, для пространства W', т.е. $\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond U = w'_{\underline{k}}$. Тогда $\mathbf{ord}(U) = 0$, причем $U \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ по построению. Также по построению U для всех $\underline{i} \in \mathbb{N}_0^n$ имеем

$$\underline{\partial}^{\underline{i}} \diamond S = (\underline{\partial}^{\underline{i}} \diamond U) \diamond T = \underline{\partial}^{\underline{i}} \diamond (U \circ T),$$

поэтому $S = U \circ T$ по лемме 6.2. Аналогичным образом можно найти $V \in \widehat{D}_{n,-}^{\mathrm{sym}}$ такой, что $T = V \circ S$. Следовательно, имеем $(1 - U \cdot V) \circ S = 0$. Так как S регулярен, из леммы 6.1 следует, что $U \cdot V = 1$. Аналогично $V \cdot U = 1$; следовательно, $U, V \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$, как и утверждается.

Единственность единицы U также следует из леммы 6.1.

(2) Это утверждение следует непосредственно из конструкции доказательства утверждения (1).

(3) Мы можем построить оператор Сато практически по той же схеме, что и в доказательстве утверждения (1), с минимальными соответствующими изменениями. А именно, будем искать оператор S вида $S := \sum_{\underline{k}\geq\underline{0}}(\underline{x}^{\underline{k}}/\underline{k}!)S_{(\underline{k})} \in \widehat{\Pi}_n$ такой, что

- $\mathbf{ord}(S_{(\underline{k})}) \leq |\underline{k}|$ для всех $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$;
- $S_{(\underline{k})} \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]][[\partial_n^{-1}]] \cdot \partial_n^{-1} \cap \Pi_n$ для всех $\underline{k} \neq \underline{0}$;
- $S_{(\underline{0})} \in 1 + K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]][[\partial_n^{-1}]] \cdot \partial_n^{-1} \cap \Pi_n$.

Сначала докажем, что можно выбрать такой базис $w_{\underline{k}}$, $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$, в пространстве W, что

(i) $w_{\underline{k}} = \underline{\partial}^{\underline{k}} + w_{\underline{k}}^-$, где $w_{\underline{k}}^- \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]][[\partial_n^{-1}]] \cdot \partial_n^{-1} \cap \Pi_n$;

(ii) $\mathbf{ord}(w_{\underline{k}}) = |\underline{k}|$.

Построим такой базис рекурсивно в подпространствах W_m, $m \geq 0$. Доказательство проводится индукцией по $m = \mathbf{ord}(w_{\underline{k}})$.

Пусть $m = 0$. Пусть $w_{\underline{0}}$ — образующая пространства W_0. Так как $W, \mathrm{Supp}(W) \in \mathsf{Gr}_0(V_n)$, $\dim_K(\mathrm{Supp}(W_0)) = H_W(0) = 1$ и $\dim_K(\mathrm{Supp}(W_{-1})) = H_W(-1) = 0$, то имеем $0 = \mathbf{ord}(w_{\underline{0}}) = \mathbf{ord}(\mathrm{LT}(w_{\underline{0}})) = |\mathrm{ord}_\Gamma(w_{\underline{0}})|$. В частности, мы можем выбрать моническую порождающую $w_{\underline{0}}$. Тогда $\mathrm{LT}(w_{\underline{0}}) = 1$ (поскольку он принадлежит F и $w_{\underline{0}}$ монический). Следовательно, $w_{\underline{0}}^- := w_{\underline{0}} - 1 \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]][[\partial_n^{-1}]] \cdot \partial_n^{-1} \cap \Pi_n$.

Пусть m произвольно. По предположению индукции в пространстве W_{m-1} существует базис $w_{\underline{k}}$, $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$, $|\underline{k}| \leq m-1$, удовлетворяющий условиям (i) и (ii). Дополним этот базис до базиса $w_{\underline{k}}$, $|\underline{k}| \leq m$. По условию на размерности пространств W_m можно считать, что все его элементы монические; кроме того, можно считать, что $\mathrm{LT}(w_{\underline{k}}) \notin F_{m-1}$ для всех $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$ с $|\underline{k}| = m$. Кроме того, выполняется равенство $m = \mathbf{ord}(w_{\underline{k}}) = |\mathrm{ord}_\Gamma(w_{\underline{k}})|$ для всех элементов $w_{\underline{k}}$ с $|\underline{k}| = m$. Итак, перенумеровав элементы базиса, если нужно, можно считать, что $\mathrm{LT}(w_{\underline{k}}) = \underline{\partial}^{\underline{k}}$. Но тогда, очевидно, в W_m существует базис, удовлетворяющий условиям (i) и (ii).

Теперь положим $S_{(\underline{0})} = w_{\underline{0}}$. Все остальные слайсы $S_{(\underline{k})}$ мы можем найти рекурсивно: если известны все слайсы с $|\underline{k}| \leq m-1$, то слайсы с $|\underline{k}| = m$ находятся из линейных уравнений

$$\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond S \in W_m. \tag{6.3}$$

Как и в доказательстве утверждения (1), имеем

$$\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond S = S_{(\underline{k})} + \text{Известные члены},$$

где $|\underline{k}| = m$, а известные члены включают линейные комбинации слагаемых вида $S_{(\underline{l})} \cdot \underline{\partial}^{\underline{t}}$ с $|\underline{l}| < m$ и $|\underline{l}| + |\underline{t}| \leq m$. По предположению индукции $\mathbf{ord}(\text{Известные члены}) \leq m$, а значит, существует такой элемент $w \in W_m$, что $\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond S - w \in K_y[[\partial_1, \dots, \partial_{n-1}]][[\partial_n^{-1}]] \cdot \partial_n^{-1} \cap \Pi_n$ (поскольку все мономы неотрицательного порядка с неотрицательной степенью всех производных принадлежат пространству F_m, порожденному наименьшими членами базисных элементов $w_{\underline{k}}$). Теперь положим

$$S_{(\underline{k})} := \underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond S - w.$$

Ясно, что все условия на $S_{(\underline{k})}$ выполнены.

Очевидно, что эта система имеет единственное решение, определяющее слайс $S_{(\underline{k})}$.

(4) Это следует из утверждений (1) и (3).

(5) Пусть $P = \sum_{\underline{k} \geq \underline{0}} (\underline{x}^{\underline{k}}/\underline{k}!) P_{(\underline{k})}$ — разложение на слайсы. Пусть m — первое число, для которого существует $\underline{k} \in \mathbb{N}_0^n$ такое, что $P_{(\underline{k})} \notin F$, $m = |\underline{k}|$. Тогда

$$\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond P = P_{(\underline{k})} + P',$$

где $P' \in F$. Следовательно, $P_{(\underline{k})}$ должен принадлежать F (так как $\underline{\partial}^{\underline{k}} \diamond P \in F$) — противоречие. Таким образом, все слайсы должны принадлежать F и, следовательно, $P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. $\square$

Следствие 6.1. *Оператор $P \in \widehat{D}_{n,-}^{\mathrm{sym}}$ является единицей тогда и только тогда, когда $\mathbf{ord}(P) = 0$ и $\overline{P}$ регулярен, где $\overline{P} = P|_{\underline{y}=\underline{0}}$.*

Доказательство. Если P — единица, то $\mathbf{ord}(P) = 0$ и P регулярен по утверждению (2) леммы 6.3. Очевидно, что $\overline{P}$ регулярен по той же самой причине.

Наоборот, если $\overline{P}$ регулярен и $\mathbf{ord}(P) = 0$, то $F \diamond \overline{P} = F$ и, следовательно, $F \diamond P = F$ (см. пример 6.1). Тогда по утверждению (1) теоремы 6.1 имеем $P = U \circ 1$, где U — единица. $\square$

Пример 6.2. В качестве приложения нашей общей теории Сато мы можем дать краткое (хотя и неэффективное) доказательство теоремы об обобщенном разложении Биркгофа из [32] (ср. [57, Theorem 11.19]).

Напомним обозначения из работы [32]. Рассмотрим пополнение кольца $K[x,t_1,t_2,\dots]$ относительно K-нормирования ν, определяемого как $\nu(t_n):=n$, $\nu(x)=1$. Обозначим это пополнение через $K[[x,t]]$.

Положим $\mathcal{D}:=K[[x,t]][\partial]$ и $\mathcal{E}:=K[[x,t]]((\partial^{-1}))$. Обозначим через Υ подгруппу монических обратимых операторов нулевого порядка из $\mathcal{E}$. Рассмотрим пополнение кольца $\mathcal{E}$ относительно нормирования v, определенного как $v(t_i):=i$, $v(x)=0$: $\widehat{\mathcal{E}}:=\bigl\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i\partial^i \mid v(a_i)\xrightarrow{i\to\infty}\infty\bigr\}$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{D}}$ соответствующее пополнение кольца $\mathcal{D}$. Обозначим через $\mathrm{Pr}\colon K[[x,t]]\to$ $\to K[[x,t]]/(x,t_1,t_2,\dots)\simeq K$ естественную проекцию.

Определим подгруппы

$$\widehat{\mathcal{D}}^*=\bigl\{P\in\widehat{\mathcal{D}}\bigm| \mathrm{Pr}(P)=1 \ \text{и}\ \exists\, P^{-1}\in\widehat{\mathcal{D}}\bigr\},\qquad \widehat{\mathcal{E}}^*=\bigl\{P\in\widehat{\mathcal{D}}\bigm| \mathrm{Pr}(P)\in\Upsilon \ \text{и}\ \exists\, P^{-1}\in\widehat{\mathcal{E}}\bigr\}.$$

Теорема 6.2 (обобщенное разложение Биркгофа из работы М. Муласе)**.** *Для любого $\Psi\in\widehat{\mathcal{E}}^*$ существуют единственные операторы $S\in\Upsilon$, $Y\in\widehat{\mathcal{D}}^*$ такие, что $\Psi=YS$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $W:=F\diamond\Psi$. Тогда можно применить доказательство утверждения (3) теоремы Сато 6.1 и получить однозначно определенный оператор $S\in\Upsilon$ такой, что $W=F\diamond S$. Следовательно, $Y:=\Psi S^{-1}\in\widehat{\mathcal{D}}$ и, очевидно, $Y\in\widehat{\mathcal{D}}^*$.

Разложение $\Psi=YS$ однозначно: если $Y_1S_1=Y_2S_2$, то $Y_2^{-1}Y_1=S_2S_1^{-1}$, но $\widehat{\mathcal{D}}^*\cap\Upsilon=\{1\}$, поэтому $Y_1=Y_2$ и $S_1=S_2$. □

6.3. Пары Шура, две конструкции. Теория Шура для $\widehat{D}_n$ приводит к понятию пары Шура, связанной с коммутативным кольцом операторов. В данном пункте мы опишем это понятие для квазиэллиптических подколец из $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. Обзор этого понятия для подколец из D_1 см. в [33], а обобщения на случай относительной ситуации — в [41, Sect. 5]. Теория Сато используется для установления однозначного соответствия между парами Шура и квазиэллиптическими кольцами.

Определение 6.7. Будем говорить, что пара подпространств (A,W), где $A,W\subset V_n$ и A есть K-алгебра с единицей такая, что $W\cdot A\subset W$, является 1-*парой Шура в* V_n, если A и W суть 1-пространства (см. определение 6.2) и $W\in\mathsf{Gr}_\mu(V_n)$.

Будем говорить, что 1-пара Шура является *квазиэллиптической* 1-*парой Шура*, если A — квазиэллиптическое кольцо.

Будем говорить, что две 1-пары Шура (A,W) и (A',W') *эквивалентны*, если $A'=T^{-1}AT$ и $W'=W\diamond T:=\pi(W\circ T)$, где T является 1-допустимым оператором (см. определение 5.2) и мы рассматриваем W как подмодуль бимодуля $\widehat{\Pi}_n$ (см. лемму 3.1 и определение 6.1).

Пары Шура естественным образом появляются из квазиэллиптических подколец в $\widehat{D}_n$ благодаря следующей конструкции.

Конструкция 6.1. Для заданного квазиэллиптического кольца $B\subset\widehat{D}_n$ выберем набор монических формально квазиэллиптических элементов $P_1,\dots,P_n$. Тогда по лемме 5.1 существуют монические формально квазиэллиптические операторы $L_1,\dots,L_n$ с $\mathbf{ord}(L_i)=1$ для всех i. Тогда по лемме 5.2 и следствию 5.1 существует оператор S_0 такой, что $S_0^{-1}L_iS_0$ и $S_0^{-1}P_iS_0$ нормализованы (того же порядка), и по теореме 5.1 существует монический обратимый оператор S, удовлетворяющий условию A_1, с $\mathbf{ord}(S)=|\mathrm{ord}_\Gamma(S)|=0$ и такой, что $SS_0^{-1}L_iS_0S^{-1}=\partial_i\in V_n$.

Пространства A и W получаются следующим образом:

$$A:=SS_0^{-1}BS_0S^{-1}\subset V_n\cap\Pi_n,\qquad W=F\diamond(S_0S^{-1})=F\diamond S^{-1}\subset V_n\cap\Pi_n$$

(последнее равенство следует из специального вида S_0, так что $F\diamond S_0=F$). Заметим, что $\mathrm{Supp}(W)=F$, $W\in\mathsf{Gr}_0(V_n)$ и $\dim_K(\mathrm{Supp}(W_k))=H_F(k)$, поскольку $\mathrm{LT}(\underline{\partial}^{\underline{j}}\diamond S^{-1})=\underline{\partial}^{\underline{j}}$ для всех $\underline{j}\in\mathbb{N}_0^n$.

По тем же результатам из теории Шура следует, что A не зависит от выбора S_0, S (но пространство W зависит: оно умножается на 1-допустимый оператор с постоянными коэффициентами), но может зависеть от выбора $P_1,\dots,P_n$. Выбирая другие элементы $P_1',\dots,P_n'$, получаем еще одно подкольцо $A'\subset V_n$, отличающееся от A сопряжением на 1-допустимый оператор. Это объясняет определение отношения эквивалентности между 1-парами Шура. Заметим, что 1-пары Шура (A,W) и (A',W') эквивалентны при любом выборе соответствующих операторов S_0, S.

Конструкция 6.2. Наоборот, по заданной 1-паре Шура (A,W) с $\mathrm{Supp}(W)=F$, применяя утверждение (3) теоремы 6.1, можно найти обратимый оператор Сато S. Тогда $B:=SAS^{-1}\in$ $\in\widehat{E}_n\cap\Pi_n$ состоит из операторов P таких, что $F\diamond P\subseteq F$; следовательно, $B\subset\widehat{D}_n$ по утверждению (5) теоремы 6.1. Если (A,W) — квазиэллиптическая 1-пара Шура, то, так как $\mathbf{ord}(S)=$ $=|\mathrm{ord}_\Gamma(S)|=\mathbf{ord}(S^{-1})=|\mathrm{ord}_\Gamma(S^{-1})|=0$ и формальные квазиэллиптические операторы из A удовлетворяют условию A_1 (по определению), из леммы 4.1 и следствия 4.1 вытекает, что кольцо B также квазиэллиптическое.

Для общей пары Шура следующая теорема является улучшением результата из [9, Theorem 5.18].

Теорема 6.3. *Пусть (A,W) есть 1-пара Шура и S — оператор Сато пространства W. Тогда верны следующие утверждения*:

(1) *для любого $f\in A$ существует однозначно определенный оператор $\mathtt{L}_S(f)\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ такой, что $S\circ f=\mathtt{L}_S(f)\circ S$; более того, $\mathbf{ord}(\mathtt{L}_S(f))=\mathbf{ord}(f)$ для любого $f\in A$*;

(2) *для любых $f_1,f_2\in A$ и $\lambda_1,\lambda_2\in K$ имеем*

$$\mathtt{L}_S(f_1\cdot f_2)=\mathtt{L}_S(f_1)\cdot\mathtt{L}_S(f_2)\qquad\text{и}\qquad \mathtt{L}_S(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)=\lambda_1\mathtt{L}_S(f_1)+\lambda_2\mathtt{L}_S(f_2).$$

Другими словами, отображение $A\to\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, $f\mapsto\mathtt{L}_S(f)$ является гомоморфизмом K-алгебр, который к тому же инъективен.

Доказательство. (1) Для любого мультииндекса $\underline{k}\in\mathbb{N}_0^n$ определим $w_{\underline{k}}:=\underline{\partial}^{\underline{k}}\diamond S\cdot f\in W$. Поскольку $W=F\diamond S$, существуют (однозначно определенные) элементы $w'_{\underline{k}}\in F$ такие, что $w_{\underline{k}}=w'_{\underline{k}}\diamond S$.

Положим $W'=\langle w'_{\underline{k}},\underline{k}\in\mathbb{N}_0^n\rangle$. Тогда из доказательства утверждений (1), (2) теоремы 6.1 следует, что существует оператор $\mathtt{L}_S(f)\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ такой, что $w'_{\underline{k}}=\underline{\partial}^{\underline{k}}\diamond\mathtt{L}_S(f)$. Отсюда по лемме 6.2 имеем $S\circ f=\mathtt{L}_S(f)\circ S$. Единственность $\mathtt{L}_S(f)$ следует из регулярности S и леммы 6.1.

(2) Пусть $f_1,f_2\in A$. По построению имеем

$$S\circ(f_1\cdot f_2)=(\mathtt{L}_S(f_1)\circ S)\circ f_2=\big(\mathtt{L}_S(f_1)\cdot\mathtt{L}_S(f_2)\big)\circ S.$$

Поскольку оператор $L_S(f)$ однозначно определяется по $f\in A$, получаем $\mathtt{L}_S(f_1)\cdot\mathtt{L}_S(f_2)=$ $=\mathtt{L}_S(f_1\cdot f_2)$. Доказательство второго утверждения аналогично, поэтому $A\to\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, $f\mapsto L_S(f)$ действительно является гомоморфизмом K-алгебр. Для $f\neq0$ имеем $\sigma(S\circ f)=\sigma(S)\circ\sigma(f)\neq0$; следовательно, также имеем $\mathtt{L}_S(f)\neq0$. $\square$

Имеется аналог утверждения 6 предложения 5.1 для квазиэллиптических 1-пар Шура.

Лемма 6.5. *Если (A,W) — квазиэллиптическая 1-пара Шура, то $\mathrm{trdeg}_{K'}(\mathrm{Quot}(A))=n$, где $K'=\mathrm{Quot}(K_y)$, поле $\mathrm{Quot}(A)$ конечно порождено над K' и локализация $\mathrm{Quot}(A)\cdot W$ — конечно порожденный $\mathrm{Quot}(A)$-модуль.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство утверждения 6 предложения 5.1. $\square$

Наиболее интересными примерами квазиэллиптических колец в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ и квазиэллиптических 1-пар Шура являются кольца ранга 1.

Определение 6.8. Пусть $B \subset \widehat{D}_n$ — коммутативное подкольцо. Тогда мы определяем *аналитический ранг* как

$$\mathrm{An.rank}(B) := \mathrm{rk}(F \cdot \mathrm{Quot}(B)) = \dim_{\mathrm{Quot}(B)}(F \cdot \mathrm{Quot}(B)).$$

Аналогично, если (A, W) — пара Шура, мы определяем ее аналитический ранг как

$$\mathrm{An.rank}((A, W)) := \mathrm{rk}_A(W) = \dim_{\mathrm{Quot}(A)}(W \cdot \mathrm{Quot}(A)).$$

Для краткости мы будем называть в этой статье аналитический ранг просто *рангом* (ср. [56, Definition 7.1]).

Определение 6.9. Квазиэллиптическая 1-пара Шура называется *нормализованной*, если $1 \in W$ и A содержит формальные квазиэллиптические операторы, являющиеся *мономами*.

Замечание 6.1. 1. Отметим, что конструкция 6.1 задает почти нормализованные пары Шура в следующем смысле: если W умножить на соответствующий оператор S с постоянными коэффициентами, то пара $(S^{-1}AS, W \diamond S) = (A, WS)$ — эквивалентная нормализованная пара. Кроме того, по тем же рассуждениям из построения, используя лемму 5.2, следствие 5.1 и теорему 5.1, можно найти для любой квазиэллиптической 1-пары Шура эквивалентную нормированную квазиэллиптическую 1-пару Шура.

2. У нормализованной квазиэллиптической 1-пары Шура ранга 1 есть одно прекрасное свойство: поскольку $1 \in W$ и $A \cdot W \subset W$, мы имеем $W \in \mathrm{Quot}(A)$. Мы будем использовать это свойство для доказательства некоторых нетривиальных результатов о поведении 1-квазиэллиптического кольца при линейной замене переменных.

6.4. Допустимая линейная замена переменных. Прежде чем мы сформулируем следующую лемму, нам нужно ввести новые обозначения. Рассмотрим множество элементов $Y \subset V_n$ фиксированного $\mathbf{ord}$-порядка p. Заметим, что Γ-порядок индуцирует на Y функцию порядка со значениями в $\mathbb{Z}$ и с максимальным значением $(0, \dots, 0, p)$ (поскольку Γ-порядок принимает значения в $\mathbb{Z}_+ \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_+ \oplus \mathbb{Z}$). А именно, $(0, \dots, 0, 1, p-1) < (0, \dots, 0, p)$ и нет порядков $\underline{j} = (j_1, \dots, j_n)$ с $|\underline{j}| = p$ таких, что $(0, \dots, 0, 1, p-1) < \underline{j} < (0, \dots, 0, p)$. Мы будем использовать обозначение $(0, \dots, 0, 1, p-1) = (0, \dots, 0, p) - 1$. Аналогично через $(0, \dots, 0, p) - i$ будем обозначать такой Γ-порядок, что существует ровно $i-1$ порядков больше этого; например, $(0, \dots, 0, p) - 2 = (0, \dots, 1, 0, p-1)$, $(0, \dots, 0, p) - 3 = (0, \dots, 1, 0, 0, p-1)$ и т.д.

Лемма 6.6. *Пусть (A, W) — нормализованная квазиэллиптическая 1-пара Шура. Пусть элементы $v_1, \dots, v_k \in A$ таковы, что $\mathbf{ord}(v_i) = p > 0$ для всех $i = 1, \dots, k \le n$, $\sigma(v_i) = \sigma(\overline{v}_i)$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $\sigma(\overline{v}_1), \dots, \sigma(\overline{v}_k)$ алгебраически независимы (над K). Предположим дополнительно, что $v_1 \partial_n^{-\mathbf{ord}(v_k)}, \dots, v_k \partial_n^{-\mathbf{ord}(v_k)} \in K_y[[\partial'_1, \dots, \partial'_{n-1}, \partial_n^{-1}]]$, где $\partial'_i = \partial_i \partial_n^{-1}$.*[3] *Обозначим через $\widehat{K}$ некоторое пополнение поля K (ср. [5, ch. 6]).*

Тогда существует такая обратимая линейная замена переменных

$$\varphi\colon\ \partial_i \mapsto \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}\, \partial_j + \lambda_i \partial_n, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad c_{ij}, \lambda_i \in K, \qquad \partial_n \mapsto \partial_n,$$

что векторное пространство $\widehat{K}_y\langle \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)\rangle$ (над $\widehat{K}_y$) обладает базисом $w_1, \dots, w_k \in \widehat{K}_y[[\partial'_1, \dots, \partial'_{n-1}, \partial_n^{-1}]]$ таким, что $\mathbf{ord}(w_i) = p$, $\sigma(w_i) = \sigma(\overline{w}_i)$, $i = 1, \dots, k$, $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(w_1)) = \mathrm{ord}_\Gamma(w_1) = (0, \dots, 0, p)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(w_i)) = \mathrm{ord}_\Gamma(w_i) = \mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(w_1)) - (i-1)$, $k \ge i > 1$, и $\sigma(w_1), \dots, \sigma(w_k)$ монические. В частности, элементы $w_1, \dots, w_k$ формально квазиэллиптичны.

Более того, существует открытое подмножество $0 \in U \subset \widehat{K}^{n-1}$ такое, что это верно для любых $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in U$.

[3] Если $K_y = K$, то это условие выполняется автоматически.

Доказательство. Прежде всего заметим, что мы можем свести доказательство к случаю $p=0$, умножив все элементы на ∂_n^{-p}.

Пусть $P_1,\dots,P_n$ — монические мономиальные формально квазиэллиптические элементы в A. Рассмотрим кольцо

$$A' = K_y\big[P_1\partial_n^{-\mathbf{ord}(P_1)},\dots,P_{n-1}\partial_n^{-\mathbf{ord}(P_n)},\partial_n^{-1},v_1\partial_n^{-\mathbf{ord}(v_1)},\dots,v_k\partial_n^{-\mathbf{ord}(v_k)}\big] =$$
$$= K_y\big[\partial_1\partial_n^{-1},\dots,\partial_{n-1}\partial_n^{-1},\partial_n^{-1},v_1\partial_n^{-\mathbf{ord}(v_1)},\dots,v_k\partial_n^{-\mathbf{ord}(v_k)}\big].$$

Легко видеть, что $A'\subset K_y[[\partial_1',\dots,\partial_{n-1}',\partial_n^{-1}]]$, где $\partial_i'=\partial_i\partial_n^{-1}$, идеал

$$I = \big(\partial_1',\dots,\partial_{n-1}',\partial_n^{-1},y_1,\dots,y_n\big)\cdot K_y[[\partial_1',\dots,\partial_{n-1}',\partial_n^{-1}]]\cap A'$$

максимальный в A' и что $\widehat{A}_I'\simeq K[[y_1,\dots,y_n,\partial_1',\dots,\partial_{n-1}',\partial_n^{-1}]]$, т.е. A_I' — регулярное локальное кольцо в силу [2, Proposition 11.24]. По лемме 6.5 элементы $v_1\partial_n^{-\mathbf{ord}(v_1)},\dots,v_k\partial_n^{-\mathbf{ord}(v_k)}$ алгебраичны над полем $\mathrm{Quot}(K_y)(\partial_1',\dots,\partial_{n-1}',\partial_n^{-1})$; в частности, образы этих элементов в $\widehat{A}_I'\widehat{\otimes}_K\widehat{K}\simeq\widehat{K}[[y_1,\dots,y_n,\partial_1',\dots,\partial_{n-1}',\partial_n^{-1}]]$ — аналитические функции (определяемые своим рядом Тейлора в некотором открытом полицилиндре $P_0(r)$ с центром в нуле).

Положим $v_i':=v_i\partial_n^{-\mathbf{ord}(v_i)}$, $i=1,\dots,k$. Теперь наше утверждение сводится к утверждению о линейных заменах $\partial_i'\mapsto\partial_i'+\lambda_i$ для аналитических функций v_i' (заметим, что ord_Γ по-прежнему определен на элементах кольца $\widehat{K}[[y_1,\dots,y_n,\partial_1',\dots,\partial_{n-1}',\partial_n^{-1}]]$).

Доказательство проводится индукцией по k. Пусть $k=1$. Пусть $P_0(r)$ — открытый полицилиндр в $\widehat{K}^{n+m}$ с центром в нуле. Тогда для некоторого малого r при любых $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\in K^{n-1}$, $|\lambda|<r$, и $(y_1,\dots,y_n,\partial_1'=t_1,\dots,\partial_{n-1}'=t_{n-1},\partial_n^{-1})\in P_0(r-|\lambda|)$ имеем (см., например, [46, Ch. 2])

$$v_1'(t_1+\lambda_1,\dots,t_{n-1}+\lambda_{n-1}) = \frac{1}{\underline{j}!}\sum_{\underline{j}=(j_1,\dots,j_{n-1})\geq(\underline{0})}\underline{\partial}^{\underline{j}}(v_1')(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})t^{\underline{j}}.$$

Для произвольных фиксированных элементов $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\in K$, $|\lambda|<r$, рассмотрим функцию $v_1'(t_1+\lambda_1,\dots,t_{n-1}+\lambda_{n-1})$ как элемент кольца $\widehat{K}[[y_1,\dots,y_n,\partial_n^{-1}]][[t_1,\dots,t_{n-1}]]$ и будем использовать те же обозначения для функций порядка **ord**, ord_Γ, определенных на элементах этого кольца (полагая $\mathbf{ord}(t_i)=0$, $\mathrm{ord}_\Gamma(t_i)=(\underline{0})-(n-i)$).

Рассмотрим функцию $\widetilde{v}_1:=\overline{v}_1'|_{\partial_n^{-1}:=0}$. Так как $\mathbf{ord}(v_1')=0$ и $\sigma(v_1')=\sigma(\overline{v}_1')$, имеем $\widetilde{v}_1\neq0$. Очевидно, имеется открытое подмножество $0\in U\subset\widehat{K}^{n-1}$ точек $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\in K^{n-1}$, $|\lambda|<r$, таких, что $\widetilde{v}_1(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\neq0$. Тогда

$$\mathrm{ord}_\Gamma\big(v_1'(t_1+\lambda_1,\dots,t_{n-1}+\lambda_{n-1})\big)=\mathrm{ord}_\Gamma\big(\overline{v}_1'(t_1+\lambda_1,\dots,t_{n-1}+\lambda_{n-1})\big)=(\underline{0}).$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $\widetilde{v}_1(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})=1$. Заметим, что ряд $f(y):=v_1'|_{\partial_1'=\dots=\partial_{n-1}'=\partial_n^{-1}=0}-1$ сходится в том же полицилиндре и, следовательно, ряд $w_1:=v_1'-f(y)v_1'$ тоже сходится; кроме того, $\sigma(w_1)$ монический и $\sigma(w_1)=\sigma(\overline{w}_1)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(w_1))=\mathrm{ord}_\Gamma(w_1)=(\underline{0})$.

Для общего k рассмотрим $\widehat{K}_y$-векторное пространство $H_k=\widehat{K}_y\langle v_1'(t),\dots,v_k'(t)\rangle$. По предположению индукции существует линейная замена переменных φ такая, что найдется базис $w_1(t),\dots,w_{k-1}(t)$ в пространстве $\widehat{K}_y\langle\varphi(v_1'(t)),\dots,\varphi(v_{k-1}'(t))\rangle$ с желаемыми свойствами. Тогда можно дополнить этот базис до базиса $w_1(t),\dots,w_{k-1}(t),v_k(t)$ так, что $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(v_k(t)))\leq(\underline{0})-(k-1)$ (и все другие свойства элемента $\sigma(v_k(t))$ сохраняются; в частности, он монический). Если $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(v_k(t)))=(\underline{0})-(k-1)$, то, очевидно, мы можем выбрать v_k таким образом, что $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(v_k(t)))=\mathrm{ord}_\Gamma(v_k(t))$, и мы получаем доказательство нашего утверждения. Итак, предположим, что $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(v_k(t)))<(\underline{0})-(k-1)$.

Если каждая компонента значения $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(v_k(t)))$ не больше единицы, то

$$\sigma(v_k(t)) = t_j + \text{Члены меньшего } \Gamma\text{-порядка},$$

где $j < n-k$. Теперь применим линейную замену $\varphi\colon \partial_j \mapsto \partial_j + \epsilon\partial_{n-k-1}$, $\partial_i \mapsto \partial_i$, $i \neq j$. Нетрудно видеть, что элементы $\varphi(w_i)$, $\varphi(v_k)$ корректно определены для любого ϵ, принадлежат кольцу $K_y[[\partial_1', \dots, \partial_{n-1}', \partial_n^{-1}]]$ и являются аналитическими в том же полидиске (очевидно, они по-прежнему алгебраические; кроме того, эта линейная замена получается при помощи сопряжения оператором $S := \exp\bigl(\sum_{i=1}^{n-1}\bigl(\sum_{j=1}^{n-1}(c_{i,j}-\delta_{i,j})x_j\bigr) * \partial_i\bigr) \in \widehat{D}_n^n$ для подходящих констант $c_{i,j}$; см. следствие 7.1 ниже). Очевидно, они удовлетворяют всем нашим условиям уже для $\epsilon = 1$.

Предположим, существует компонента значения $\mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(v_k(t)))$, большая единицы. Запишем ряды $w_i(t+h)$, $v_k(t+h)$ по *степеням* t, где $h = (y_1 = 0, \dots, y_n = 0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \partial_n^{-1} = 0) \in P_0(r)$, $t = (y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_{n-1}, \partial_n^{-1}) \in P_0(r - |h|)$, как вектор-строки с компонентами

$$\underline{\partial}^{\underline{j}=(j_1,\dots,j_{n-1})}(v_i')(h) := \sum_{(i_1,\dots,i_{n+1})\geq(\underline{0})} \frac{1}{\underline{i}!}\,\partial_{y_1}^{i_1}\dots\partial_{y_n}^{i_n}\,\partial_{\partial_n^{-1}}^{i_{n+1}}\,\frac{1}{\underline{j}!}\,\partial_{t_1}^{j_1}\dots\partial_{t_{n-1}}^{j_{n-1}}(v_i')(h)y_1^{i_1}\dots y_n^{i_n}\,\partial_n^{-i_{n+1}} \in$$
$$\in \widehat{K}[[y_1, \dots, y_n, \partial_n^{-1}]][[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]],$$

где каждая компонента пронумерована мультииндексом $(j_1, \dots, j_{n-1}) \geq (\underline{0})$ и эти индексы упорядочены, как указано перед леммой. Теперь мы можем переформулировать проблему нахождения необходимого базиса в пространстве $H_k = \widehat{K}_y\langle w_1(t+h), \dots, w_{k-1}(t+h), v_k(t+h)\rangle$: такой базис w_i существует, если и только если $(k\times k)$-матрица $(\underline{\partial}^{\underline{j}}(v_i')(h))$, $\underline{j} < \underline{0} + k$, $i = 1, \dots, k$, обратима, т.е. ее определитель не равен нулю, для некоторого h.

Чтобы показать, что такое h существует, нужно показать, что определитель этой матрицы не равен тождественно нулю как ряд в кольце $\widehat{K}[[y_1, \dots, y_n, \partial_n^{-1}]][[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]]$ (возможно, после некоторой линейной замены координат). Для удобства мы представим каждый элемент этой матрицы в виде ряда $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) + (\mathcal{M}^{\mathbf{ord}(f)+1})$, где $f(t_1, \dots, t_{n-1})$ — однородный многочлен относительно порядка **ord** и $(\mathcal{M}^{\mathbf{ord}(f)+1})$ — сумма элементов из идеала $\mathcal{M}$, порожденного элементами $y_1, \dots, y_n, \partial_n^{-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Очевидно, мы можем предположить, что $\underline{\partial}^{\underline{j}}(w_i)(h) = (\mathcal{M})$ для $i = 1, \dots, k-1$, $(\underline{0}) - (k-2) \leq \underline{j} < (\underline{0}) - (i-1)$. Сделав, если нужно, линейную замену $\partial_i \mapsto \partial_i + \varepsilon_{i,k}\partial_k + \ldots + \varepsilon_{i,n}\partial_n$, $i = 1, \dots, k-1$, для подходящих констант $\varepsilon_{i,j} \in K$, мы также можем предполагать, что $\underline{\partial}^{\underline{j}}(w_i)(h) = (\mathcal{M})$ для $i = k, \dots, n$.

Заметим, что

$$\widehat{K}[[y_1, \dots, y_n, \partial_n^{-1}]][[w_1(t), \dots, w_{k-1}(t), t_k, \dots, t_n]] = \widehat{K}[[y_1, \dots, y_n, \partial_n^{-1}]][[t_1, \dots, t_n]]$$

и что элемент $\sigma(v_k(t))$, записанный как ряд в кольце $\widehat{K}[[y_1, \dots, y_n, \partial_n^{-1}]][[w_1, \dots, w_{k-1}, t_k, \dots, t_n]]$, зависит от одного из $t_k, \dots, t_n$ (нетрудно видеть, что элемент $v_k(t)$ аналитичен также как ряд от новых переменных). Действительно, если он не зависит от $t_k, \dots, t_n$, то он алгебраически независим с $t_k, \dots, t_n$. Нетрудно видеть, что элементы $\sigma(v_1(t)), \dots, \sigma(v_k(t))$ алгебраически независимы над K тогда и только тогда, когда $\varphi(\sigma(v_1(t))), \dots, \varphi(\sigma(v_k(t)))$ алгебраически независимы для любой линейной замены φ из формулировки, и также тогда и только тогда, когда элементы $\sigma(w_1(t)), \dots, \sigma(w_{k-1}(t)), \sigma(v_k(t))$ алгебраически независимы. Таким образом, элемент $\sigma(v_k(t))$ также алгебраически независим с $\sigma(w_1), \dots, \sigma(w_{k-1})$ (так как он алгебраически независим с $\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_{k-1})$ по предположению). Итак, применяя обратную линейную замену переменных к подпространству, порожденному этими элементами, получаем $n+1$ алгебраически независимых элементов в кольце A — противоречие с леммой 6.5.

Сделав, если нужно, линейную замену переменных, мы можем считать, что $\sigma(v_k(t))$ зависит от t_k. Тогда, делая линейную замену $\partial_i \mapsto \partial_i + \lambda_i\partial_n$, $i = 1, \dots, k$, для общих λ_i из некоторого открытого подмножества $0 \in U \subset \widehat{K}^k$ (как на первом шаге индукции), мы получим новый ряд $v_k(\lambda)$, который содержит моном вида ct_k, $0 \neq c \in \widehat{K}$. В то же время в пространстве $\widehat{K}\langle w_1(\lambda), \dots, w_{k-1}(\lambda)\rangle$ мы все еще можем выбрать базис с теми же свойствами, что и выше. Тогда, беря подходящую линейную комбинацию этого базиса и нового элемента $v_k(\lambda)$, мы можем получить ряд вида $v_k(\lambda) = \lambda_k + (\mathcal{M})$, где $\mathrm{ord}_\Gamma(v_k) = \mathrm{ord}_\Gamma(\sigma(v_k)) = \mathrm{ord}_\Gamma(\lambda_k)$.

В этих обозначениях матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1+(\mathcal{M}) & (\mathcal{M}) & \dots & (\mathcal{M}) & (\mathcal{M}) \\ (\mathcal{M}) & 1+(\mathcal{M}) & \dots & (\mathcal{M}) & (\mathcal{M}) \\ \vdots & \dots & \ddots & (\mathcal{M}) & \vdots \\ (\mathcal{M}) & \dots & \dots & 1+(\mathcal{M}) & (\mathcal{M}) \\ (\mathcal{M}) & \dots & \dots & (\mathcal{M}) & 1+(\mathcal{M}) \end{pmatrix},$$

и это означает, что ее определитель не равен нулю, что и требовалось доказать. □

Определение 6.10. Пусть (A, W) есть 1-пара Шура. Линейная замена переменных φ из леммы 6.6 называется *допустимой*, если пространства $\varphi(A)$, $\varphi(W)$ корректно определены (т.е. все элементы $\varphi(a)$, $\varphi(w)$, $a \in A$, $w \in W$, корректно определены).

Замечание 6.2. 1. Если K — полное поле и (A, W) — нормализованная 1-пара Шура, ассоциированная с квазиэллиптическим кольцом $B \subset \widehat{D}_n$ ранга 1, и если существует базис $\{w_i\}$ в W такой, что $w_i \in K_y[[\partial_1', \dots, \partial_{n-1}', \partial_n^{-1}]]$ для всех i (обозначение из леммы 6.6)[4], то допустимые замены существуют. Действительно, согласно п. 2 замечания 6.1 имеем $A \subset W \subset \mathrm{Quot}(A)$. Тогда из доказательства леммы 6.6 получаем, что элементы из W, A — аналитические функции (после умножения на подходящую степень ∂_n), и, следовательно, существуют допустимые замены, поскольку пересечение счетного числа открытых окрестностей нуля в K^{n-1} непусто для полного поля K.

Если A конечно порождено над K и W — конечно порожденный A-модуль, те же аргументы показывают, что существует открытое подмножество $0 \in U \subset K^{n-1}$ такое, что линейная замена φ из леммы 6.6 допустима для любых $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in U$.

2. Очевидно, что всякая обратимая линейная замена переменных может быть разложена в композицию линейной замены из леммы 6.6 и линейной замены вида $\partial_i \mapsto \partial_i$, $i = 1, \dots, n-1$, $\partial_n \mapsto \alpha\partial_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i\partial_i$, $\alpha \neq 0$. Ясно, что последняя линейная замена допустима, т.е. оба пространства корректно определены после ее применения.

3. Заметим, что если $B \subset \widehat{D}_n$ — квазиэллиптическое кольцо и φ — *произвольная* линейная замена, то $\varphi(B)$ — корректно определенное кольцо в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$.

4. Пусть S — оператор Сато из конструкции 6.1, построенный по данному квазиэллиптическому кольцу $B \subset \widehat{D}_n$, пусть (A, W) — соответствующая 1-пара Шура, и пусть φ — допустимая линейная замена. Тогда $\varphi(S)$ — корректно определенный оператор из $\widehat{\Pi}_n$. Действительно, все слайсы оператора S — конечные линейные комбинации элементов из W (см. доказательство теоремы 6.1).

5. Пусть (A, W) есть 1-пара Шура. Тогда для любой допустимой замены φ имеем $\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$, $\varphi(aw) = \varphi(a)\varphi(w)$ для любых $a_i, a \in A$, $w \in W$. Это легко следует из разложения в ряд Тейлора.

Предложение 6.1. *Пусть K — полное поле. Пусть $B \subset \widehat{D}_n$ — квазиэллиптическое кольцо, пусть (A, W) — нормализованная 1-пара Шура, ассоциированная с B, из конструкции 6.1, и пусть φ — допустимая линейная замена переменных.*

[4] Это условие тривиально, если $K_y = K$.

Тогда существует оператор $U \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$ такой, что $B' := U^{-1}\varphi(B)U \subset \widehat{D}_n$. Более того, B' — кольцо, ассоциированное с 1*-парой Шура $(\varphi(A), \varphi(W))$ при помощи конструкции* 6.2, *и если эта пара Шура квазиэллиптична, то и B' квазиэллиптично.*

Доказательство. Пусть (A, W) — нормализованная пара Шура, ассоциированная с кольцом B, $A = S^{-1}BS$, $W = F \diamond S$, $S \in \widehat{E}_n$ (см. замечание 6.1). Тогда согласно замечанию 6.2 для любого $f \in A$ и соответствующего оператора $\mathtt{L}_S(f)$ операторы $\varphi(S)$, $\varphi(f)$, $\varphi(\mathtt{L}_S(f))$ корректно определены и, более того, $\varphi(Sf) = \varphi(S)\varphi(f)$, $\varphi(\mathtt{L}_S(f)S) = \varphi(\mathtt{L}_S(f))\varphi(S)$. Действительно, произведения операторов справа корректно определены согласно их определениям, а левые части корректно определены, так как все слайсы у Sf и $\mathtt{L}_S(f)S$ являются конечными суммами произведений слайсов операторов S и f (для первого произведения) и слайсов оператора S и многочленов (для второго произведения). Тождества теперь следуют из разложений в ряды Тейлора левых и правых частей (по-другому их можно получить, сравнивая $\varphi(\underline{\partial}^{\underline{j}}) \diamond L$ и $\varphi(\underline{\partial}^{\underline{j}}) \diamond R$, где L и R — левая и правая части, и используя индукцию по $|\underline{j}|$). Наконец, имеем

$$\varphi(Sf) = \varphi(S)\varphi(f) = \varphi(\mathtt{L}_S(f)S) = \varphi(\mathtt{L}_S(f))\varphi(S),$$

т.е. $\varphi(S)\varphi(A) = \varphi(B)\varphi(S)$. Кроме того, $\varphi(W) = F \diamond \varphi(S)$, так как $\varphi(F) = F$, т.е. $\varphi(S)$ — оператор Сато для $\varphi(W)$. По утверждению (4) теоремы 6.1 существует однозначное разложение $\varphi(S) = U \circ S_0$, где $U \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$; следовательно, $S_0\varphi(A)S_0^{-1} = U^{-1}\varphi(B)U$. Из конструкции 6.2 мы знаем (см. также утверждение (5) теоремы 6.1), что $B' = S_0\varphi(A)S_0^{-1} \in \widehat{D}_n$ и, более того, это кольцо квазиэллиптично, если $\varphi(A)$ квазиэллиптично. $\square$

7. ТЕОРИЯ ШУРА ДЛЯ $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$

Аналог теории Шура существует также для кольца $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. Он совершенно новый и отличается от теории Шура для $\widehat{D}_n$.

7.1. Централизаторы операторов с постоянными коэффициентами. Введем следующее обозначение. Для любого $P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ положим

$$P_{[q]} := \sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}_0^n,\, |\underline{k}|=q} \frac{x^{\underline{k}}}{\underline{k}!} P_{(\underline{k})}$$

(частичное разложение на слайсы), где мы используем разложение на слайсы из (6.1). Таким образом, $P = \sum_{q\ge 0} P_{[q]}$. Положим $\overline{P} := P|_{y=0}$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ — натуральное число. Фиксируем примитивный корень k-й степени из единицы ξ_k в подходящем расширении $\widetilde{K}$ поля K. Для любого $i \in \mathbb{Z}$ и $1 \le q \le n$ определим операторы

$$A_{k;i,q} := \exp\bigl((\xi_k^i - 1)x_q * \partial_q\bigr) \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}} \otimes_K \widetilde{K}$$

(мы используем здесь те же обозначения, что и в теореме 2.1). Напомним также операторы интегрирования, введенные в ходе доказательства теоремы 2.1:

$$\int_i := \bigl(1 - \exp((-x_i) * \partial_i)\bigr) \cdot \partial_i^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}(-\partial)^k.$$

Заметим, что все эти операторы однородны и $\mathbf{ord}(A_{k;i,q}) = 0$, $\mathbf{ord}(\int_i) = -1$. Кроме того, $\partial_i \int_i = 1$, но $\int_i \partial_i = 1 - \delta_i$.

Предложение 7.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Для любых i, j, q, p, l имеем*

$$A_{k;i,q}\,A_{k;j,q}=A_{k;i+j,q},\qquad A_{k;i,q}\,A_{k;j,l}=A_{k;j,l}\,A_{k;i,q},$$

$$\partial_q^p A_{k;i,q}=\xi_k^{pi}A_{k;i,q}\,\partial_q^p,\qquad A_{k;i,q}x_q^p=\xi_k^{pi}x_q^p\,A_{k;i,q},\qquad \int_q^p A_{k;i,q}=\xi_k^{-pi}A_{k;i,q}\int_q^p,$$

$$[\partial_q^p,A_{k;i,l}]=0,\qquad [x_q^p,A_{k;i,l}]=0,\qquad \left[\int_q^p,A_{k;i,l}\right]=0\qquad \text{при}\quad q\neq l.$$

В частности, $A_{k;i,q}\,A_{k;k-i,q}=1$.

2. *Для данного $Q\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ предположим, что $[\partial_q^k,Q]=0$ для некоторого $q\in\{1,\dots,n\}$. Тогда $Q=c_0+c_1A_{k;1,q}+\ldots+c_{k-1}A_{k;k-1,q}\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}\otimes_K\widetilde{K}$, где $c_i\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}\otimes_K\widetilde{K}$ определены по формуле*

$$c_i=\sum_{m=0}^{\infty}c_{i,m}\,\partial_q^m+c_{i,-1}\int_q+\ldots+c_{i,-k+1}\int_q^{k-1},$$

в которой $c_{i,j}$ не зависят от x_q, ∂_q и $\mathbf{ord}(c_{i,j})\le\mathbf{ord}(Q)-j$ для всех i, j (так что $\mathbf{ord}(c_i)\le\mathbf{ord}(Q)$).

3. *В частности, если $[\partial_q^{k_j},Q]=0$ при $q=i_1,\dots,i_l\in\{1,\dots,n\}$, $j=1,\dots,l$, то*

$$Q=\sum_{j_1=0}^{k_1-1}\ldots\sum_{j_l=0}^{k_l-1}c_{j_1,\dots,j_l}A_{k_1;j_1,i_1}\ldots A_{k_l;j_l,i_l},$$

где $c_{j_1,\dots,j_l}\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}\otimes_K\widetilde{K}$ заданы аналогичными формулами и $\mathbf{ord}(c_{j_1,\dots,j_l})\le\mathbf{ord}(Q)$. Кроме того, коэффициенты $c_{j_1,\dots,j_l}$ однозначно определены.

Если $K_y=K$ и $\{i_1,\dots,i_l\}=\{1,\dots,n\}$, то все коэффициенты $c_{j_1,\dots,j_l}$ являются многочленами от ∂_q и $\int_q$, $q=1,\dots,n$, с постоянными коэффициентами (из поля $\widetilde{K}$) и степень этих многочленов относительно ∂_q не больше $\mathbf{ord}(Q)$, а степень этих многочленов относительно $\int_q$ не больше $k-1$.

Доказательство. 1. Из общих свойств операторов (см. теорему 2.1) имеем

$$A_{k;i,q}(f(x_1,\dots,x_n))=f(x_1,\dots,\xi_k^i x_q,\dots,x_n)$$

для всех $f\in\widetilde{K}[[x_1,\dots,x_n]]$. Отсюда немедленно следуют все тождества из утверждения 1.

2. Тождество $[\partial_q^k,Q]=0$ можно переписать как

$$\sum_{i=1}^{k}C_k^i\,\partial_q^i(Q)\partial_q^{k-i}=0. \tag{7.1}$$

Любое решение $Q\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ этого уравнения определяет решение $Q'\in\widetilde{K}[[x_1,\dots,x_n,\widetilde{\partial}_1,\dots,\widetilde{\partial}_n]]$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{k}C_k^i\,\partial_q^i(Q')\widetilde{\partial}_q^{k-i}=0,$$

где $\widetilde{\partial}_q$ — новая формальная переменная (коммутирующая со всеми x_i). А именно, мы можем просто заменить ∂_i на $\widetilde{\partial}_i$ в ряде Q.

С другой стороны, последнее уравнение можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^{k}\big(\partial_q+(1-\xi_k^i)\widetilde{\partial}_q\big)(Q')=0.$$

Любое решение последнего уравнения в *коммутативном кольце*

$$\widetilde{R}:=\widetilde{K}[[x_1,\dots,x_n,\widetilde{\partial}_1,\dots,\widehat{\widetilde{\partial}}_q,\dots,\widetilde{\partial}_n]]((\widetilde{\partial}_q))$$

имеет вид

$$Q'=c_0+c_1\exp\big((\xi_k-1)x_q\widetilde{\partial}_q\big)+\ldots+c_{k-1}\exp\big((\xi_k^{k-1}-1)x_q\widetilde{\partial}_q\big),$$

где $c_i\in\widetilde{R}$ не зависят от x_q (как это следует из элементарной дифференциальной алгебры). Если выбрать каноническую форму записи элементов из $\widetilde{R}$, в которой каждый моном имеет вид $\underline{x}^{\underline{j}}\,\underline{\widetilde{\partial}}^{\underline{k}}$ (с x_i слева и $\widetilde{\partial}_j$ справа), то правая часть последней формулы перепишется в виде

$$\begin{aligned}Q''&:=\sum_{\underline{j}=(j_1,\dots,\widehat{j}_q,\dots,j_n)\ge 0}\underline{x}^{\underline{j}}\Big(c_{0,(\underline{j})}+\exp\big((\xi_k-1)x_q\widetilde{\partial}_q\big)c_{1,(\underline{j})}+\ldots+\exp\big((\xi_k^{k-1}-1)x_q\widetilde{\partial}_q\big)c_{k-1,(\underline{j})}\Big)=\\&=\sum_{\underline{j}=(j_1,\dots,\widehat{j}_q,\dots,j_n)\ge 0}\underline{x}^{\underline{j}}\big(c_{0,(\underline{j})}+\widetilde{A}_{k;1,q}\,c_{1,(\underline{j})}+\ldots+\widetilde{A}_{k;k-1,q}\,c_{k-1,(\underline{j})}\big),\end{aligned}\tag{7.2}$$

где $c_{i,(\underline{j})}$ — соответствующий слайс коэффициента c_i. Тогда Q' и Q'' также равны как элементы, записанные в этом представлении. Заметим, что, поскольку Q' содержит только неотрицательные степени ∂_q, все скобки в формуле (7.2) являются рядами, в которых ∂_q появляются только с неотрицательными степенями (и если мы заменим $\widetilde{\partial}_i$, $i=1,\dots,n$, на ∂_i во всех членах ряда Q'', мы получим опять оператор Q).

Лемма 7.1. *Для любого* $i=0,\dots,k-1$ *имеем* $\mathbf{ord}(c_{i,(\underline{j})})\le\mathbf{ord}(Q)+|\underline{j}|$ *в формуле* (7.2), *где порядок* **ord** *определен на* $\widetilde{R}$ *так же, как на* $\widehat{\mathcal{M}}_n$.

Доказательство. Так как элементы $c_{i,(\underline{j})}$ — многочлены от $\widetilde{\partial}_q^{-1}$, любую скобку в (7.2) можно записать в виде

$$\big(\widetilde{c}_{0,(\underline{j})}+\widetilde{A}_{k;1,q}\,\widetilde{c}_{1,(\underline{j})}+\ldots+\widetilde{A}_{k;k-1,q}\,\widetilde{c}_{k-1,(\underline{j})}\big)\widetilde{\partial}_q^{-m_{\underline{j}}},$$

где $\widetilde{c}_{i,(\underline{j})}\in\widetilde{K}[[x_1,\dots,x_n,\widetilde{\partial}_1,\dots,\widetilde{\partial}_n]]$ и $m_{\underline{j}}\ge 0$, т.е. ряд в скобках делится на $\widetilde{\partial}_q^{m_{\underline{j}}}$. Будем дополнительно предполагать, что $m_{\underline{j}}$ минимально, т.е. что $\mathrm{GCD}\big(\widetilde{c}_{0,(\underline{j})},\dots,\widetilde{c}_{k-1,(\underline{j})}\big)$ не делится на $\widetilde{\partial}_q$.

Очевидно, что разложение на слайсы единственно также в пространстве $\widetilde{R}$, и, следовательно, для любого фиксированного индекса $\underline{j}$ в (7.2) имеется однозначное разложение

$$c_{0,(\underline{j})}+\widetilde{A}_{k;1,q}\,c_{1,(\underline{j})}+\ldots+\widetilde{A}_{k;k-1,q}\,c_{k-1,(\underline{j})}=\sum_{|\underline{l}|\ge -m_{\underline{j}}}\big(c_{0,\underline{l}}+c_{1,\underline{l}}\,\widetilde{A}_{k;1,q}+\ldots+c_{k-1,\underline{l}}\,\widetilde{A}_{k;k-1,q}\big)\underline{\widetilde{\partial}}^{\underline{l}},$$

где $c_{i,\underline{l}}\in\widetilde{K}_y$. Так как $\mathbf{ord}(Q)<\infty$ и $\mathbf{ord}(A_{k;i,q})=0$, должно выполняться неравенство

$$\mathbf{ord}\big(c_{0,(\underline{j})}+\widetilde{A}_{k;1,q}\,c_{1,(\underline{j})}+\ldots+\widetilde{A}_{k;k-1,q}\,c_{k-1,(\underline{j})}\big)\le\mathbf{ord}(Q)+|\underline{j}|,$$

и, следовательно, по лемме 7.2 (см. ниже) $c_{i,\underline{l}}=0$ для всех $\underline{l}$ таких, что $|\underline{l}|\ge\mathbf{ord}(Q)+|\underline{j}|$, и всех $i=0,\dots,k-1$. Но это в точности означает, что $\mathbf{ord}(c_{i,(\underline{j})})\le\mathbf{ord}(Q)+|\underline{j}|$ для всех i. $\square$

Лемма 7.2. *Сумма*

$$A := c_{0,\underline{l}} + c_{1,\underline{l}}\,\widetilde{A}_{k;1,q} + \ldots + c_{k-1,\underline{l}}\,\widetilde{A}_{k;k-1,q}, \qquad c_{i,\underline{l}} \in \widetilde{K}_y,$$

равна нулю тогда и только тогда, когда $c_{i,\underline{l}} = 0$, $i = 0,\ldots,k-1$. *Если она не равна нулю, то она имеет порядок* 0.

Доказательство. Ясно, что $\mathbf{ord}(A) \le 0$. Заметим, что равенство $A = 0$ эквивалентно бесконечной системе линейных уравнений

$$c_{0,\underline{l}} + c_{1,\underline{l}} + \ldots + c_{k-1,\underline{l}} = 0, \qquad c_{1,\underline{l}}(\xi_k - 1)^j + \ldots + c_{k-1,\underline{l}}\big(\xi_k^{k-1} - 1\big)^j = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу хорошо известного свойства матрицы Вандермонда эта система имеет единственное решение $c_{i,\underline{l}} = 0$, $i = 0,\ldots,k-1$. Второе утверждение очевидно. $\square$

Из леммы 7.1 следует, что ряды $\widetilde{c}_{i,(\underline{j})}$ будут принадлежать кольцу $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ после замены $\widetilde{\partial}_i$ на ∂_i во всех слагаемых. Теперь заметим, что в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ мы имеем равенство

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{c}_{0,(\underline{j})} + \widetilde{A}_{k;1,q}\,\widetilde{c}_{1,(\underline{j})} + \ldots + \widetilde{A}_{k;k-1,q}\,\widetilde{c}_{k-1,(\underline{j})}\big)\,\partial_q^{-m_{\underline{j}}}\big|_{\widetilde{\partial}_i\mapsto\partial_i} &=\\ = \big(\widetilde{c}_{0,(\underline{j})} + \widetilde{A}_{k;1,q}\,\widetilde{c}_{1,(\underline{j})} + \ldots + \widetilde{A}_{k;k-1,q}\,\widetilde{c}_{k-1,(\underline{j})}\big)\big|_{\widetilde{\partial}_i\mapsto\partial_i} \int_q^{m_{\underline{j}}}&,\end{aligned}$$

т.е. Q можно записать в виде

$$Q = \sum_{\underline{j}=(j_1,\ldots,\widehat{j}_q,\ldots,j_n)\ge 0} \underline{x}^{\underline{j}}\big(\widetilde{c}_{0,(\underline{j})} + \widetilde{A}_{k;1,q}\,\widetilde{c}_{1,(\underline{j})} + \ldots + \widetilde{A}_{k;k-1,q}\,\widetilde{c}_{k-1,(\underline{j})}\big)\big|_{\widetilde{\partial}_i\mapsto\partial_i} \int_q^{m_{\underline{j}}}. \tag{7.3}$$

Кроме того, все слагаемые в сумме (7.3) — корректно определенные элементы кольца $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ порядков $\le \mathbf{ord}(Q)$ и их сумма также корректно определена в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$.

Лемма 7.3. *В формуле* (7.3) *имеют место неравенства* $m_{\underline{j}} \le k-1$.

Доказательство. Сначала заметим, что все числа $m_{\underline{j}}$ ограничены сверху, поскольку коэффициенты c_i оператора Q' — многочлены от $\widetilde{\partial}_q^{-1}$. Теперь предположим обратное: существует $m := m_{\underline{j}} \ge k$. Предположим, что m — максимальное такое число. Пусть Q_l — однородная компонента оператора Q, содержащая слагаемое с $\int_q^m$. Заметим, что каждое слагаемое компоненты Q_l имеет вид $c\partial_q^i$ или $c\int_q^j$, где c — линейная комбинация операторов $A_{k;s,q}$, $s = 0,\ldots,k-1$, с коэффициентами, не зависящими от x_q, ∂_q, и $j \le m$, т.е.

$$\begin{aligned}Q_l = \sum_{i=0}^{\infty}\big(a_{i,0} + a_{i,1}A_{k;1,q} + \ldots + a_{i,k-1}A_{k;k-1,q}\big)\partial_q^i + \big(a_{-1,0} + \ldots + a_{-1,k-1}A_{k;k-1,q}\big)\int_q + \ldots\\ \ldots + \big(a_{-m,0} + a_{-m,1}A_{k;1,q} + \ldots + a_{-m,k-1}A_{k;k-1,q}\big)\int_q^m.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Поскольку Q_l однороден, имеем $\mathbf{ord}(a_{i,0} + a_{i,1}A_{k;1,q} + \ldots + a_{i,k-1}A_{k;k-1,q}) = l - i$. Так как $a_{-m,0} + a_{-m,1}A_{k;1,q} + \ldots + a_{-m,k-1}A_{k;k-1,q} \ne 0$, существует $p \ge 0$ такое, что

$$a_{-m,0} + \frac{a_{-m,1}(\xi_k - 1)^p x_q^p\,\partial_q^p}{p!} + \ldots + \frac{a_{-m,k-1}\big(\xi_k^{k-1} - 1\big)^p x_q^p\,\partial_q^p}{p!} \ne 0.$$

Предположим, что p — минимальное такое число. Из леммы 7.2 следует, что $p \le k-1$.

Так как $[\partial_q^k, Q] = 0$, получаем

$$0 = [\partial_q^k, Q_l] = \partial_q^k(Q_l) + k\partial_q^{k-1}(Q_l)\partial_q + \ldots + k\partial_q(Q_l)\partial_q^{k-1}.$$

Теперь раскроем все ряды в этой сумме и соберем все слагаемые, содержащие $x_q^{m-k+p}\partial_q^p$. Заметим, что таких слагаемых, кроме выражения

$$m\dots(m-k+1)\biggl(a_{-m,0}+\frac{a_{-m,1}(\xi_k-1)^p x_q^p\,\partial_q^p}{p!}+\dots+\frac{a_{-m,k-1}\bigl(\xi_k^{k-1}-1\bigr)^p x_q^p\,\partial_q^p}{p!}\biggr)x_q^{m-k+p}\,\partial_q^p$$

(происходящего из суммы $(a_{-m,0}+a_{-m,1}A_{k;1,q}+\dots+a_{-m,k-1}A_{k;k-1,q})\partial_q^k(\int_q^m)$), нет, и, так как это выражение не равно нулю, получаем противоречие. Действительно, для $i\ge 0$ и любого $0<l\le k$ имеем

$$\partial_q^l\bigl((a_{i,0}+a_{i,1}A_{k;1,q}+\dots+a_{i,k-1}A_{k;k-1,q})\partial_q^i\bigr)\partial_q^{k-l}=\bigl(a'_{i,1}A_{k;1,q}+\dots+a'_{i,k-1}A_{k;k-1,q}\bigr)\partial_q^{i+k}$$

(здесь $a'_{i,r}=a_{i,j}\xi_k^{jr}$) и все мономы, содержащие x_q^{m-k+p}, из этого ряда содержат также ∂_q^{m+p+i}. Для других выражений из (7.4) имеем

$$\begin{aligned}
\partial_q^l\biggl(&(a_{i,0}+a_{i,1}A_{k;1,q}+\dots+a_{i,k-1}A_{k;k-1,q})\int_q^j\biggr)\partial_q^{k-l}=\\
&=\partial_q^l\biggl(\int_q^j\bigl(a_{i,0}+a'_{i,1}A_{k;1,q}+\dots+a'_{i,k-1}A_{k;k-1,q}\bigr)\biggr)\partial_q^{k-l}=\\
&=\sum_{\mu+\nu=l}c_{\mu,\nu}\,\partial_q^\nu\biggl(\int_q^i\biggr)\partial_q^\mu\bigl(a_{i,0}+a'_{i,1}A_{k;1,q}+\dots+a'_{i,k-1}A_{k;k-1,q}\bigr)\partial_q^{k-l}=\\
&=\sum_{\mu+\nu=l}c_{\mu,\nu}\,\partial_q^\nu\biggl(\int_q^i\biggr)\bigl(a'_{i,1}(\xi_k-1)^\mu A_{k;1,q}+\dots+a'_{i,k-1}\bigl(\xi_k^{k-1}-1\bigr)^\mu A_{k;k-1,q}\bigr)\partial_q^{k-\nu},
\end{aligned}$$

где $c_{\mu,\nu}\in\mathbb{N}$ и $a'_{i,r}=a_{i,j}\xi_k^{jr}$. Теперь рассмотрим произвольный ряд

$$\partial_q^\nu\biggl(\int_q^i\biggr)\bigl(a'_{i,1}(\xi_k-1)^\mu A_{k;1,q}+\dots+a'_{i,k-1}\bigl(\xi_k^{k-1}-1\bigr)^\mu A_{k;k-1,q}\bigr)\partial_q^{k-\nu}$$

из этой формулы и заметим, что все мономы, содержащие x_q^{m-k+p}, из этого ряда содержат также $\partial_q^{m-k+p-i+\nu+k-\nu}=\partial_q^{m+p-i}$. Если $i<m$, то $m+p-i>p$ и, следовательно, не существует слагаемых, содержащих $x_q^{m-k+p}\partial_q^p$.

Если $i=m$, но $\nu<k$, то

$$a'_{i,1}(\xi_k-1)^{\mu+s}x_q^s\,\partial_q^s+\dots+a'_{i,k-1}\bigl(\xi_k^{k-1}-1\bigr)^{\mu+s}x_q^s\,\partial_q^s=0$$

для $s=0,\dots,\nu-k+p$ по условию на p (его минимальности), и, следовательно, опять не существует слагаемых, содержащих $x_q^{m-k+p}\partial_q^p$. $\square$

Теперь, раскрывая все скобки в формуле (7.3) и используя тождества из утверждения 1, можно переписать выражение для Q в том виде, который сформулирован в утверждении 2.

3. Это утверждение сразу следует из утверждения 2 по индукции. Покажем единственность коэффициентов.

Достаточно доказать, что равенство

$$0=\sum_{j_1=0}^{k_1-1}\dots\sum_{j_l=0}^{k_l-1}c_{j_1,\dots,j_l}\,A_{k_1;j_1,i_1}\dots A_{k_l;j_l,i_l}$$

влечет за собой равенства $c_{j_1,\dots,j_l}=0$. По лемме 6.2 это равенство эквивалентно системе равенств $\underline{\partial}^{\underline{q}}\diamond A=0$, где A — рассматриваемая сумма, а $\underline{q}\in\mathbb{N}_0^n$. Заметим, что эта система эквивалентна системе $A_{(\underline{q})}=0$, $\underline{q}\in\mathbb{N}_0^n$.

Пусть $\underline{i}$ — подмножество в $\{1,\dots,n\}$, дополнительное к множеству $\{i_1,\dots,i_l\}$. Заметим, что последняя система эквивалентна системе

$$\sum_{j_1=0}^{k_1-1}\dots\sum_{j_l=0}^{k_l-1}(c_{j_1,\dots,j_l})_{(\underline{i})}\,\xi_{k_1}^{q_1j_1}\dots\xi_{k_l}^{q_lj_l}=0,\qquad \underline{q}\in\mathbb{N}_0^n. \tag{7.5}$$

Теперь заметим, что система (7.5) представляет собой систему линейных уравнений с неопределенными величинами $(c_{j_1,\dots,j_l})_{(\underline{i})}$ и матрицей $\bigl(\xi_{k_1}^{q_1j_1}\dots\xi_{k_l}^{q_lj_l}\bigr)$, которая является просто матрицей тензорного произведения матриц Вандермонда $\bigl(\xi_{k_s}^{q_sj_s}\bigr)$, $q_s,j_s=0,\dots,k_s$. Следовательно, она обратима и система имеет единственное (нулевое) решение. □

Определение 7.1. Элемент $P\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ называется *p-регулярным*, где $p\in\mathbb{N}_0$, если элементы множества $\{\underline{\partial}^{\underline{k}}\diamond\sigma(P)\mid \underline{k}\in\mathbb{N}_0^n\colon|\underline{k}|\le p\}\subset F$ линейно независимы.

Начнем с теории Шура для случая $n=1$.

7.2. Теория Шура, $n=1$.

Предложение 7.2. *Пусть $P\in\widehat{D}_1^{\mathrm{sym}}$ — регулярный оператор с $\mathbf{ord}(P)=\mathbf{ord}(\overline{P})=k>0$ такой, что $\overline{P}$ является регулярным. Тогда существует обратимый оператор $S\in\widehat{D}_1^{\mathrm{sym}}$, $\mathbf{ord}(S)=0$, такой, что $P=S^{-1}\partial_1^kS$.*

Доказательство. Мы построим оператор S рекурсивно, ища частичные разложения на слайсы $S_{[q]}$, $S=\sum_{q\ge0}S_{[q]}$.

Для любого $p\ge0$ нужно решить систему

$$(\partial_1^kS)_{[p]}=(SP)_{[p]}.$$

Заметим, что

$$(\partial_1^kS)_{[p]}=\partial_1^k(S_{[p+k]})+\text{Выражение, зависящее от }S_{[q]},\qquad q<p+k,$$

и $(SP)_{[p]}=((S_{[0]}+\ldots+S_{[p]})P)_{[p]}$. Положим $S_{[0]}:=1$, $S_{[p]}:=0$ для $1\le p\le k-1$. Тогда для $p=0$ имеем

$$(\partial_1^kS)_{[0]}=\partial_1^k(S_{[k]})+\partial_1^k=P_{[0]},$$

и поэтому слайс $S_{(k)}$ определяется однозначно; кроме того, $\mathbf{ord}(S_{[k]})\le0$. По этой же причине все частичные разложения на слайсы $S_{[p]}$, $p>k$, будут однозначно определяться этой системой, и по индукции получаем $\mathbf{ord}(S_{[p]})\le0$. Поскольку $\mathbf{ord}(S_{[0]})=0$, мы также получаем $\mathbf{ord}(S)=0$. Заметим, что равенство $(\partial_1^k\overline{S})_{[p]}=(\overline{S}\overline{P})_{[p]}$ выполнено автоматически.

По следствию 6.1 оператор S обратим тогда и только тогда, когда S и $\overline{S}$ регулярны. Сначала заметим, что S и $\overline{S}$ являются k-регулярными: для любого $0\le i\le k$ имеем

$$\partial_1^i\diamond S=\partial_1^i\diamond(S_{[0]}+\ldots+S_{[k]})=\begin{cases}\partial_1^i, & \text{если } i<k,\\ P_{[0]}, & \text{если } i=k,\end{cases}$$

$$\partial_1^i\diamond\overline{S}=\partial_1^i\diamond(\overline{S}_{[0]}+\ldots+\overline{S}_{[k]})=\begin{cases}\partial_1^i, & \text{если } i<k,\\ \overline{P}_{[0]}, & \text{если } i=k.\end{cases}$$

Поскольку P и $\overline{P}$ регулярны, имеем $\sigma(P)_{[0]}\ne0$, $\mathbf{ord}(\sigma(P)_{[0]})=\mathbf{ord}(P_{[0]})=k$ и аналогично $\overline{\sigma(P)}_{[0]}\ne0$, $\mathbf{ord}(\overline{\sigma(P)}_{[0]})=\mathbf{ord}(\overline{P}_{[0]})=k$, поэтому элементы $1,\partial_1,\dots,\partial_1^{k-1},\overline{\sigma(P_{[0]})}$ линейно независимы.

Теперь мы можем по индукции доказать, что S является p-регулярным при $p > k$. Для любого $p > k$ имеем

$$\partial_1^p \diamond S = \partial_1^{p-k} \diamond (\partial_1^k S) = \partial_1^{p-k} \diamond (SP) = \partial_1^{p-k} \diamond \big(S_{[0]} + \ldots + S_{[p-k]}\big)P,$$
$$\partial_1^p \diamond \overline{S} = \partial_1^{p-k} \diamond (\partial_1^k \overline{S}) = \partial_1^{p-k} \diamond (\overline{S}\,\overline{P}) = \partial_1^{p-k} \diamond \big(\overline{S}_{[0]} + \ldots + \overline{S}_{[p-k]}\big)\overline{P}.$$

Поскольку P и $\overline{P}$ регулярны и $S_{[0]} + \ldots + S_{[p-k]}$, $\overline{S}_{[0]} + \ldots + \overline{S}_{[p-k]}$ являются $(p-k)$-регулярными по предположению индукции, символы последних элементов в равенствах не равны нулю (см. лемму 6.1), т.е. S и $\overline{S}$ являются p-регулярными, а значит, регулярны по индукции. $\square$

Пример 7.1. Проиллюстрируем предложения 7.1 и 7.2 на одном известном примере Валленберга [52] двух коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов порядков 2 и 3 с рациональными коэффициентами:

$$L = \partial^2 - \frac{2}{(x+1)^2}, \qquad P = 4\partial^3 - \frac{12}{(x+1)^2}\,\partial + \frac{12}{(x+1)^3}.$$

Тогда непосредственные вычисления с помощью этих предложений показывают существование оператора S такого, что $SLS^{-1} = \partial^2$ и

$$SPS^{-1} = \left(4\partial^3 + 2\int\right) - \left(4(1-\partial) - 2\int\right)A_{2;1,1}.$$

7.3. Теория Шура, общий случай.

Предложение 7.3. *Пусть $P \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ — регулярный оператор с $\mathbf{ord}(P) = \mathbf{ord}(\overline{P}) = k > 0$ такой, что $\overline{P}$ является регулярным. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ существует обратимый оператор $S_i \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, $\mathbf{ord}(S_i) = 0$, $S_{i,0} = 1$, такой, что $P = S_i^{-1}\partial_i^k S_i$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 7.2. Прежде всего заметим, что $\sigma(P)_{[0]} = \sigma(P_{[0]}) \neq 0$ (поскольку P регулярен) и, следовательно, $\mathbf{ord}(P_{[0]}) = \mathbf{ord}(P)$. Аналогично $\sigma(\overline{P})_{[0]} = \sigma(\overline{P}_{[0]}) \neq 0$ и $\mathbf{ord}(\overline{P}_{[0]}) = \mathbf{ord}(\overline{P})$.

Мы построим оператор S_i рекурсивно, ища частичные разложения на слайсы $S_{i,[q]}$, $S_i = \sum_{q\geq 0} S_{i,[q]}$.

Для любого $p \geq 0$ нужно решить систему

$$(\partial_i^k S_i)_{[p]} = (S_i P)_{[p]}. \tag{7.6}$$

Заметим, что

$$(\partial_i^k S_i)_{[p]} = \partial_i^k (S_{i,[p+k]}) + \text{Выражение, зависящее от } S_{i,[q]}, \qquad q < p+k,$$

и $(S_iP)_{[p]} = ((S_{i,[0]} + \ldots + S_{i,[p]})P)_{[p]}$. В частности, $\partial_i^k(S_{i,[p+k]})$ определяется однозначно через выражения, зависящие от $S_{i,[q]}$, $q < p+k$, и P, т.е. все слайсы $S_{i,(\underline{j})}$, где $\underline{j} = (j_1, \ldots, j_n)$ с $j_i \geq k$ и $|\underline{j}| = k$, определяются однозначно.

Положим $S_{i,[0]} := 1$, $S_{i,[p]} := 0$ для $1 \leq p \leq k-1$. Тогда при $p = 0$ имеем уравнение

$$(\partial_i^k S_i)_{[0]} = \partial_i^k (S_{i,[k]}) + \partial_i^k = P_{[0]}.$$

Из этого уравнения однозначно определяется слайс $S_{i,(\underline{j})}$ с $\underline{j} = (0, \ldots, 0, k)$, и мы определяем все остальные слайсы $S_{i,(\underline{j})}$ с $|\underline{j}| = k$, $\underline{j} \neq (0, \ldots, 0, k)$ таким образом, что элементы $\underline{\partial}^{\underline{j}} + \sigma(S_{i,(\underline{j})})$ линейно независимы с $\sigma(P)_{[0]}$ (и элементы $\underline{\partial}^{\underline{j}} + \sigma(\overline{S}_{i,(\underline{j})})$ линейно независимы с $\sigma(\overline{P})_{[0]}$ соответственно). Тогда получаем $\mathbf{ord}(S_{i,[k]}) \leq 0$ (поскольку $\mathbf{ord}(\partial_i^k) = k$ и $\mathbf{ord}(P_{[0]}) = k$).

Заметим, что операторы $S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[k]}$, $\overline{S}_{i,[0]}+\ldots+\overline{S}_{i,[k]}$ являются k-регулярными: для всех $\underline{j}\in\mathbb{N}_0^n$ с $|\underline{j}|\le k$ имеем

$$\underline{\partial}^{\underline{j}}\diamond\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[k]}\big)=\begin{cases}\underline{\partial}^{\underline{j}}, & \text{если}\ \ |\underline{j}|<k,\\ \underline{\partial}^{\underline{j}}+S_{i,(\underline{j})}, & \text{если}\ \ |\underline{j}|=k,\ \ \underline{j}\ne(0,\ldots,0,k),\\ P_{[0]}, & \text{если}\ \ \underline{j}=(0,\ldots,0,k),\end{cases}$$

$$\underline{\partial}^{\underline{j}}\diamond\big(\overline{S}_{i,[0]}+\ldots+\overline{S}_{i,[k]}\big)=\begin{cases}\underline{\partial}^{\underline{j}}, & \text{если}\ \ |\underline{j}|<k,\\ \underline{\partial}^{\underline{j}}+\overline{S}_{i,(\underline{j})}, & \text{если}\ \ |\underline{j}|=k,\ \ \underline{j}\ne(0,\ldots,0,k),\\ \overline{P}_{[0]}, & \text{если}\ \ \underline{j}=(0,\ldots,0,k).\end{cases}$$

По построению слайсов $S_{i,(\underline{j})}$, $\overline{S}_{i,(\underline{j})}$ все символы этих элементов линейно независимы.

По той же причине все частичные разложения на слайсы $S_{i,[p+k]}$, $p>0$, можно определить из уравнения

$$(\partial_i^kS_i)_{[p]}=\big(\partial_i^k(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k]})\big)_{[p]}=(S_iP)_{[p]}=\big((S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p]})P\big)_{[p]},$$

где все слайсы $S_{i,(\underline{j})}$ при $|\underline{j}|=p+k$, $\underline{j}=(j_1,\ldots,j_n)$ с $j_i\ge k$ однозначно определяются этим уравнением, а для определения слайсов $S_{i,(\underline{j})}$ при $|\underline{j}|=p+k$, $\underline{j}=(j_1,\ldots,j_n)$ с $j_i<k$ рассмотрим сначала элементы $v_{k,\underline{j}}:=S_{i,(\underline{j})}+\underline{\partial}^{\underline{j}}\diamond(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k-1]})$, где $\underline{j}=(j_1,\ldots,j_n)$ с $j_i\ge k$, $|\underline{j}|=p+k$. Заметим, что для всех $q<p$ по индукции получаются равенства

$$\begin{aligned}\big(\partial_i^k\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k]}\big)\big)_{[q]}&=\big(\partial_i^k\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[q+k]}\big)\big)_{[q]}=\\ &=\big(\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[q]}\big)P\big)_{[q]}=\big(\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p]}\big)P\big)_{[q]}\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}v_{k,\underline{j}}&=\underline{\partial}^{(j_1,\ldots,j_i-k,\ldots,j_n)}\diamond\left(\partial_i^k\left(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k-1]}+\frac{x^{\underline{j}}}{\underline{j}!}S_{i,(\underline{j})}\right)\right)=\\ &=\underline{\partial}^{(j_1,\ldots,j_i-k,\ldots,j_n)}\diamond\left(\sum_{q=0}^{p}\left(\partial_i^k\left(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k-1]}+\frac{x^{\underline{j}}}{\underline{j}!}S_{i,(\underline{j})}\right)\right)_{[q]}\right)=\\ &=\underline{\partial}^{(j_1,\ldots,j_i-k,\ldots,j_n)}\diamond\left(\sum_{q=0}^{p}\big(\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p]}\big)P\big)_{[q]}\right)=\\ &=\underline{\partial}^{(j_1,\ldots,j_i-k,\ldots,j_n)}\diamond\big(\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p]}\big)P\big),\end{aligned}$$

откуда следует, что элементы $v_{k,\underline{j}}$ линейно независимы (более того, их символы линейно независимы), так как P регулярен и $S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p]}$ является p-регулярным по предположению индукции. Также по индукции получаем, что аналогично определенные элементы $v_{\underline{j}}:=$ $:=\underline{\partial}^{\underline{j}}\diamond(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k-1]})$ с $|\underline{j}|<p+k$ и их символы линейно независимы, а символы элементов $v_{\underline{j}}$, $v_{k,\underline{j}}$ линейно независимы, так как элементы из двух разных групп (с $|\underline{j}|<p$ и с $|\underline{j}|=p$) имеют разные **ord**-порядки.

Теперь определим слайсы $S_{i,(\underline{j})}$, где $|\underline{j}|=p+k$, $\underline{j}=(j_1,\ldots,j_n)$ с $j_i<k$, таким образом, что символы элементов $v_{p,\underline{j}}:=S_{i,(\underline{j})}+\underline{\partial}^{\underline{j}}\diamond(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k-1]})$ линейно независимы с символами элементов $v_{k,\underline{j}}$ и $v_{\underline{j}}$, $|\underline{j}|<p+k$ (и аналогичные свойства выполнены для $\overline{v}_{p,\underline{j}}$).

В результате операторы $S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k]}$ и $\overline{S}_{i,[0]}+\ldots+\overline{S}_{i,[p+k]}$ являются $(p+k)$-регулярными и удовлетворяют уравнениям

$$\big(\partial_i^k\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k]}\big)\big)_{[p]}=\big(\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p]}\big)P\big)_{[p]}=\big(\big(S_{i,[0]}+\ldots+S_{i,[p+k]}\big)P\big)_{[p]},$$

$$\big(\partial_i^k\big(\overline{S}_{i,[0]}+\ldots+\overline{S}_{i,[p+k]}\big)\big)_{[p]}=\big(\big(\overline{S}_{i,[0]}+\ldots+\overline{S}_{i,[p]}\big)\overline{P}\big)_{[p]}=\big(\big(\overline{S}_{i,[0]}+\ldots+\overline{S}_{i,[p+k]}\big)\overline{P}\big)_{[p]}.$$

По индукции и построению также получаем $\mathbf{ord}(S_{i,[p+k]})\le 0$.

Теперь рассмотрим оператор $S_i:=\sum_{q\ge 0}S_{i,[q]}$. Поскольку $\mathbf{ord}(S_{i,[0]})=0$, мы также получаем $\mathbf{ord}(S_i)=0$. Более того, S и $\overline{S}$ регулярны (поскольку они p-регулярны при всех $p>0$) и удовлетворяют уравнению (7.6) и аналогичному уравнению для $\overline{S}$ (для всех частичных разложений на слайсы). По следствию 6.1 оператор S_i обратим. $\square$

Теорема 7.1. *Пусть* $P_1,\ldots,P_n\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ — *коммутирующие операторы такие, что* $\mathbf{ord}(P_i)=\mathbf{ord}(\overline{P}_i)=k_i=k$ *для всех* $i=1,\ldots,n$. *Предположим, что спектральный модуль* F *кольца* $K[\sigma(\overline{P}_1),\ldots,\sigma(\overline{P}_n)]$ *конечно порожден и является модулем Коэна–Маколея. Тогда существует обратимый оператор* $S\in\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$, $\mathbf{ord}(S)=0$, *такой, что*

$$S^{-1}\partial_i^{k_i}S=P_i,\qquad i=1,\ldots,n.$$

Замечание 7.1. Условие на спектральный модуль выполняется для многих примеров, возникающих в квантовых интегрируемых системах, например для колец коммутирующих операторов в частных производных (см. [54, теорема 4.1], [55, следствие 1] и [58, теорема 4]). Дальнейшие примеры будут приведены в следующей статье.

Доказательство теоремы 7.1 аналогично доказательству предложения 7.3.

Построение. А именно, для любого $p\ge 0$ нужно решить систему

$$(\partial_n^{k_n}S)_{[p]}=(SP_n)_{[p]},\qquad\ldots,\qquad(\partial_1^{k_1}S)_{[p]}=(SP_1)_{[p]}.\tag{7.7}$$

У нас снова

$$(\partial_i^{k_i}S)_{[p]}=\partial_i^{k_i}(S_{[p+k_i]})+\text{Выражение, зависящее от }S_{[q]},\qquad q<p+k_i,$$

и $(SP_i)_{[p]}=((S_{[0]}+\ldots+S_{[p]})P_i)_{[p]}$. В частности, если эта система совместна, то выражения $\partial_i^{k_i}(S_{[p+k_i]})$ однозначно определяются через выражения, зависящие от $S_{[q]}$, $q<p+k_i$, и P_i.

Положим $S_{[0]}:=1$, $S_{(\underline{j})}:=0$ для $\underline{j}=(j_1,\ldots,j_n)\ne\underline{0}$ с $j_i<k_i$, $i=1,\ldots,n$. Тогда для $p=0$ имеем

$$(\partial_n^{k_n}S)_{[0]}=\partial_n^{k_n}(S_{[k_n]})+\partial_n^{k_n}=P_{n,[0]},\qquad\ldots,\qquad(\partial_1^{k_1}S)_{[0]}=\partial_1^{k_1}(S_{[k_1]})+\partial_1^{k_1}=P_{1,[0]}.$$

Из этой системы слайсы $S_{(\underline{j})}$ с $\underline{j}=(0,\ldots,0,k_i,0,\ldots,0)$, $i=1,\ldots,n$, определяются однозначно.

Заметим, что мы уже определили частичные разложения на слайсы $S_{[q]}$ с $q\le k_1$. Мы определим слайсы $S_{(\underline{j})}$ с $q:=|\underline{j}|>k_1$ индукцией по q. Предположим, что мы определили все слайсы $S_{(\underline{j})}$ с $|\underline{j}|<q$. Сначала определим слайсы $S_{(\underline{j})}$ с $j_1\ge k_1$ из уравнения

$$(\partial_1^{k_1}S)_{[q-k_1]}=(SP_1)_{[q-k_1]}$$

системы (7.7). Мы утверждаем, что другие уравнения этой системы остаются совместными, т.е. для всех $\underline{j}$ с $j_1\ge k_1$, как выше, имеем

$$(\partial_i^{k_i}S)_{(\underline{j})}=(SP_i)_{(\underline{j})},\qquad i=2,\ldots,n.$$

Действительно, у нас с одной стороны

$$(\partial_i^{k_i}S)_{(\underline{j})}=\underline{\partial}^{\underline{j}}\diamond(\partial_i^{k_i}S)=(\underline{\partial}^{\underline{j}}\partial_i^{k_i}S)_{[0]}=\big(\partial_i^{k_i}\underline{\partial}^{\underline{j}-(k_1,0,\ldots,0)}SP_1\big)_{[0]}=\big(\underline{\partial}^{\underline{j}-(k_1,0,\ldots,0)}\partial_i^{k_i}S\big)_{[0]}\diamond P_1,$$

а с другой —

$$(SP_i)_{(\underline{j})} = \underline{\partial}^{\underline{j}} \diamond (SP_i) = (\underline{\partial}^{\underline{j}} SP_i)_{[0]} = \big(\underline{\partial}^{\underline{j}-(k_1,0,\dots,0)} SP_1P_i\big)_{[0]} =$$

$$= \big(\underline{\partial}^{\underline{j}-(k_1,0,\dots,0)} SP_iP_1\big)_{[0]} = \big(\underline{\partial}^{\underline{j}-(k_1,0,\dots,0)} SP_i\big)_{[0]} \diamond P_1.$$

По предположению индукции имеем

$$\big(\underline{\partial}^{\underline{j}-(k_1,0,\dots,0)} \partial_i^{k_i} S\big)_{[0]} = \underline{\partial}^{\underline{j}-(k_1,0,\dots,0)} \diamond (\partial_i^{k_i} S) = (\partial_i^{k_i} S)_{(j_1-k_1,j_2,\dots,j_n)} =$$

$$= (SP_i)_{(j_1-k_1,j_2,\dots,j_n)} = (\underline{\partial}^{\underline{j}-(k_1,0,\dots,0)} SP_i)_{[0]};$$

следовательно, $(\partial_i^{k_i} S)_{(\underline{j})} = (SP_i)_{(\underline{j})}$.

Поэтому, продолжая данную линию рассуждений, мы можем для каждого $i = 2,\dots,n$ рекурсивно определить слайсы $S_{(\underline{j})}$ с $j_i \ge k_i$, $j_l < k_l$ при $l < i$ из уравнения

$$(\partial_i^{k_i} S)_{[q-k_i]} = (SP_i)_{[q-k_i]}.$$

В конце индуктивного процесса мы получим оператор S. Заметим, что $\mathbf{ord}(S) = 0$ по построению. Автоматически получаем также аналог системы (7.7) для $\overline{S}$, $\overline{P}$.

Регулярность. По следствию 6.1 оператор S обратим тогда и только тогда, когда $\overline{S}$ регулярен. Заметим, что для любого $\underline{j} = (l_1 + q_1k_1, l_2 + q_2k_2, \dots, l_n + q_nk_n)$, где $q_i \in \mathbb{Z}_+$, $l_i < k_i$ при $i = 1,\dots,n$, имеем

$$\underline{\partial}^{\underline{j}} \diamond \sigma(S) = \sigma(\underline{\partial}^{\underline{j}} \diamond \overline{S}) = \sigma\big(\underline{\partial}^{\underline{l}} \diamond \overline{S}\,\overline{P}_1^{q_1} \dots \overline{P}_n^{q_n}\big) = \sigma\big(\underline{\partial}^{\underline{l}} \diamond \overline{P}_1^{q_1} \dots \overline{P}_n^{q_n}\big) = \underline{\partial}^{\underline{l}} \diamond \sigma\big(\overline{P}_1^{q_1} \dots \overline{P}_n^{q_n}\big).$$

Элементы $\underline{\partial}^{\underline{l}}$ принадлежат множеству образующих свободного $K[\sigma(\overline{P}_1),\dots,\sigma(\overline{P}_n)]$-модуля F (F свободен, так как он является модулем Коэна–Маколея над кольцом многочленов[5]; см. [7, Corollary 2.2.15]). Действительно, для любой линейной комбинации $e_1\alpha_1 + \ldots + e_m\alpha_m$ произвольной фиксированной системы образующих $e_1,\dots,e_m$, где α_i — многочлены без нулевых членов, $\mathbf{ord}$-порядок этой линейной комбинации не меньше k. Таким образом, каждый моном $\underline{\partial}^{\underline{l}}$ с $|\underline{l}| < k$ должен быть линейной комбинацией образующих e_i с *постоянными* коэффициентами. Поэтому, производя линейную замену, мы можем заменить некоторые из образующих этими мономами. С другой стороны, все такие мономы, очевидно, линейно независимы над K. Аналогичные рассуждения показывают, что все образующие e_i с $\mathbf{ord}(e_i) \ge k$ можно заменить соответствующими степенями $\underline{\partial}^{\underline{l}}$ (где $l_i < k$ для всех i), так как $\sigma(\overline{P}_1),\dots,\sigma(\overline{P}_n)$ не имеют общих нулей, кроме $(\underline{0})$.

Следовательно, все элементы $\underline{\partial}^{\underline{j}} \diamond \sigma(\overline{S})$ линейно независимы, а $\overline{S}$ регулярен. $\square$

Следствие 7.1. *Любую обратимую линейную замену переменных* $\partial_i \mapsto \sum_{j=1}^n c_{i,j}\partial_j$, $c_{i,j} \in K$, $i = 1,\dots,n$, *можно получить сопряжением с оператором* $S \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$. *Точнее,*

$$S = c_0 \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (c_{i,j} - \delta_{i,j})x_j\right) * \partial_i\right) \in \widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}, \tag{7.8}$$

где $c_0, c_{i,j} \in K$, $c_0 \ne 0$ *и* $\delta_{i,j}$ *— символ Кронекера. В частности,* $\mathbf{ord}(S) = \mathbf{ord}(S^{-1}) = 0$ *и*

$$S^{-1}\partial_i S = \sum_{j=1}^n c_{i,j}\,\partial_j, \qquad x_i \mapsto \sum_{j=1}^n c'_{i,j}x_j,$$

где $(c'_{i,j})$ *— обратная матрица к* $(c_{i,j})$.

[5] Кольцо $K[\sigma(\overline{P}_1),\dots,\sigma(\overline{P}_n)]$ изоморфно кольцу многочленов, т.е. операторы $\sigma(\overline{P}_1),\dots,\sigma(\overline{P}_n)$ алгебраически независимы, так как модуль F конечно порожден; ср. доказательство утверждения (6) предложения 5.1. Кроме того, по той же причине однородные многочлены $\sigma(\overline{P}_1),\dots,\sigma(\overline{P}_n)$ имеют только один общий нуль $(\underline{0})$.

Доказательство сразу следует из теоремы 7.1. Если $(c'_{i,j})$ — обратная матрица к $(c_{i,j})$, то замена переводит x_i в $\sum_{j=1}^{n-1} c'_{i,j}x_j$, $1 \le i \le n-1$.

По утверждению (4) теоремы 2.1 оператор S задает автоморфизм $x_i \mapsto \sum_{j=1}^{n-1} c_{i,j}x_j$, $1 \le i \le$ $\le n-1$, кольца $\widehat{R}$. В частности, он обратим и $S^{-1} = \exp\bigl(\sum_{i=1}^{n}\bigl(\sum_{j=1}^{n}(c'_{i,j} - \delta_{i,j})x_j\bigr) * \partial_i\bigr)$. Заметим, что $\mathbf{ord}(S) = \mathbf{ord}(S^{-1}) = 0$. Прямые вычисления показывают, что $S^{-1}\partial_i S = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\partial_j$ для $1 \le i \le n$. $\square$

8. ТЕОРЕМЫ КЛАССИФИКАЦИИ

Теперь мы готовы доказать первую классификационную теорему — о классификации некоторых классов эквивалентности квазиэллиптических колец в терминах пар Шура.

Определение 8.1 (ср. [54, определение 3.4])**.** Квазиэллиптические кольца $B_1, B_2 \subset \widehat{D}_n$ называются *эквивалентными в* $\widehat{D}_n$, если существует обратимый оператор $S \in \widehat{D}_n^n$ такой, что $B_1 = SB_2S^{-1}$.

Предложение 8.1. *Любой* 1*-допустимый оператор* T *представим в виде*

$$T = S_2S_1,$$

где оператор $S_2 \in \widehat{E}_n$ *монический и удовлетворяет условию* A_1, *причем* $\mathbf{ord}(S_2) = \mathbf{ord}(S_2^{-1}) =$ $= \mathrm{ord}_n(S_2^{-1}) = \mathrm{ord}_n(S_2) = 0$, $\mathrm{ord}_\Gamma(S_2) = \mathrm{ord}_\Gamma(S_2^{-1}) = (0,\dots,0)$, *а оператор* $S_1 \in \widehat{D}_n^n$ *обратим и* $\mathbf{ord}(S_1) = 0$.

Доказательство. Положим $q'_i = T^{-1}\partial_i T$. Из леммы 5.3 следует, что для $i = 1,\dots,n-1$ имеем $q'_i = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k\ge 0} c_{i;j,k}\,\partial_j^k + \mathrm{l.o.t.}$, где l.o.t. — члены ord_n-порядка меньше 0 и $c_{i;j,k} \in K_y$, и $q'_n = \partial_n + \mathrm{l.o.t.}$, где l.o.t. — члены ord_n-порядка меньше 1, причем $\mathbf{ord}\bigl(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k\ge 0} c_{i;j,k}\,\partial_j^k\bigr) = 1$.

Заметим, что $\mathrm{HT}_n(T \cdot \mathrm{HT}_n(q'_i) \cdot T^{-1}) = \partial_i$; в частности, отображение

$$\partial_i \mapsto \partial'_i := \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k\ge 1} c_{i;j,k}\,\partial_j^k, \qquad 1 \le i \le n-1,$$

обратимо. Так как $\mathbf{ord}(\partial'_i) = 1$ и $\mathrm{HT}_n(T\partial'_iT^{-1}) = \partial_i \notin \mathfrak{m}$, то мы должны иметь $\overline{\partial'_i} \ne 0$ и отображение

$$\partial_i \mapsto \overline{\partial'_i} := \sum_{j=1}^{n-1} c_{i;j}\,\partial_j, \qquad 1 \le i \le n-1, \quad c_{i;j} \in K,$$

также будет обратимым.

В частности, спектральный модуль $F_{n-1} = K[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]$ кольца $K[\overline{\partial'_1},\dots,\overline{\partial'_{n-1}}]$ является модулем Коэна–Маколея. Тогда по теореме 7.1 существует обратимый оператор $S_0 \in \widehat{D}_{n-1}^{\mathrm{sym}} \subset$ $\subset \widehat{D}_n^n$, $\mathbf{ord}(S_0) = 0$, такой, что $S_0\partial'_iS_0^{-1} = \partial_i$ для всех $i = 1,\dots,n-1$.

Положим $T_1 = TS_0$. Тогда операторы $T_1^{-1}\partial_iT_1$ монические формально квазиэллиптические. Поэтому по лемме 5.2 существует оператор $S_1 = c_0\exp\bigl(\sum_{i=1}^{n} e_ix_i\bigr)\exp\bigl(\sum_{i=1}^{n-1} d_{i,n}x_n\partial_i\bigr)$ (см. доказательство леммы 5.2) такой, что операторы $S_1^{-1}T_1^{-1}\partial_iT_1S_1$ нормализованы. Заметим, что снова $\mathbf{ord}(S_1) = \mathbf{ord}(S_1^{-1}) = 0$. А по теореме 5.1 существует оператор $S_2 \in \widehat{E}_n$ такой, что $\mathbf{ord}(S_2) = |\mathrm{ord}_\Gamma(S_2)| = \mathbf{ord}(S_2^{-1}) = |\mathrm{ord}_\Gamma(S_2^{-1})| = 0$, S_2 и S_2^{-1} удовлетворяют условию A_1 и $S_2^{-1}S_1^{-1}T_1^{-1}\partial_iT_1S_1S_2 = \partial_i$ для $1 \le i \le n$.

Следовательно, $T' := T_1S_1S_2 \in K_y[[\partial_1,\dots,\partial_{n-1}]]((\partial_n^{-1})) \cap \Pi_n$. Так как все операторы в этом произведении имеют нулевой порядок и

$$\mathrm{ord}_n(T_1S_1S_2) = \mathrm{ord}_n(T) + \mathrm{ord}_n(S_0) + \mathrm{ord}_n(S_1) + \mathrm{ord}_n(S_2) = 0,$$

то $\mathbf{ord}(T')=0$, откуда $\mathbf{ord}((T')^{-1})=\mathrm{ord}_n((T')^{-1})=0$. Таким образом, $T=T'S_2^{-1}S_1^{-1}S_0^{-1}$ и, следовательно, $\mathbf{ord}(T)=\mathbf{ord}(T^{-1})=0$, $\mathrm{ord}_n(T)=\mathrm{ord}_n(T^{-1})=0$. Остальная часть доказательства тривиальна. $\square$

Теорема 8.1 (ср. [54, теорема 3.2])**.** *Существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности квазиэллиптических* 1*-пар Шура* (A,W) *в* V_n *ранга* r *с* $\mathrm{Supp}(W)=F$ *и классами эквивалентных в* $\widehat{D}_n$ *квазиэллиптических колец* $B\subset\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ *ранга* r.

Замечание 8.1. В [54, теорема 3.2] (см. также [58, § 2]) было установлено соответствие между несколько более узкими классами, а именно предполагалось, что 1-допустимые операторы удовлетворяют дополнительному условию. На самом деле расширенных классов эквивалентности не намного больше, как будет видно из доказательства.

Доказательство теоремы 8.1. В одну сторону мы используем конструкцию 6.1 из п. 6.3: по 1-квазиэллиптическому кольцу B строим пару (A,W) с требуемыми свойствами. Если мы выберем любое эквивалентное 1-квазиэллиптическое кольцо B', то, очевидно, пара, построенная по B', будет эквивалентна (A,W).

В другую сторону нам нужно использовать аналог теории Сато для подпространств в V_n из разд. 6. А именно, по квазиэллиптической 1-паре Шура (A,W) строим соответствующее кольцо B согласно конструкции 6.2 из п. 6.3 с помощью оператора Сато S.

Если (A',W') — эквивалентная 1-пара Шура, то $A'=T^{-1}AT$ и $W'=WT$ для некоторого 1-допустимого оператора T, который можно представить (см. предложение 8.1) в виде $T=S_2S_1$. Тогда легко увидеть, что

$$W'=W\diamond(S_2S_1)=(F\diamond S_1)\diamond(S_1^{-1}SS_2S_1)=F\diamond(S_1^{-1}SS_2S_1),$$

т.е. соответствующий оператор Сато для пространства W' из теоремы 6.1 есть $S'=S_1^{-1}SS_2S_1$. Значит, соответствующее кольцо B' равно $S'A'(S')^{-1}=S_1^{-1}BS_1$, т.е. эквивалентно B.

Наконец, заметим, что композиция двух конструкций $B\rightsquigarrow(A,W)$, $(A,W)\rightsquigarrow B$ приводит к эквивалентным объектам. $\square$

Приведенную выше теорему можно улучшить для квазиэллиптических колец ранга 1: как было сказано в замечании 6.2, множество допустимых линейных замен для таких колец непусто.

Определение 8.2. Два квазиэллиптических кольца $B_1,B_2\subset\widehat{D}_n$ называются *слабо эквивалентными*, если существует единица $U\in\widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$ такая, что $B_1=UB_2U^{-1}$.

Две квазиэллиптические 1-пары Шура (A,W) и (A',W') называются *слабо эквивалентными*, если $A'=\varphi_m\circ\mathrm{Ad}(T_m)\circ\ldots\circ\varphi_1\circ\mathrm{Ad}(T_1)(A)$ и $W'=\varphi_m\circ\mathrm{Ad}(T_m)\circ\ldots\circ\varphi_1\circ\mathrm{Ad}(T_1)(W)$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$, где T_i суть 1-допустимые операторы, а φ_i — допустимые линейные замены переменных[6], $\mathrm{Ad}(T)(A):=T^{-1}AT$, $\mathrm{Ad}(T)(W):=W\diamond T$.

Теорема 8.2. *Пусть* K *— полное поле. Предположим, что* $K_y=K$*. Существует взаимно однозначное соответствие между классами слабо эквивалентных квазиэллиптических* 1*-пар Шура* (A,W) *в* V_n *ранга* 1 *таких, что* $\mathrm{Supp}(W)=F$, *и классами слабо эквивалентных квазиэллиптических колец коммутирующих операторов* $B\subset\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$ *ранга* 1.

Доказательство по существу такое же, как доказательство теоремы 8.1. Для двух слабо эквивалентных колец B_1, B_2 нам нужно показать, что соответствующие квазиэллиптические 1-пары Шура слабо эквивалентны.

Предположим, что $B_1=UB_2U^{-1}$, и обозначим через (A_i,W_i) нормализованные 1-пары Шура колец B_i, полученные из конструкции 6.1.

[6] Конечно, φ_i — допустимая замена для пары $(\mathrm{Ad}(T_{i-1})\circ\ldots\circ\varphi_1\circ\mathrm{Ad}(T_1)(A),\mathrm{Ad}(T_{i-1})\circ\ldots\circ\varphi_1\circ\mathrm{Ad}(T_1)(W))$.

Прежде всего, взяв подходящие степени формально квазиэллиптических элементов в условии A_1 и сделав подходящую линейную замену переменных φ' из леммы 6.6, мы можем заменить 1-пару Шура (A_1, W_1) квазиэллиптической 1-парой Шура $(A_1', W_1') := (\varphi'(A_1), \varphi'(W_1))$ такой, что $\varphi'(A_1)$ содержит формально квазиэллиптические операторы одного и того же **ord**-порядка (мы можем найти такую допустимую замену φ' по замечанию 6.2, так как пары Шура имеют ранг 1). По предложению 6.1 квазиэллиптическое кольцо B_1', соответствующее этой паре Шура по конструкции 6.2, слабо эквивалентно B_1, т.е. B_1' слабо эквивалентно B_2. Очевидно, достаточно доказать, что (A_1', W_1') слабо эквивалентна (A_2, W_2), и далее будем считать, что (A_1, W_1) обладает свойствами пары (A_1', W_1').

Пусть $B_i = S_i A_i S_i^{-1}$, $W_i = F \diamond S_i$. Обозначим через $\varphi_i \colon W_i \to F$, $w_i \mapsto w_i \diamond S_i^{-1}$ изоморфизмы A_i-модулей W_i с B_i-модулями F $(a_i \mapsto S_i a_i S_i^{-1})$. Тогда φ_i^{-1} задаются как $\varphi_i^{-1} \colon F \to W_i$, $w \mapsto w \diamond S_i$. Наконец, обозначим через $\psi \colon F \to F$, $w \mapsto w \diamond U^{-1}$ изоморфизм B_i-модулей F $(b_1 \mapsto U b_1 U^{-1})$. Тогда композиция $\widetilde{\varphi} := \varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1$ определяет изоморфизм A_i-модулей W_i. По построению он сохраняет фильтрацию **ord**-порядка на W_i и на A_i. Пусть $a_1, \dots, a_n \in A_1$ — формально квазиэллиптические элементы одного и того же **ord**-порядка, причем $\operatorname{ord}_\Gamma(a_1) = (0, \dots, 0, p)$, $\operatorname{ord}_\Gamma(a_i) = (\underline{0}) - (i-1)$. Пусть $\widetilde{a}_1$ — примитивный корень p-й степени из a_1: $\widetilde{a}_1^p = a_1$. Применяя лемму 6.6 и замечание 6.2, можно найти допустимую линейную замену переменных φ такую, что $\operatorname{ord}_\Gamma(\varphi(\widetilde{\varphi}(a_i))) = \operatorname{ord}_\Gamma(a_i)$, $i = 1, \dots, n$. Применяя теорему 5.1 и лемму 5.2, мы можем найти 1-допустимый оператор T такой, что $T\varphi(\widetilde{\varphi}(a_i))T^{-1} = a_i$, $i = 2, \dots, n$, и $T\varphi(\widetilde{\varphi}(\widetilde{a}_1))T^{-1} = \widetilde{a}_1$. Тогда $T\varphi(\widetilde{\varphi}(A_1))T^{-1} = A_1$. Действительно, рассуждая, как в лемме 6.6, для любого $a \in A_1$ получим $a\widetilde{a}_1^{-\mathbf{ord}(a)} \in K\big[\big[a_2\widetilde{a}_1^{-\mathbf{ord}(a_2)}, \dots, a_n\widetilde{a}_1^{-\mathbf{ord}(a_n)}, \widetilde{a}_1^{-1}\big]\big]$. Таким образом, $\widetilde{\varphi} = \varphi^{-1} \circ \operatorname{Ad}(T)$, т.е. $\varphi(A_2) = T^{-1} A_1 T$ и (A_2, W_2) слабо эквивалентна (A_1, W_1).

Наоборот, две слабо эквивалентные квазиэллиптические 1-пары Шура ранга 1 дают с помощью конструкции 6.2 и предложения 6.1 два слабо эквивалентных квазиэллиптических кольца в $\widehat{D}_n^{\mathrm{sym}}$. $\square$

Замечание 8.2. Если $K_y \neq K$, то теорема верна при дополнительном предположении, а именно: в каждом классе эквивалентности пар Шура, соответствующих квазиэллиптическим кольцам по конструкции 6.1, должен существовать представитель, удовлетворяющий дополнительному условию п. 1 замечания 6.2.

Пример 8.1. Проиллюстрируем теорему 8.2, а также некоторые другие теоремы этой работы на явном примере, вычисленном в [9, Sect. 6]. Напомним, что там было определено семейство 1-пар Шура (A, W_β), где $A, W_\beta \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, $A = \mathbb{C}[z_1^2, z_1^3, z_2^2, z_2^3]$, $z_i = \partial_i$ и

$$W_\beta = \mathbb{C} \cdot w + \big(\xi_2 + \xi_2^2 z_2 + \beta z_1\big) z_1^2 \mathbb{C}[z_1] + \big(\xi_1 + \xi_1^2 z_1 + \beta z_2\big) z_2^2 \mathbb{C}[z_2] + z_1^2 z_2^2 \mathbb{C}[z_1, z_2],$$

$$w = 1 + \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + (\xi_1\xi_2 - \beta)\left(z_1 z_2 + \frac{z_1^2}{\xi_2^2} + \frac{z_2^2}{\xi_1^2}\right).$$

В [9, Theorem 6.5] были найдены соответствующие операторы Сато S_β, $S_\beta = S_0 + \beta T$, где

$$S_0 := \partial_1\partial_2 + \frac{1}{\xi_2 - x_2}\,\partial_1 + \frac{1}{\xi_1 - x_1}\,\partial_2 + \frac{1}{(\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2)}$$

и

$$T = \frac{1}{(\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2)}\left(\frac{1}{\xi_2}\big(\delta_2\partial_1 + (\xi_1 - x_1)\delta_2\partial_1^2\big) + \frac{1}{\xi_1}\big(\delta_1\partial_2 + (\xi_2 - x_2)\delta_1\partial_2^2\big)\right) + \\ + \frac{1}{(\xi_1\xi_2 - \beta)(\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2)}\,\delta_1\delta_2\left(1 + \beta\left(\frac{\partial_1}{\xi_2} + \frac{\partial_2}{\xi_1}\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что A не является квазиэллиптическим, но при общей линейной замене переменных (очевидно, в нашем случае допустимы все линейные замены) становится квазиэллиптическим. Кроме того, для общей линейной замены φ имеем $\operatorname{Supp}(\varphi(W_\beta) z_2^{-2}) = F$. По определению все такие квазиэллиптические пары Шура $(\varphi(A), \varphi(W_\beta)z_2^{-2})$ слабо эквивалентны. По утверждению (3) теоремы 6.1 существует другой оператор Сато S_n (обратимый в $\widehat{E}_n$) для пространства $\varphi(W_\beta)z_2^{-2}$. По утверждению (4) теоремы 6.1 имеем $\varphi(S_\beta)\partial_2^{-2} = U \circ S_n$ для некоторой единицы $U \in \widehat{U}_n^{\mathrm{sym}}$.

По теореме 7.1 линейная замена φ может быть определена сопряжением с оператором Шура $S_\varphi \in \widehat{D}_2^{\mathrm{sym}}$ нулевого порядка. Тогда соответствующие кольца коммутирующих операторов являются просто сопряженными кольцами $S_\varphi \mathtt{L}(A) S_\varphi^{-1}$. По теореме 8.2 они также слабо эквивалентны.

Кроме того, такие пары $(\varphi(A), \varphi(W_\beta)z_2^{-2})$ подходят под определение пары Шура (и даже предпары Шура ранга 1) из работ [54] и [55, определение 14] и, следовательно, определяют алгебро-геометрические предспектральные данные (см., например, [55, теорема 4]; в этих конструкциях существенно использовался приведенный выше оператор Сато S_n). Согласно [55, теорема 3] последние данные могут быть продолжены до (приведенных) геометрических данных $(X, C, p, \mathcal{F}_\beta)$ ранга 1, где X — проективная поверхность (естественная компактификация поверхности $\mathrm{Spec}(A)$), C — целочисленный обильный дивизор Картье (по [55, теорема 2]), $\mathcal{F}_\beta = \mathrm{Proj}(\widetilde{W}_\beta)$ — спектральный пучок без кручения с фиксированным полиномом Гильберта (см. [9, Sect. 6] или [55, определения 13, 14]), а p — регулярная точка на C.

Из [9, Sect. 6] мы знаем, что нормализация поверхности $\mathrm{Spec}(A)$ есть аффинная плоскость $\mathbb{A}^2$. Согласно [27, Theorem 2.1] имеем $C^2 = 1$ и C — рациональная кривая, поэтому в силу [58, теорема 5] нормализация поверхности X изоморфна проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Из явного описания пространств W_β и из определения спектрального пучка $\mathcal{F}_\beta$ нетрудно видеть, что $\mathcal{F}_\beta|_C \simeq n_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$, где $n\colon \mathbb{P}^1 \to C$ — морфизм нормализации, тогда и только тогда, когда $\beta = 0$. В этом случае оператор S_0 является просто дифференциальным оператором и $\varphi(S_\beta)\partial_2^{-2} = cS_n$, $c \in \mathbb{C}$. Ввиду [56, Theorem 7.9] это подтверждает гипотезу 7.11 из работы [56] о характеризации коммутирующих операторов в частных производных между всеми квазиэллиптическими кольцами.

Нетрудно видеть, что соответствующие таким геометрическим данным пары Шура из [55, теорема 1] будут слабо эквивалентны при различных выборах точки p. Таким образом, класс изоморфизма слабо эквивалентных пар Шура (или класс изоморфизма $[S_\varphi \mathtt{L}(A) S_\varphi^{-1}]$ слабо эквивалентных квазиэллиптических колец) определяет класс изоморфизма предспектральных данных $(X, C, \mathcal{F})$. Подробное описание этого соответствия (в более общей ситуации) появится в следующей работе.

Благодарности. Я благодарен С. Горчинскому и Д. Осипову за их интерес к данной работе и плодотворные обсуждения. Я также благодарен участникам семинара по некоммутативной геометрии в МГУ, особенно А. Арутюнову, А.С. Мищенко, Ф. Попеленскому и Г. Шарыгину, за внимание и стимулирующие вопросы. Я также признателен организаторам конференций 2021 г. “Dynamics in Siberia” из Новосибирска и “Frontier of Differential Geometry” из Китайско-российского математического центра в Пекине, где были представлены первые результаты этой работы, за прекрасную рабочую атмосферу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abhyankar S.S.* Lectures in algebraic geometry (notes by C. Christensen). West Lafayette: Purdue Univ., 1974.
2. *Atiyah M.F., Macdonald I.G.* Introduction to commutative algebra. Reading, MA: Addison-Wesley, 1969.
3. *Bass H., Connell E.H., Wright D.* The Jacobian conjecture: Reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7, N 2. P. 287–330.
4. *Berest Yu., Etingof P., Ginzburg V.* Cherednik algebras and differential operators on quasi-invariants // Duke Math. J. 2003. V. 118, N 2. P. 279–337.
5. *Bourbaki N.* Algèbre commutative. Ch. 5: Entiers. Ch. 6: Valuations. Paris: Hermann, 1964. (Éléments de mathématique. Fasc. 30).

6. *Braverman A., Etingof P., Gaitsgory D.* Quantum integrable systems and differential Galois theory // Transform. Groups. 1997. V. 2, N 1. P. 31–56.
7. *Bruns W., Herzog J.* Cohen–Macaulay rings. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 39).
8. *Burban I., Zheglov A.* Fourier–Mukai transform on Weierstrass cubics and commuting differential operators // Int. J. Math. 2018. V. 29, N 10. Pap. 1850064.
9. *Burban I., Zheglov A.* Cohen–Macaulay modules over the algebra of planar quasi-invariants and Calogero–Moser systems // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 2020. V. 121, N 4. P. 1033–1082; arXiv: 1703.01762 [math.AG].
10. *Burchnall J.L., Chaundy T.W.* Commutative ordinary differential operators. II: The identity $P^n = Q^m$ // Proc. R. Soc. London A. 1931. V. 134. P. 471–485.
11. *Chalykh O.* Algebro-geometric Schrödinger operators in many dimensions // Philos. Trans. R. Soc. London A. Math. Phys. Eng. Sci. 2008. V. 366, N 1867. P. 947–971.
12. *Chalykh O., Feigin M., Veselov A.* New integrable generalizations of Calogero–Moser quantum problem // J. Math. Phys. 1998. V. 39, N 2. P. 695–703.
13. *Chalykh O.A., Veselov A.P.* Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras // Commun. Math. Phys. 1990. V. 126, N 3. P. 597–611.
14. *Дринфельд В.Г.* О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, №1. С. 11–14.
15. *Fargues L., Fontaine J.-M.* Vector bundles on curves and p-adic Hodge theory // Automorphic forms and Galois representations: Proc. 94th LMS–EPSRC Durham Symp., 2011 / Ed. by F. Diamond, P.L. Kassaei, M. Kim. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014. V. 2. P. 17–104. (LMS Lect. Note Ser.; V. 415).
16. *Good I.J.* Generalizations to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1960. V. 56. P. 367–380.
17. *Heckman G.J.* A remark on the Dunkl differential–difference operators // Harmonic analysis on reductive groups: Proc. Conf., Brunswick, ME, 1989. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 181–191. (Prog. Math.; V. 101).
18. *Joni S.A.* Lagrange inversion in higher dimensions and umbral operators // Linear Multilinear Algebra. 1978. V. 6, N 2. P. 111–122.
19. *Kanel-Belov A.Ya., Kontsevich M.L.* The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture // Moscow Math. J. 2007. V. 7, N 2. P. 209–218.
20. *Kasman A., Previato E.* Commutative partial differential operators // Physica D. 2001. V. 152–153. P. 66–77.
21. *Кричевер И.М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН. 1977. Т. 32, №6. С. 183–208.
22. *Кричевер И.М.* Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, №3. С. 20–31.
23. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* Двумеризованная цепочка Тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения // УМН. 2003. Т. 58, №3. С. 51–88.
24. *Куликов Вик.С.* О дивизорах малой канонической степени на поверхностях Годо // Мат. сб. 2018. Т. 209, №8. С. 56–65.
25. *Kurke H., Osipov D., Zheglov A.* Formal punctured ribbons and two-dimensional local fields // J. reine angew. Math. 2009. Bd. 629. S. 133–170.
26. *Kurke H., Osipov D.V., Zheglov A.B.* Formal groups arising from formal punctured ribbons // Int. J. Math. 2010. V. 21, N 6. P. 755–797.
27. *Kurke H., Osipov D., Zheglov A.* Commuting differential operators and higher-dimensional algebraic varieties // Sel. math. New Ser. 2014. V. 20, N 4. P. 1159–1195.
28. *Манин Ю.И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 11. С. 5–152. (Итоги науки и техники).
29. *Маулешова Г.С., Миронов А.Е.* Разностные операторы Кричевера–Новикова ранга 2 // Тр. МИАН. 2019. Т. 305. С. 211–224.
30. *Маулешова Г.С., Миронов А.Е.* Дискретизация обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 в случае эллиптических спектральных кривых // Тр. МИАН. 2020. Т. 310. С. 217–229.
31. *Van Moerbeke P., Mumford D.* The spectrum of difference operators and algebraic curves // Acta math. 1979. V. 143. P. 93–154.
32. *Mulase M.* Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition // Invent. math. 1988. V. 92, N 1. P. 1–46.
33. *Mulase M.* Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional Grassmannians // Int. J. Math. 1990. V. 1, N 3. P. 293–342.

34. *Mulase M.* Algebraic theory of the KP equations // Perspectives in mathematical physics: Proc. conf. Taiwan and Los Angeles, CA, USA, 1992 / Ed. by R. Penner, S.-T. Yau. Boston: Int. Press, 1994. P. 151–217. (Conf. Proc. Lect. Notes Math. Phys.; V. 3).
35. *Mumford D.* An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg–de Vries equation and related non-linear equations // Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977. Tokyo: Kinokuniya Book-Store, 1978. P. 115–153.
36. *Осипов Д.В.* Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, №5. С. 91–128.
37. *Паршин А.Н.* О кольце формальных псевдодифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 291–305.
38. *Паршин А.Н.* Соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35, №1. С. 88–90.
39. *Parshin A.N.* Integrable systems and local fields // Commun. Algebra. 2001. V. 29, N 9. P. 4157–4181.
40. *Previato E.* Seventy years of spectral curves: 1923–1993 // Integrable systems and quantum groups. Berlin: Springer, 1996. P. 419–481. (Lect. Notes Math.; V. 1620).
41. *Quandt I.* On a relative version of the Krichever correspondence // Bayreuther Math. Schr. 1997. Bd. 52. S. 1–74.
42. *Sato M.* Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds // Random systems and dynamical systems: Proc. Symp., Kyoto, 1981. Kyoto: Kyoto Univ., Res. Inst. Math. Sci., 1981. P. 30–46. (RIMS Kôkyûroku; V. 439).
43. *Sato M.* Soliton equations and the universal Grassmann manifold (notes by M. Noumi). Tokyo: Sophia Univ., 1984. (Sophia Kokyuroku Math.; V. 18; in Japanese).
44. *Schur I.* Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke // Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 1905. Bd. 4. S. 2–8.
45. *Segal G., Wilson G.* Loop groups and equations of KdV type // Publ. math. Inst. hautes étud. sci. 1985. V. 61. P. 5–65.
46. *Serre J.-P.* Lie algebras and Lie groups. New York: W. A. Benjamin, 1965.
47. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
48. *Tsuchimoto Y.* Preliminaries on Dixmier conjecture // Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. 2003. V. 24. P. 43–59.
49. *Tsuchimoto Y.* Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures // Osaka J. Math. 2005. V. 42, N 2. P. 435–452.
50. *Verdier J.-L.* Équations différentielles algébriques // Séminaire Bourbaki 1977/78. Exposes 507–524. Berlin: Springer, 1979. Exp. 512. P. 101–122. (Lect. Notes Math.; V. 71).
51. *Веселов А.П., Стыркас К.Л., Чалых О.А.* Алгебраическая интегрируемость для уравнения Шрёдингера и группы, порожденные отражениями // ТМФ. 1993. Т. 94, №2. С. 253–275.
52. *Wallenberg G.* Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke // Arch. Math. Phys. 3. Reihe. 1903. Bd. 4. S. 252–268.
53. *Zheglov A.B.* Two dimensional KP systems and their solvability: Preprint. Berlin: Humboldt Univ. Berlin, 2005; arXiv: math-ph/0503067v2.
54. *Жеглов А.Б.* О кольцах коммутирующих дифференциальных операторов // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, №5. С. 86–145.
55. *Жеглов А.Б.* Удивительные примеры нерациональных гладких спектральных поверхностей // Мат. сб. 2018. Т. 209, №8. С. 29–55.
56. *Zheglov A.* Algebraic geometric properties of spectral surfaces of quantum integrable systems and their isospectral deformations // Geometric methods in physics XXXVIII: Workshop, Białowieża, Poland, 2019. Cham: Birkhäuser, 2020. P. 313–331. (Trends Math.).
57. *Zheglov A.B.* Algebra, geometry and analysis of commuting ordinary differential operators. Moscow: Moscow State Univ., 2020. Available at https://www.researchgate.net/publication/340952902.
58. *Жеглов А.Б., Курке Х.* Геометрические свойства коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных // Мат. сб. 2015. Т. 206, №5. С. 61–106.
59. *Жеглов А.Б., Осипов Д.В.* О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера // Мат. заметки. 2007. Т. 81, №4. С. 528–539.