П. Прагач, Детерминантные многообразия и симметрические многочлены, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 3, 89–90

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 3, 89—90

УДК 512.734

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

П. Прагач

1. Пусть X — схема над полем K, а $\varphi: F \to E$ — некоторый морфизм векторных расслоений над X. Для каждого $r \geqslant 0$ детерминантным многообразием ранга r, связанным с φ, называется подсхема $D_r(\varphi) = \{x \in X \mid \mathrm{rk}\,\varphi(x) \leqslant r\}$. Параллельно с общим случаем интересно рассматривать такие варианты: (s) $F = E^V$ — двойственное расслоение, и φ — симметрический морфизм; (as) $F = E^V$, φ — антисимметрический морфизм.

В [3] и [5] фундаментальные классы детерминантных многообразий были вычислены в терминах универсальных многочленов от классов Чженя $c_i(E)$, $c_i(F)$ (в случаях (s) и (as) многочлены зависят только от $c_i(E)$). В этой заметке решается более общая задача: мы находим идеал всех многочленов от классов Чженя, таких, что соответствующие им циклы на X сосредоточены на $D_r(\varphi)$. Ответ дается в терминах классических S- и Q-функций Шура. Как приложение, мы вычисляем группу Чжоу и числа Чженя детерминантных многообразий. Построенные нами идеалы в кольце симметрических многочленов применяются также в алгебраической теории исключения и дают обобщение результанта двух многочленов.

2. Определение идеалов $\mathscr{P}_r$, $\mathscr{P}_r^s$, $\mathscr{P}_r^{as}$. Пусть $i_r: D_r(\varphi) \to X$ — вложение, а $(i_r)_*: A(D_r(\varphi)) \to A(X)$ — соответствующее отображение групп Чжоу (см. [1]). Фиксируем целые числа $m, n > 0$. Пусть $\mathbf{Z}[c.(a), c.(b)] = \mathbf{Z}[c_1(a), \ldots, c_n(a), c_1(b), \ldots, c_m(b)]$ обозначает градуированную полиномиальную алгебру над $\mathbf{Z}$, где $\deg c_k(a) = \deg c_k(b) = k$. Пусть $\mathscr{P}_r$ обозначает идеал многочленов P в $\mathbf{Z}[c.(a), c.(b)]$, таких, что для каждого морфизма векторных расслоений $\varphi: F \to E$ рангов m и n над произвольной схемой X и для каждого $\alpha \in A(X)$ имеем $P(c.(E), c.(F)) \cap \alpha \in \mathrm{Im}\,(i_r)_*$.

В случаях (s) и (as) фиксируем положительное число n. Пусть $\mathscr{P}_r^s$ (соответственно $\mathscr{P}_r^{as}$, r четно) это идеал таких многочленов $P \in \mathbf{Z}[c.(a)]$, что для каждого симметрического (соответственно антисимметрического) морфизма векторных расслоений $\varphi: E^V \to E$ над X и для каждого $\alpha \in A(X)$ имеем $P(c.(E)) \cap \alpha \in \mathrm{Im}\,(i_r)_*$. Ясно, что универсальные многочлены, описывающие фундаментальные классы $[D_i(\varphi)]$ при $i \leqslant r$, лежат в соответствующих идеалах $\mathscr{P}_r$, $\mathscr{P}_r^s$ и $\mathscr{P}_r^{as}$. Однако они не порождают этих идеалов. Полное описание этих идеалов требует следующих комбинаторных средств.

3. Некоторые семейства симметрических многочленов. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — два множества независимых переменных над $\mathbf{Z}$. Пусть $s_k(A - B)$ обозначает такую симметрическую функцию от A и B, что

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} (1 - b_j t) \Big[\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - a_i t)\Big]^{-1} = \sum_{0 \leqslant k < \infty} s_k(A - B)\, t^k.$$

Если $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathbf{Z}^p$ — некоторое разбиение, т. е. $0 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p$, то мы положим $s_I(A - B) = \det | s_{i_k + k - l}(A - B) |_{1 \leqslant k,\, l \leqslant p}$ (см. [4, с. 72]). Отметим, что при $B = \{0, \ldots, 0\}$ $s_I(A - B) = s_I(A)$ — обычная функция Шура. (см. [4]), а при $A = \{0, \ldots, 0\}$ $s_I(A - B) = (-1)^{|I|} s_{I^\sim}(B)$, где $I^\sim$ — сопряженное разбиение.

Рассмотрим теперь (следуя Шуру) симметрические функции $q_k(A)$, такие, что

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 + a_i t)(1 - a_i t)^{-1} = \sum_{0 \leqslant k < \infty} q_k(A)\, t^k.$$

Для **любых** чисел $i < j$ положим $q_{i,j}(A) = q_i(A) q_j(A) - 2 q_{i-1}(A) q_{j+1}(A) + \ldots + (-1)^j 2 q_{i+j}(A)$. Далее, если $I = (i_1, \ldots, i_p)$ — строгое разбиение, т. е. $0 < i_1 < \ldots < i_p$, то положим

$$q_{i_1, \ldots, i_p}(A) = \sum_{1 \leqslant k < p} (-1)^{p-k+1} q_{i_k, i_p}(A)\, q_{i_1, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{p-1}}(A) \text{ для четного } p,$$

$$q_{i_1, \ldots, i_p}(A) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} (-1)^{p-k+1} q_{i_k}(A)\, q_{i_1, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_p}(A) \text{ для нечетного } p.$$

Например, $q_{12\ldots p}(A) = 2^p s_{12\ldots p}(A)$. В общем случае для каждого строгого разбиения I существует многочлен $p_I(A)$ с целыми коэффициентами, такой, что $q_I(A) = 2^p p_I(A)$.

Если E и F — векторные расслоения над схемой X, то через $s_I(E - F)$, $q_I(E)$, $p_I(E)$ мы обозначим соответствующие многочлены, где A и B — семейства корней Чженя расслоений E и F (см. [I]).

Для двух разбиений $I = (i_1, \ldots, i_p)$ и $J = (j_1, \ldots, j_p)$ мы будем писать $I \subset J$, если $i_k \leqslant j_k$ для всех k.

Мы отождествляем кольцо симметрических многочленов от A с кольцом $\mathbf{Z}[c.(a)]$, рассматривая $(-1)^k c_k(A)$ как k-ю элементарную симметрическую функцию от A. Таким образом, функции $s_I(A - B)$ считаются лежащими в $\mathbf{Z}[c.(a), c.(b)]$, а $q_I(A)$ и $p_I(A)$ — в $\mathbf{Z}[c.(a)]$. Пусть $\mathcal{J}_r \subset \mathbf{Z}[c.(a), c.(b)]$ — идеал, порожденный многочленами $s_I(A - B)$ для всех разбиений $I \supset (n - r, \ldots, n - r)$ ($(m - r)$ частей). Пусть $\mathcal{J}_r^s \subset \mathbf{Z}[c.(a)]$ — идеал, порожденный многочленами $q_I(A)$ для всех разбиений $I \supset (1, \ldots, n - r)$, а $\mathcal{J}_r^{as} \subset \mathbf{Z}[c.(a)]$ — идеал, порожденный многочленами $p_I(A)$ для всех разбиений $I \supset (1, \ldots, n - r - 1)$.

4. Основной результат и его приложения. Теорема 1. $\mathcal{P}_r = \mathcal{J}_r$, $\mathcal{P}_r^s = \mathcal{J}_r^s$, $\mathcal{P}_r^{as} = \mathcal{J}_r^{as}$.

Доказательство дано в [6]. Из теоремы 1 (и ее доказательства) вытекает ряд следствий.

4.1. Вычисление групп Чжоу детерминантных многообразий. Пусть K — поле и пусть D_r есть детерминированное многообразие в пространстве $m \times n$ матриц над K, определенное всеми минорами порядка $(r + 1)$, как схему над полем K. Пусть $Y = \operatorname{Spec} S$.

Предложение 2. *Если $m \geqslant n$, то группа Чжоу $A(D_r(S))$ изоморфна $A(G_r(K^n))$, где $G_r(K^n)$—это грассманово многообразие всех r-мерных подпространств в K^n.*

4.2. Вычисление чисел Чженя расслоений ядер и коядер. Рассмотрим (например) симметрический морфизм $\varphi : E^V \to E$ векторных расслоений над собственной схемой X. Предположим, что $D_{r-1}(\varphi) = \varnothing$. Пусть K и C — ядро и коядро морфизма φ над $D_r(\varphi)$. Напомним, что числа Чженя расслоения C — это значения одночленов $\prod_i c_i(C)^{\alpha_i}$ степени $\dim D_r(\varphi)$ от классов Чженя на фундаментальном классе $[D_r(\varphi)]$. Ясно, что $K \cong C^V$, так что числа Чженя расслоения K выражаются через числа Чженя расслоения C. Следующий результат дает ответ на вопрос из [2].

Предложение 3. *Пусть $\prod_i c_i(C)^{\alpha_i} = \sum_I m_I s_I(C)$ (где m_I — числа Костки — см. [4]). Тогда соответствующее число Чженя расслоения C равно значению класса $\sum_I m_I q_{i_1+1, \ldots, i_{n-r}+n-r}(E)$ на фундаментальном классе $[X]$.*

Из предложения 3 вытекают формулы для чисел Чженя детерминантных многообразий (см. [2]). Другие приложения даны в [6].

5. Обобщение результанта. Рассмотрим многочлены от одной переменной $a(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (-1)^i c_i(a) x^{n-i}$, $b(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} (-1)^j c_j(b) x^{m-j}$. Пусть $\mathcal{T}_r \subset \mathbf{Z}[c.(a), c.(b)]$— идеал таких многочленов T, что для каждой специализации $f : \mathbf{Z}[c.(a), c.(b)] \to K$ (поле) имеем $f(T) = 0$, если $f[a(x)]$ и $f[b(x)]$ имеют $(r + 1)$ общих корней. В частности, $\mathcal{T}_0$ — это главный идеал, порожденный результантом.

Предложение 4 [7]. $\mathcal{T}_r = \mathcal{J}_r$.

В [7] дана также аналогичная интерпретация идеалов $\mathcal{J}_r^s$ и $\mathcal{J}_r^{as}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fulton W.* Intersection theory.— Springer—Verlag, 1984. 2. *Harris J., Tu L.* // Invent. Math.—1984. V. 75.— P. 467—478. 3. *Józefiak T., Lascoux A., Pragacz P.* // Изв. АН СССР.—1981. Т. 45, № 3.— С. 662—673. 4. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985. 5. *Porteus I. R.* // Lect. Notes in Math.—1971. V. 192.— P. 286—307. 6. *Pragacz P.* Degeneracy loci and symmetric functions I, II. Preprints IM PAN, Warsaw, 1986. 7. *Pragacz P.* A note on the elimination theory I, II. Preprints IM PAN, Warsaw, 1986.

Математический институт
Польской академии наук, Торунь

Поступило в редакцию
25 декабря 1986 г.