МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

А. В. Скориков

БЕССЕЛЕВЫ ПОТЕНЦИАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА ГРУППЕ T^∞

Определим, следуя работе [1], на бесконечномерном торе $T^\infty = T_1 \times \times T_2 \times \ldots$, где $T_k = T$ — единичная окружность, пространства $L_p(T^\infty)$, $p = (p_1, p_2, \ldots)$. Обозначим $T^n = T_1 \times \ldots \times T_n$, $T^{\infty-n} = T_{n+1} \times T_{n+2} \times \ldots$; dx_k, ν^n, $\nu^{\infty-n}$ — нормированные меры Хаара соответственно на группах T_k, T^n, $T^{\infty-n}$. Пусть ε^n — мера Дирака, сосредоточенная в нуле группы T^n, а $\nu_n = \varepsilon^n \otimes \nu^{\infty-n}$ — соответствующая мера на T^∞. Если $f \in L_1(T^\infty)$, то свертка $f_n = f * \nu_n$ зависит только от конечного числа переменных $(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $p = (p_1, p_2, \ldots)$, $1 \leqslant p_k \leqslant \infty$, положим

$$L_p(T^\infty) = \Big\{ f : f \in L_1(T^\infty),\ \|f\|_p = \sup_n \|f_n\|_p =$$

$$= \sup_n \Big[\int_T dx_1 \ldots \Big(\int_T |f_n(x_1, \ldots, x_n)|^{p_n} dx_n \Big)^{p_{n-1}/p_n} \ldots \Big]^{1/p_1} < \infty \Big\}.$$

Обозначим через μ_t^1, $t > 0$, абсолютно непрерывные, вероятностные меры на T с плотностями $g_t^1(\theta)$ вида

$$g_t^1(\theta) = \sum_{n \in Z} e^{-tn^2} e^{in\theta},\ \theta \in R.$$

Для функций $g_t^1(\theta)$ справедливо представление [2]

$$g_t^1(\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k \in Z} \exp\Big(-\frac{(\theta + 2\pi k)^2}{4t} \Big),\ \theta \in R,$$

из которого следует, что $g_t^1(\theta)$ есть периодизация ядра $2\pi G_t(x)$, где

$$G_t(x) = (4\pi t)^{1/2} \exp(-x^2/4t),\ x \in R,$$

— ядро Гаусса—Вейерштрасса. Определим меры μ_{ta}^n, $t > 0$, на n-мерном торе T^n:

$$\mu_{ta}^n = \mu_{ta_1}^1 \otimes \ldots \otimes \mu_{ta_n}^1,\ t > 0,$$

и меры μ_{ta}^∞ — на T^∞, полагая

$$\mu_{ta}^\infty = \bigotimes_{k=1}^\infty \mu_{ta_k}^1,$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots)$ — некоторый набор положительных чисел, ограничения на который будут даны ниже.

Преобразование Фурье мер μ_{ta}^∞ имеет вид

$$\widehat{\mu}_{ta}^\infty(n) = \prod_{k=1}^\infty \widehat{\mu}_{ta_k}^1(n_k) = \exp\Big(-t \sum_{k=1}^\infty a_k n_k^2 \Big), \tag{1}$$

где $n=(n_1, \ldots, n_p, 0, \ldots)\in Z^{(\infty)}$, $Z^{(\infty)}$ есть множество целочисленных последовательностей с конечным числом отличных от нуля членов [2].

Введем на T^∞ меры вида

$$J_\alpha = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \mu_{ta}^\infty dt, \ \alpha > 0.$$

Из (1) получим преобразование Фурье мер J_α

$$\widehat{J}_\alpha(n) = (1+|n|^2)^{-\alpha/2},$$

где $|n|^2 = \sum_{k=1}^\infty a_k n_k^2$, $n\in Z^{(\infty)}$, совпадает по форме с преобразованием Фурье ядра Бесселя—Макдональда в R^n, поэтому меры J_α будем называть мерами Бесселя на T^∞, а соответствующие свертки

$$J^\alpha f = f * J_\alpha$$

— потенциалами Бесселя.

Отметим другой подход в работе [3] к введению на $L_p(T^\infty)$ операторов типа бесселева потенциала для $0<\alpha<1$, основанный на использовании формулы для дробных степеней операторов. Установленная в [3] ограниченность потенциалов $L_p(T^\infty)\to L_q(T^\infty)$ не охватывает предельных показателей теоремы Харди—Литтлвуда—Соболева, которые входят в доказываемую ниже теорему.

Сформулируем вначале одномерный вариант теоремы Харди—Литтлвуда—Соболева для потенциалов Бесселя на окружности T. В одномерном случае мера J_α абсолютно непрерывна с плотностью

$$i_\alpha^1(\theta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}-1} g_t^1(\theta)\, dt.$$

Функция $i_\alpha{}^1(\theta)$ мажорируется функцией $\psi_\alpha(\theta)$ вида

$$\psi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} g_t^1(\theta)\, dt, \ 0<\alpha<1,$$

которая является периодизацией ядра Рисса $|x|_\alpha{}^{-1}$, поэтому (см., например, [4, теорема 9.22]) справедлива

Лемма. *Оператор*

$$J_1^\alpha f = f * i_\alpha^1, \ 0<\alpha<1,$$

ограничен из $L_p(T)$ *в* $L_{\mathcal{P}}(T)$ *при* $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{\mathcal{P}}$, $1<p<\mathcal{P}<\infty$.

Основной результат работы приведен в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant \mathcal{P}\leqslant\infty$, $1<p_1<\mathcal{P}<\infty$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{p_i} - \frac{1}{\mathcal{P}_i}$$

и выполняются условия согласования на a_k

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{\mathscr{P}_k}}>0, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{1/4}<\infty, \tag{2}$$

тогда оператор $J^\alpha f=f*J_\alpha$ *ограничен из* $L_p(T^\infty)$ *в* $L_{\mathscr{R}}(T^\infty)$.

Доказательство. В силу идемпотентности мер ν_n и коммутативности сверток имеем

$$(J^\alpha f)_n=J^\alpha f*\nu_n=f*\nu_n*J_\alpha*\nu_n=f_n*J_\alpha^n,$$

где $J_\alpha{}^n$ — сужение меры J_α на T^n. Мера $J_\alpha{}^n$ абсолютно непрерывна с плотностью

$$i_\alpha^n(\theta)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}g_{ta}^n(\theta)\,dt,\ g_{ta}^n=\prod_{i=1}^n g_{ta_i}^1(\theta_i),$$

так как абсолютно непрерывна мера $\mu_{ta}{}^n$. Таким образом, доказательство теоремы сводится к равномерной по n оценке свертки $i_\alpha{}^n*f_n$ в $L_{\mathscr{R}}(T^n)$.

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$, обозначим $x^1=(x_2, \ldots, x_n)$. Имеем, применяя неравенство Минковского,

$$\|(J^\alpha f)_n\|_{\mathscr{P}}=\|f_n*i_\alpha^n\|_{\mathscr{P}}\leqslant$$
$$\leqslant\left\|\int_T d\theta_1\right\|\int_{T^{n-1}} f_n(x_1-\theta_1,\ x^1-\theta^1)\,i_\alpha^n(\theta_1,\theta^1)\,d\theta^1\|_{\mathscr{P}^1,x^1}\|_{\mathscr{P}_1,x_1}.$$

Далее по теореме Юнга получаем

$$\|(J^\alpha f)_n\|_{\mathscr{P}}\leqslant\left\|\int_T \|f_n(x_1-\theta_1,\ x^1)\|_{p^1,x^1}\|i_\alpha^n(\theta_1,\ x^1)\|_{r^1,x^1}\,d\theta_1\right\|_{\mathscr{P}_1,x_1},$$

где $\dfrac{1}{r_i}=1-\dfrac{1}{p_i}+\dfrac{1}{\mathscr{P}_i}$, $i=2,\ldots,n$.

Для оценки нормы $\|i_\alpha^n(\theta_1,\ x^1)\|_{r^1,x^1}$, применяя неравенство Минковского, оценим $\|g^{n-1}(\theta)\|_{r^1,\theta^1}$. Пользуясь равномерной по n оценкой ядра $g_t(\theta)$, полученной в [3, теорема 10], при условиях согласования (2) на a_k имеем

$$\sup_n\|g_t^{n-1}(\theta^1)\|_{r^1}\leqslant c(1+t^{-\delta/2}),$$

$$\delta=\sum_{i=2}^\infty\left(1-\frac{4}{r_i}\right)=\sum_{i=2}^\infty\left(\frac{4}{p_i}-\frac{1}{\mathscr{P}_i}\right).$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\|i_\alpha^n(\theta_1,\theta^1)\|_{r^1,\theta^1}\leqslant\frac{c}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{2}-1}g_{ta_1}^1(\theta_1)\,dt+$$
$$+\frac{c}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha-\delta}{2}}g_{ta_1}^1(\theta_1)\,dt=c\,(i_\alpha^1(\theta_1)+i_{\alpha-\delta}^1(\theta_1))$$

с константой c, не зависящей от n. Отсюда, используя полугрупповое свойство $J_1^\alpha = J_1^{\alpha-\delta} J_1^\delta$ бесселевых потенциалов, получаем

$$\|(J^\alpha f)_n\|_{\mathscr{P}} \leqslant c \Big\| \int_T \|f_n(x_1-\theta_1, \theta^1)\|_{p^1,\theta^1} i_\alpha^1(\theta_1)\, d\theta_1 \Big\|_{\mathscr{P}_1, x_1} +$$

$$+ c \Big\| \int_T \|f_n(x_1-\theta_1, \theta^1)\|_{p^1,\theta^1} i_{\alpha-\delta}^1(\theta_1)\, d\theta_1 \Big\|_{\mathscr{P}_1, x_1} \leqslant$$

$$\leqslant 2c \Big\| \int_T \|f_n(x_1-\theta_1, \theta^1)\|_{p^1,\theta^1} i_{\alpha-\delta}^1(\theta_1)\, d\theta_1 \Big\|_{\mathscr{P}_1, x_1}.$$

Из леммы следует, что существует константа c_1, не зависящая от f_n, такая, что

$$\Big\| \int_T \|f_n(x_1-\theta_1, \theta^1)\|_{p^1,\theta^1} i_{\alpha-\delta}^1(\theta_1)\, d\theta_1 \Big\|_{\mathscr{P}_{\alpha-\delta}, x_1} \leqslant c_1 \|f_n\|_p,$$

где

$$\frac{1}{\mathscr{P}_{\alpha-\delta}} = \frac{1}{p_1} - (\alpha-\delta) = \frac{1}{p_1} - \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\mathscr{P}_i} \Big) -$$

$$- \sum_{i=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\mathscr{P}_i} \Big) \Big) = \frac{1}{\mathscr{P}_i}.$$

Отсюда $\|(J^\alpha f)_n\|_{\mathscr{P}} \leqslant 2cc_1 \|f_n\|_p$, и переход к супремуму по n завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов И. В., Скориков А. В. Пространства L_p со смешанной нормой на бесконечномерном торе//Изв. вузов. Математика. 1986. № 2. 69—72.
2. Berg C. Potential theory on the infinite dimensional torus//Invent. Math. 1976. **32**, N 1. 49—100.
3. Бендиков А. Д., Павлов И. В. Пространства со смешанной нормой на бесконечном декартовом произведении вероятностных пространств//Anal. Math. 1987. **13**, N 3. 231—250.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М., 1965.

Поступила в редакцию
09.01.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 6

УДК 517.587

В. А. Гончаров

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА ХААРА

Пусть дана последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ натуральных чисел, таких, что $p_n \geqslant 2$. Определим на $[0, 1]$ систему $\chi\{p_n\} \equiv \{\chi_m(t)\}$. Положим $\chi_1(t) \equiv 1$ на $[0, 1]$. Если же $m \geqslant 2$, то $m = m_n + r(p_{n+1}-1) + s$, где $n = 0, 1, \ldots$; $r = 0, \ldots, m_n - 1$; $s = 1, \ldots, p_{n+1}-1$; $m_0 = 1$, $m_n = \prod_{j=1}^{n} p_j \, (n \geqslant 1)$, причем