

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Елизаров, Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев,
Обратная краевая задача для ламинарного профи-
ля с отсосом, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1987, вы-
пуск 23, 61–69

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

19 января 2025 г., 00:04:32



Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В.

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛАМИНАРНОГО ПРОФИЛЯ С ОТСОСОМ

Как известно, ламинарные течения обладают по сравнению с турбулентными меньшими сопротивлениями. Поэтому ламинарные профили характеризуются тем, что для них область ламинарного пограничного слоя распространена на возможно большую часть обтекаемой поверхности [1, гл. II]. Форму ламинарных профилей можно находить, пользуясь теорией потенциальных течений жидкости и решая обратную задачу (определяя форму профиля по желаемому распределению скоростей). Распределение скорости нужно выбирать так, чтобы градиент давления, необходимый для удержания ламинарного пограничного слоя, был достаточно велик в рабочем диапазоне коэффициентов подъемной силы. Вместе с тем ламинарные профили имеют свои недостатки, в частности, передняя кромка с малым радиусом кривизны носка способствует срыву потока при больших углах атаки. Кроме того, сопротивление ламинарных профилей возрастает с увеличением числа Рейнольдса, так как точка перехода ламинарного течения в турбулентное перемещается при этом к передней кромке и область турбулентного пограничного слоя растет. При очень больших числах Рейнольдса ламинарные профили утрачивают свой чисто ламинарный характер, так как ламинарный пограничный слой становится неустойчивым. В [1, с. 141] отмечено, что в этом случае можно удерживать ламинарный пограничный слой при помощи его отсоса.

Физическое воздействие отсоса пограничного слоя состоит в том, что предотвращается отрыв потока в области возрастающего давления, пограничный слой теснее примыкает к профилю, обтекание улучшается и становится безотрывным [1, 2]. Благодаря этому уменьшается сопротивление формы и увеличивается коэффициент подъемной силы. Кроме того, наличие отсоса позволяет ламинизировать течение без существенных отклонений формы профиля от классической, в отличие от ламинарных профилей без отсоса.

Примеры ламинарных профилей с отсосом и их различные характеристики, преимущества и недостатки отсоса указаны в монографиях [1, 2] (см. также [3]).

Постановка задачи. Требуется определить форму крылового профиля с острой задней кромкой, обтекаемого плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости по заданному вдоль его поверхности распределению скорости v при условии, что на поверхности профиля имеется щель, через ко-

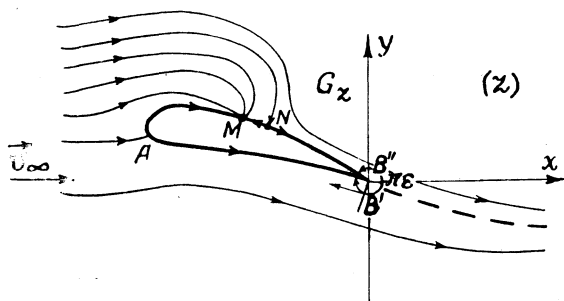


Рис. 1.

тору осуществляется отсос жидкости с заданным расходом q , а остальные участки непроницаемы. Предполагая щель достаточно узкой, ее действие заменим действием стока обильности $2q$, расположенного в некоторой обыкновенной точке M искомого контура с известной дуговой абсциссой $s = s_1$ (рис. 1). Величину v_∞ скорости набегающего потока считаем известной. Систему координат выберем так, чтобы вектор скорости на бесконечности был параллелен оси абсцисс, а начало координат совпало с задней кромкой.

Пусть

$$v = f(s), \quad s \in [0, L], \quad (1)$$

заданное распределение скорости. Здесь s — дуговая абсцисса контура L_z искомого профиля, отсчитываемая от $s=0$ на острой кромке B до $s=L$ на ней же так, что при возрастании s область течения остается слева, L — заданный периметр профиля (обозначено B' при $s=0$ и B'' при $s=L$).

Будем считать $v(s) \geq 0$, если направление \vec{v} совпадает с направлением роста s , и $v(s) \leq 0$ — в противном случае. Функция $f(s)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду при $0 \leq s \leq L$, кроме точки $s = s_1$, где она в силу наличия стока обильности $2q$ обращается в бесконечность:

$$f(s) = -\pi^{-1}q/(s - s_1) + f_0(s), \quad (2)$$

где f_0 — ограниченная функция.

В окрестности задней острой кромки B ($s=0$ и $s=L$) функция $f(s)$ ведет себя следующим образом: $f(s) \sim -cs^{2/\varepsilon-1}$ и $f(s) \sim c(L-s)^{2/\varepsilon-1}$ при $\varepsilon \neq 2$, $f(L) = -f(0) = v_* > 0$ при $\varepsilon = 2$. Здесь $\varepsilon\pi$ — внутренний к области течения угол в точке B , для реальных профилей $\varepsilon \in [1, 2]$, c — положительная постоянная.

Отметим, что в том случае, когда величина q заранее не задана, ее можно найти, учитывая (2), из соотношения

$$q = -\pi \lim_{s \rightarrow s_1} [(s - s_1) f(s)].$$

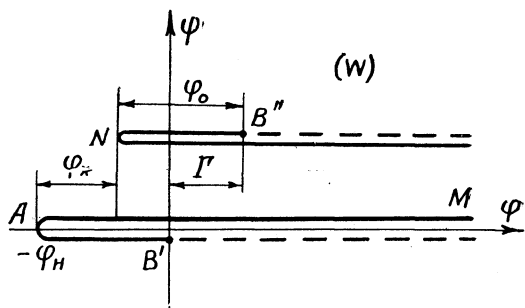


Рис. 2

Кроме указанных точек, на поверхности профиля должны быть также две точки A и N ($s = s_*$ и $s = s_0$ соответственно), в которых скорость обращается в нуль. Для обеспечения гладкости искомого контура в этих точках дополнительно предположим, что $f(s)$ непрерывно дифференцируема при $s = s_*$ и $s = s_0$.

Таким образом, заданное распределение скорости (1) должно удовлетворять перечисленным выше ограничениям, а его график должен иметь вид, схематично изображенный для $\varepsilon = 2$ на рис. 3.

Поставленная задача эквивалентна следующей краевой задаче: найти неизвестный контур L_z так, чтобы аналитическая в области G_z (рис. 1) функция $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ ($z = x + iy$ — комплексная координата физической плоскости), имеющая простой полюс и логарифмическую особенность в ∞ , а также простой полюс в точке M границы $L_z = \partial G_z$, удовлетворяла краевым условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{L_z} = f(s), \quad 0 \leq s \leq L,$$

$$\psi = 0 \text{ на } B'AM, \quad \psi = q \text{ на } MNB'', \quad \frac{dw}{dz} \Big|_{\infty} = v_{\infty}.$$

Схема решения. Запишем значения потенциала скорости φ на искомом контуре L_z

$$\varphi(s) = \int_0^s \vec{v} d\vec{s}, \quad (\varphi(0) = 0), \quad (3)$$

где $s \in [0, L]$, причем при $s > s_1$ интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Введем обозначения

$$\varphi_H = - \int_0^{s_*} f(s) ds > 0, \quad \varphi_* = \int_{s_*}^{s_0} f(s) ds, \quad \varphi_0 = \int_{s_0}^L f(s) ds > 0$$

для приращений потенциала φ соответственно на участках $B'A$, AMN и NB'' поверхности профиля. Исходя из (2), можно записать

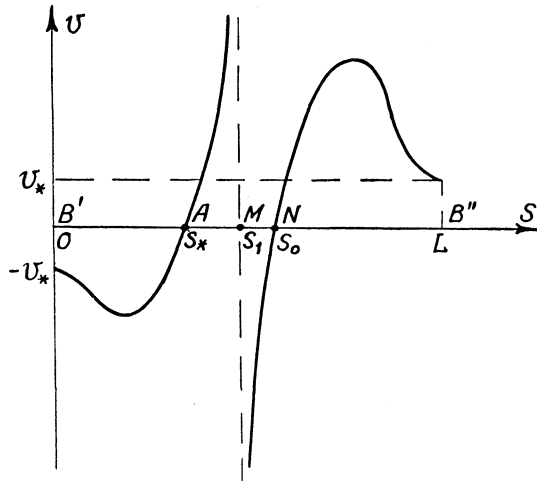


Рис. 3

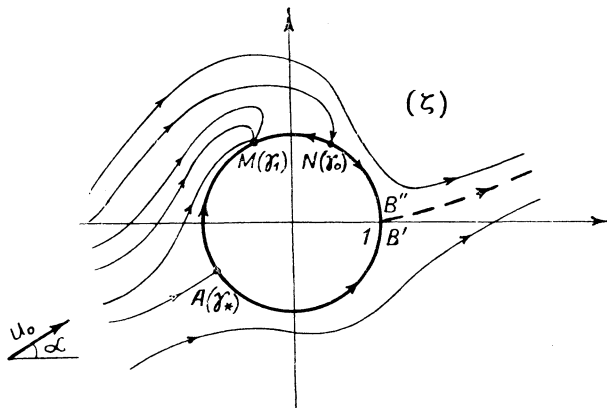


Рис. 4

$$\begin{aligned} \varphi_* &= \int_{s_*}^{s_0} f_0(s) ds - (\pi)^{-1} q \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{s_*}^{s_1 - \delta} (s - s_1)^{-1} ds + \int_{s_1 + \delta}^{s_0} (s - s_1)^{-1} ds \right] = \\ &= \int_{s_*}^{s_0} f_0(s) ds - \frac{q}{\pi} \ln \frac{s_0 - s_1}{s_1 - s_*}. \end{aligned}$$

Следовательно, циркуляция $\Gamma = \varphi_{\text{в}} - \varphi_{\text{н}}$, где $\varphi_{\text{в}} = \varphi_* + \varphi_0$. Вид области в плоскости w , соответствующей области течения в физической плоскости, показан на рис. 2 (штриховые линии соответствуют берегам разреза, проведенного в плоскости z вдоль линии тока, сходящей с задней кромки).

Введем во вспомогательной плоскости ζ область $|\zeta| > 1$ и найдем функцию, конформно отображающую ее на область в плоскости w . Для этого построим комплексный потенциал обтекания единичного круга потоком со скоростью $u_0 e^{i\alpha}$ на бесконечности, циркуляцией Γ и стоком обильности $2q$ в некоторой точке $\zeta_1 = e^{i\gamma_1}$ на окружности. Тогда получим

$$w(\zeta) = u_0 (\zeta e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}/\zeta) - \frac{q}{\pi} \ln \frac{\zeta - \zeta_1}{\sqrt{\zeta}} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + c_0, \quad (4)$$

где c_0 — комплексная постоянная. Функция $w(\zeta)$ многозначна и после обхода окружности получает приращение $\Gamma + iq$. Выделим однозначную ветвь этой функции, проведя разрез от $\zeta = 1$ до бесконечности по линии с уравнением $\text{Im } w(\zeta) = 0$. При задании соответствия трех граничных точек (B' , B'' и бесконечно удаленных) в плоскостях w и ζ все параметры, входящие в выражение $w(\zeta)$, определяются единственным образом.

Действительно, предположим, что существуют два различных набора этих параметров и соответствующие им функции $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ осуществляют конформное отображение внешности единичных кругов соответственно с разрезами по линиям $\text{Im } w_j(\zeta) = 0$, $j = 1, 2$, на одну и ту же область в плоскости w . Тогда функция $w_2^{-1}[w_1(\zeta)]$ однозначна и отображает $|\zeta| > 1$ на себя с соответствием бесконечно удаленных точек и точек $\zeta = 1$. Следовательно, это тождественное отображение, т. е. $w_1(\zeta) \equiv w_2(\zeta)$.

Тогда из (4) найдем

$$w(e^{i\gamma}) = 2u_0 \cos(\gamma - \alpha) - \Gamma\gamma/(2\pi) - q\pi^{-1} \ln \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_1}{2} \right| + c_0 - iq(\pi + \gamma_1)/(2\pi),$$

откуда

$$\varphi(\gamma) = 2u_0 \cos(\gamma - \alpha) - \Gamma\gamma/(2\pi) - q\pi^{-1} \ln \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_1}{2} \right| + c_1 \quad (5)$$

для всех $\gamma \in [0, 2\pi]$, c_1 — вещественная постоянная. В (5) входят неизвестные постоянные u_0 , α , γ_1 , c_1 . Построим систему уравнений для их определения. Обозначим скорость на окружности через $u(\gamma)$. Из (5), продифференцировав по γ , получим

$$u(\gamma) = -2u_0 \sin(\gamma - \alpha) - \Gamma/(2\pi) - q \text{ctg} \frac{\gamma - \gamma_1}{2} / (2\pi). \quad (6)$$

Пусть $\zeta_0 = e^{i\gamma_0}$ и $\zeta_* = e^{i\gamma_*}$ ($0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_* < 2\pi$) — критические точки на $|\zeta| = 1$, соответствующие точкам $N(s = s_0)$ и $A(s = s_*)$, величины γ_0 , γ_* пока неизвестны. Для определения шести параметров (u_0 , α , γ_1 , c_1 , γ_0 , γ_*) имеем условия:

$$u(0) = 0; \quad u(\gamma_*) = 0; \quad u(\gamma_0) = 0; \quad (7)$$

$$\varphi(2\pi) = 0; \quad \varphi(\gamma_*) = -\varphi_n; \quad \varphi(\gamma_0) = \Gamma - \varphi_0.$$

Заметим, что равенство $\varphi(0) = \Gamma$ вытекает автоматически из $\varphi(2\pi) = 0$. Соответствующая (7) система, которая в силу изложенного выше разрешима однозначно, запишется в виде

$$\left[\begin{array}{l} 2u_0 \sin \alpha + q(2\pi)^{-1} \operatorname{ctg}(\gamma_1/2) = \Gamma/(2\pi), \\ 2u_0 \sin(\gamma_* - \alpha) + q(2\pi)^{-1} \operatorname{ctg}[(\gamma_* - \gamma_1)/2] = -\Gamma/(2\pi), \\ 2u_0 \sin(\gamma_0 - \alpha) + q(2\pi)^{-1} \operatorname{ctg}[(\gamma_0 - \gamma_1)/2] = -\Gamma/(2\pi), \\ 2u_0 \cos \alpha - q\pi^{-1} \ln |\sin(\gamma_1/2)| = \Gamma - c_1, \\ 2u_0 \cos(\gamma_* - \alpha) - q\pi^{-1} \ln |\sin[(\gamma_* - \gamma_1)/2]| - \Gamma\gamma_*/(2\pi) = -\varphi_n - c_1, \\ 2u_0 \cos(\gamma_0 - \alpha) - q\pi^{-1} \ln |\sin[\gamma_0 - \gamma_1)/2]| - \Gamma\gamma_0/(2\pi) = \Gamma - \varphi_0 - c_1. \end{array} \right. \quad (8)$$

Из первых трех уравнений (8) находится следующая зависимость между параметрами:

$$\gamma_0 + \gamma_* - 2\alpha - \gamma_1 = \pi. \quad (9)$$

Используя (9), получим систему для определения параметров γ_1, γ_* :

$$\begin{cases} F_1(\gamma_*) - \cos[(\gamma_1 - \gamma_0)/2] F_2(\gamma_*) = \pi\varphi_n, \\ F_1(\gamma_0) - \cos[(\gamma_1 - \gamma_*)/2] F_2(\gamma_0) = \pi\varphi_0, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\sin(\gamma_0/2) = [a \sin(\gamma_1/2) - q \cos(\gamma_1/2)] / \sqrt{a^2 + q^2},$$

$$a = a(\gamma_1, \gamma_*) = 2 \sin[(\gamma_1 - \gamma_*)/2] \sin(\gamma_1/2) \times \\ \times [\Gamma - q \operatorname{ctg}(\gamma_1/2)] / \cos(\gamma_*/2) - q \operatorname{tg}(\gamma_*/2),$$

$$F_1(\gamma) = q \ln |\sin[(\gamma_1 - \gamma)/2] / \sin(\gamma_1/2)| + \Gamma\gamma/2,$$

$$F_2(\gamma) = \sin(\gamma/2) \sqrt{a^2 + q^2} / [2 \sin(\gamma_1/2) \sin[(\gamma_1 - \gamma)/2]].$$

При этом остальные неизвестные выражаются через γ_1 и γ_* :

$$\alpha = (\gamma_0 + \gamma_* - \gamma_1 - \pi)/2, \quad u_0 = [\Gamma - q \operatorname{ctg}(\gamma_1/2)] / (4\pi \sin \alpha),$$

$$c_1 = \Gamma + q\pi^{-1} \ln |\sin(\gamma_1/2)| - 2u_0 \cos \alpha.$$

После определения параметров из (10) будет известна функция $\varphi(\gamma)$. Сопоставляя ее с $\varphi(s)$ (3), установим зависимость $s = s(\gamma)$, $2\pi \geq \gamma \geq 0$, $0 \leq s \leq L$, после чего найдем функцию $S(\gamma) = \ln v[s(\gamma)]$, $2\pi \geq \gamma \geq 0$.

Для построения интегрального представления решения задачи введем вспомогательную функцию $\chi = \ln d\omega/dz = \ln v - i\theta$. Имеем $\operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma}) = \ln v[S(\gamma)] = S(\gamma)$. Выделим логарифмические особенности функции $\chi(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\zeta) = \chi(\zeta) - \ln(\zeta - \zeta_*) - \ln(\zeta - \zeta_0) - (2 - \varepsilon) \ln(\zeta - 1) + \\ + \ln(\zeta - \zeta_1) + (3 - \varepsilon) \ln \zeta. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{\chi}(e^{i\gamma}) \equiv \tilde{S}(\gamma) = S(\gamma) - \ln |2 \sin[(\gamma - \gamma_*)/2]| - \\ - (2 - \varepsilon) \ln |2 \sin(\gamma/2)| + \ln |2 \sin[(\gamma - \gamma_1)/2]| - \ln |2 \sin[(\gamma - \gamma_0)/2]| \\ \text{и } \tilde{\chi}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma - i\delta, \end{aligned}$$

δ — вещественная постоянная.

В окрестности точки $\zeta = \infty$ справедливо представление

$$\begin{aligned} e^{-\chi(\zeta)} = e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} (\zeta - \zeta_*)^{-1} (\zeta - \zeta_0)^{-1} (\zeta - 1)^{-(2-\varepsilon)} (\zeta - \zeta_1) \zeta^{3-\varepsilon} = \\ = e^{i\delta} e^{-a_0} \left(1 - \frac{a_1}{\zeta} + \dots\right) \left(1 + \frac{\zeta_*}{\zeta} + \dots\right) \left(1 + \frac{\zeta_0}{\zeta} + \dots\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{2-\varepsilon}{\zeta} + \dots\right) \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) = e^{i\delta} e^{-a_0} \times \\ \times \left\{1 + \frac{1}{\zeta} [\zeta_* + \zeta_0 + 2 - \varepsilon - \zeta_1 - a_1] + \dots\right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$a_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma, \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma. \quad (12)$$

Из формулы (4) следует, что

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta) = u_0 (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}/\zeta^2) - \Gamma/(2\pi i \zeta) - q\pi^{-1} \times \\ \times (\zeta - \zeta_1)^{-1} + q/(2\pi \zeta) = u_0 e^{i\alpha} - \frac{1}{\zeta} \left(\frac{q}{2\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\right) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда и из (11) находим разложение в окрестности $\zeta = \infty$

$$e^{-\chi(\zeta)} \omega'(\zeta) = e^{i\delta} e^{-a_0} \{u_0 e^{-i\alpha} + b_1/\zeta + \dots\}, \quad (13)$$

$$b_1 = u_0 e^{i\alpha} (\zeta_* + \zeta_0 + 2 - \varepsilon - \zeta_1 - a_1) - (q - i\Gamma)/(2\pi).$$

Функция $z = z(\zeta)$, конформно отображающая $|\zeta| > 1$ на внешность искомого профиля, примет вид

$$z(\zeta) = \int_1^{\zeta} e^{-\tilde{\chi}(\zeta)} (\zeta - \zeta_*)^{-1} (\zeta - \zeta_0)^{-1} (\zeta - 1)^{\varepsilon-2} (\zeta - \zeta_1) \zeta^{3-\varepsilon} \omega'(\zeta) d\zeta.$$

Контур L_z будет замкнутым, если в разложении (13) коэффициент $b_1 = 0$, т. е. в силу (12)

$$a_1 \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = \cos \gamma_* + \cos \gamma_0 - \cos \gamma_1 + 2 - \varepsilon - \\ - (q \cos \alpha + \Gamma \sin \alpha)/(2\pi u_0) + i [\sin \gamma_* + \sin \gamma_0 - \sin \gamma_1 - \\ - (q \sin \alpha - \Gamma \cos \alpha)/(2\pi u_0)].$$

Так как на бесконечности $d\omega/dz|_{z=\infty} = v_\infty$, то $\delta = 0$ и, кроме того, должно выполняться условие разрешимости (см. (11))

$$a_0 \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = \ln v_\infty.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче получены условия разрешимости того же типа, что и в обратной задаче для одиночного профиля без отсоса [4—6]. Следовательно, для построения замкнутого контура может быть применен метод квазирешений, разработанный в [5, 6].

На основе полученного аналитического решения была составлена программа построения крылового профиля при наличии отсоса. Для проверки работоспособности программы и точности получаемого решения был проведен числовой расчет по распределению скорости

$$f(s) = -U(L-s), \quad s \in [0, L], \quad L = 2\pi.$$

Функция U взята в виде (6) с $\gamma = L - s$ и соответствует распределению скорости на окружности единичного радиуса при $\alpha = 0.1$, $u_0 = 0.2941$, $q = 1$, $\Gamma = 2$ и $\gamma_1 = 1.1$. Также задавалась величина $\varepsilon = 1$, а значение v_∞ считалось неизвестным.

В результате проведенных расчетов был найден искомый контур. Относительные погрешности в вычислении его координат, а также угла атаки, скорости на бесконечности и подъемной силы составили 0,2%, 0,1%, 0,1% и 0,22%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гошек И. Аэродинамика больших скоростей.— М.: ИЛ, 1954.—547 с.
2. Чжен П. Управление отрывом потока.— М.: Мир, 1979.—552 с.
3. Томас А. С. В., Корнелиус К. К. Исследование щелевого отсоса ламинарного пограничного слоя.— Аэрокосмическая техника, 1983, т. 1, № 1, с. 98—107.

4. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.—336 с.
5. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б. Метод квазирешений в обратной краевой задаче гидроаэродинамики.— Изв. вузов. Математика, 1984, № 10, с. 50—59.
6. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Квазирешения обратной краевой задачи гидроаэродинамики.— ДАН СССР, 1985, т. 284, № 2, с. 319—322.

Доложено на семинаре 24 мая 1985 г.