

УДК 536.21;532.526;27.35.25

## ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ

© 2001 г. В. Ф. Формалев

Московский государственный авиационный институт (технический университет)

Поступил в редакцию 27.12.2000 г.

Обзор направлен, с одной стороны, на привлечение внимания исследователей к проблемам, связанным с теплообменом анизотропных тел, а с другой – на анализ того скудного опыта по исследованию теплообмена анизотропных тел, который накоплен за последние 30 лет. Рассматривается сопряженный теплообмен между пограничными слоями и анизотропными телами, теплообмен при совместном взаимном влиянии анизотропной теплопроводности и анизотропной фильтрации при пленочном охлаждении тел с анизотропией свойств. Выявлены новые эффекты при моделировании сопряженного теплообмена, идентифицирован закон нелинейной фильтрации анизотропных тел, исследовано влияние отдельных компонентов и ориентации главных осей тензоров теплопроводности и проницаемости на нестационарные температурные поля и на распределение компонентов вектора скорости фильтрации. Аналитическое исследование теплообмена анизотропных тел позволило в условиях отсутствия адекватной информации точно смоделировать нестационарные температурные поля в простейших анизотропных телах, которые можно использовать как тестовые результаты. Сформулирован ряд рекомендаций по организации тепловой защиты анизотропных тел при их аэрогазодинамическом нагреве.

### ВВЕДЕНИЕ

При исследовании теплового состояния тел в условиях сложного теплообмена возникают значительные трудности, связанные с комплексным учетом таких видов теплообмена, как конвективно-кондуктивный и лучистый теплообмен, сопряженный теплообмен, сложный теплообмен в условиях фазовых превращений и фильтрации в пористых телах и др. Эти трудности значительно возрастают в случаях, когда тела являются анизотропными. Вместе с тем публикации по исследованию теплового состояния анизотропных тел при сложном теплообмене практически отсутствуют. Это связано со следующими факторами:

1) теплопроводность и проницаемость в таких телах описываются тензорами, что влечет за собой моделирование только многомерных задач;

2) на границах анизотропных тел, соприкасающихся с газообразными или жидкими средами, а также на границах разрыва теплофизических характеристик (ТФХ) анизотропных тел всегда могут присутствовать значительные по величине продольные составляющие вектора плотности теплового потока, даже в тех случаях, когда граница является изотермой;

3) в сопряженных задачах теплообмена и анизотропной теплопроводности могут возникать дополнительные проблемы, связанные с наличием в условиях сопряжения недиагональных компонентов тензора теплопроводности;

4) при моделировании совместного теплообмена и фильтрации необходимо учитывать существ-

венное влияние на величины и ориентацию векторов теплового потока и потока массы знаков и величин недиагональных компонентов и миноров матриц теплопроводности и проницаемости соответственно;

5) в аналитической теории теплопроводности и фильтрации анизотропных тел наличие смешанных производных в дифференциальных уравнениях существенно ограничивает известные методы, на основе которых получено подавляющее число решений линейных задач в изотропных областях, причем для анизотропных тел применимыми являются методы бесконечных интегральных преобразований.

В известных публикациях по теплообмену анизотропных тел [1–5] используются в основном методы аналитической теории теплопроводности. Исследованию сложного теплообмена анизотропных тел посвящены работы отечественных авторов [6–14]. Работы по исследованию сопряженного теплообмена анизотропных тел и совместного теплообмена с фильтрацией или других физических явлений отсутствуют. За исключением небольшой главы в [15] монографий по теплообмену анизотропных тел в настоящее время не имеется.

В основе теории теплообмена анизотропных тел лежит известная гипотеза Фурье о пропорциональности теплового потока антиградиенту температуры

$$q = -\Lambda \text{ grad } T, \quad (1)$$

где  $\Lambda = [\lambda_{ij}]$  – симметрический тензор теплопроводности второго ранга. Закон (1) в координатной форме имеет вид

$$\begin{aligned} -q_x &= \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{13} \frac{\partial T}{\partial z}, \\ -q_y &= \lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{23} \frac{\partial T}{\partial z}, \\ -q_z &= \lambda_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{33} \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

В изотропном теле вектор плотности теплового потока  $-\lambda \text{grad} T$  ортогонален изотерме  $T(x, y, z) = \text{const} (dT = 0)$ , поскольку скалярное произведение  $q$  на касательный к изотерме вектор  $\tau \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$  в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$  совпадает с полным дифференциалом от температуры  $\lambda dT$ , равным нулю на изотерме

$$\begin{aligned} (-\lambda \text{grad} T, \tau(M)) &= \\ &= -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial T}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial T}{\partial z} (z - z_0) \right) = \\ &= -\lambda dT(x_0, y_0, z_0) = 0, \end{aligned}$$

т.е. в изотропном случае касательная составляющая вектора плотности теплового потока на изотерме равна нулю.

В анизотропном теле вектор плотности теплового потока направлен не по нормали к изотерме, поскольку величина его касательной составляющей не равна нулю, а равна величине  $(\Lambda \text{grad} T, \tau(M))$ . Для двумерного плоского анизотропного тела угол  $\alpha$ , ориентирующий направление  $\mathbf{m}$  вектора плотности теплового потока относительно нормали к изотерме в точке  $M(x_0, y_0)$  (рис. 1), определяется следующим образом:

$$\cos \alpha = \frac{(\Lambda \text{grad} T, \mathbf{n}^0)}{|\Lambda \text{grad} T| |\mathbf{n}^0|} =$$

$$\cos \alpha = \frac{(\lambda_{11} \psi'(x_0) + \lambda_{21}) \frac{\partial T}{\partial x} + (\lambda_{12} \psi'(x_0) + \lambda_{22}) \frac{\partial T}{\partial y}}{\sqrt{(\lambda_{11} \psi'(x_0) + \lambda_{12})^2 + (\lambda_{21} \psi'(x_0) + \lambda_{22})^2} \sqrt{(\partial T / \partial x)^2 + (\partial T / \partial y)^2}}. \quad (4)$$

Здесь  $y = \psi(x)$  функция, описывающая поведение изотермы.

Таким образом, величину вектора плотности теплового потока в точке  $M(x_0, y_0)$  на изотерме можно определить, с одной стороны, из (1) как  $|\Lambda \text{grad} T|$ , а с другой – из выражения

$$\lambda_m \frac{\partial T}{\partial \mathbf{m}} \Big|_M = (\Lambda \text{grad} T, \mathbf{n}(M)) / \cos \alpha(M). \quad (5)$$

Тензор теплопроводности  $\Lambda$ , имеющий диагональный вид, называют тензором теплопровод-

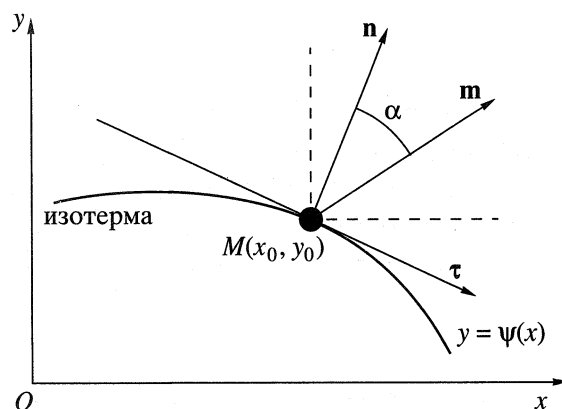


Рис. 1. Ориентация вектора плотности теплового потока на изотерме.

$$\begin{aligned} &= \left[ \left( \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) + \left( \lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) \right] / \left[ \left( \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}^0$  – орт вектора  $\mathbf{n}$ . Используя в (3) известные равенства

$$\cos(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) = \frac{\partial T}{\partial x} / \sqrt{\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2},$$

$$\sin(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) = \frac{\partial T}{\partial y} / \sqrt{\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2},$$

$$\cos(\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) = \sin(\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) = \cos(\mathbf{i}, \tau^0),$$

$$\text{tg}(\mathbf{i}, \tau^0) = \psi'(x)$$

получим

ности, приведенным к главным осям  $O\xi, O\eta, O\zeta$ , а его компоненты  $\lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\zeta$  – главными компонентами тензора теплопроводности.

Компоненты тензора теплопроводности в любой другой системе координат определяются через главные компоненты следующим образом:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \sum_{p=1}^3 \lambda_p \alpha_{i,p} \alpha_{j,p}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

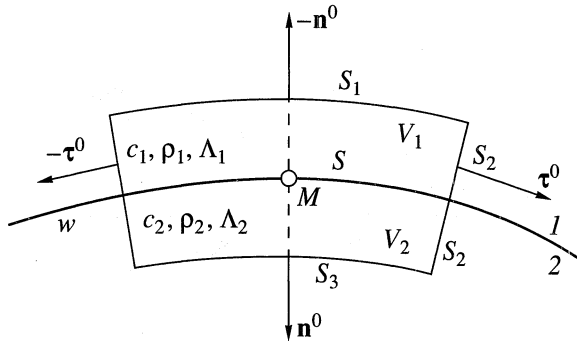


Рис. 2. Окрестность границы между анизотропными телами 1 и 2.

где  $\lambda_1 = \lambda_\xi$ ;  $\lambda_2 = \lambda_\eta$ ,  $\lambda_3 = \lambda_\zeta$ ;  $\alpha_{i,p}$ ,  $\alpha_{j,p}$  – направляющие косинусы углов между координатными и главными осями.

В двумерном случае компоненты тензора теплопроводности имеют вид [1, 16]

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= \lambda_\xi \cos^2 \varphi + \lambda_\eta \sin^2 \varphi, \\ \lambda_{22} &= \lambda_\xi \sin^2 \varphi + \lambda_\eta \cos^2 \varphi, \\ \lambda_{12} &= \lambda_{21} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}\quad (7)$$

В (7)  $\varphi$  – угол между координатной осью  $Ox$  и главной осью  $O\xi$ .

Все изложенное в полной мере относится и к тензору проницаемости при фильтрации жидкой или газообразной среды через пористое анизотропное тело.

В данном обзоре анализируются следующие проблемы, возникающие при сложном теплообмене анизотропных тел:

теплообмен на границах, разделяющих как анизотропные тела, с одной стороны, так анизотропные и изотропные – с другой;

сопряженный теплообмен в пограничных слоях и анизотропных телах, включая теплообмен в условиях уноса массы при аэрогазодинамическом нагреве затупленных тел;

совместный теплообмен и фильтрация в пористых анизотропных телах, включая нелинейную фильтрацию с тензором проницаемости;

аналитическое исследование теплового состояния анизотропных тел простейших геометрических форм.

По каждой из проблем сделаны выводы и рекомендации, позволяющие судить о состоянии или дальнейших исследованиях, связанных с конкретной проблемой.

## 1. ТЕПЛООБМЕН НА ГРАНИЦАХ СОПРЯЖЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Существенным отличием теплообмена на границах анизотропных тел по сравнению с изотропными является возможное наличие значительных по величине продольных составляющих вектора плотности теплового потока, сравнимых, а иногда и превышающих нормальные составляющие. Таким образом, нормальные к границе тела и касательные направления становятся равнозначными, что может приводить к существенно иной постановке задачи, чем в изотропном случае. Так, например, в сопряженных задачах пограничного слоя и анизотропной теплопроводности нельзя пренебрегать членами, содержащими первые и вторые производные газодинамических параметров по продольным независимым переменным, а их учет может приводить к изменению типа уравнений, описывающих пристенные течения (как известно, уравнения пограничного слоя при обтекании изотропных тел относятся к уравнениям параболического типа).

Краевые условия в задачах теплообмена анизотропных тел формулируются в виде балансовых соотношений с использованием первого и второго начал термодинамики. Перед тем как записать краевые условия для сопряженных задач теплопроводности анизотропных тел, необходимо определить граничные условия для задач теплопроводности на границах двух анизотропных тел, а затем полученные результаты использовать для более сложных случаев.

Пусть  $w$  – граница разрыва теплофизических характеристик (ТФХ) двух анизотропных сред 1 и 2, теплопроводность которых описывается симметрическими тензорами второго ранга  $\Lambda_1 = [\lambda_{ij}^1]$  и  $\Lambda_2 = [\lambda_{ij}^2]$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ , а объемные теплоемкости – соответственно величинами  $c_1\rho_1$  и  $c_2\rho_2$  (рис. 2).

Окружим произвольную точку  $M$  на границе  $w$  разрыва ТФХ (рис. 2) со стороны среды 1 элементарной областью  $V_1$  с цилиндрическими поверхностями  $S = \Delta l \times 1$  м и  $S_1 = \Delta l_1 \times 1$  м и боковыми гранями  $S_2 = \Delta r \times 1$  м, перпендикулярными поверхностям  $S_1$  и  $S_2$ , а со стороны среды 2 – областью  $V_2$ , ограниченной поверхностями  $S = \Delta l \times 1$  м,  $S_3 = \Delta l_3 \times 1$  м и боковыми гранями  $S_2 = \Delta r \times 1$  м.

В соответствии с первым началом термодинамики тепловой поток через замкнутую поверхность областей  $V_1$  и  $V_2$  расходуется на увеличение во времени температур тел внутри этих областей. Тогда, если за положительные направления при-

нять направления ортов  $\mathbf{n}^0$  и  $\boldsymbol{\tau}^0$  внешних нормалей к поверхностям  $S_2$  и  $S_3$ , получим

$$\begin{aligned} & - \left[ \iint_{S_1} (\Lambda_1 \text{grad } T_1, -\mathbf{n}^0) dS + \iint_{S_3} (\Lambda_2 \text{grad } T_2, \mathbf{n}^0) dS \right] - \\ & - \left[ \iint_{S_2} (\Lambda_1 \text{grad } T_1, -\boldsymbol{\tau}^0) dS + \iint_{S_2} (\Lambda_1 \text{grad } T_1, \boldsymbol{\tau}^0) dS \right] - \\ & - \left[ \iint_{S_2} (\Lambda_2 \text{grad } T_2, -\boldsymbol{\tau}^0) dS + \iint_{S_2} (\Lambda_2 \text{grad } T_2, \boldsymbol{\tau}^0) dS \right] = \\ & = \iiint_{V_1} c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} dV + \iiint_{V_2} c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (8)$$

Применив к (8) теорему о среднем, разделив результат на  $S$  и перейдя к пределу при  $\Delta r \rightarrow 0$  (или  $S_2 \rightarrow 0$ ), получим

$$(\Lambda_1 \text{grad } T_1, \mathbf{n}^0) = (\Lambda_2 \text{grad } T_2, \mathbf{n}^0). \quad (9)$$

Раскрыв в (9) скалярные произведения, можно записать нормальные составляющие вектора плотности теплового потока в точке  $M$  на границе разрыва ТФХ двух анизотропных сред. Для двумерного случая, когда гладкая граница  $w$  описывается функцией  $y = f(x)$ , граничное условие (9) принимает вид

$$\begin{aligned} & (\lambda_{11}^1 f'(x) + \lambda_{21}^1) \frac{\partial T_1}{\partial x} + (\lambda_{12}^1 f'(x) + \lambda_{22}^1) \frac{\partial T_1}{\partial y} = \\ & = (\lambda_{11}^2 f'(x) + \lambda_{21}^2) \frac{\partial T_2}{\partial x} + (\lambda_{12}^2 f'(x) + \lambda_{22}^2) \frac{\partial T_2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если к выражению (8) применить теорему о среднем, разделить результат на  $S_2$  и перейти к пределу при  $S \rightarrow 0$  (тогда  $S_1$  и  $S_3$  также стремятся к нулю), получим, что продольные составляющие вектора плотности теплового потока, оставаясь непрерывными со стороны сред 1 и 2, могут прерываться разрывы, поскольку эти составляющие не пересекают границы  $w$  разрыва ТФХ. Таким образом, в общем случае

$$(\Lambda_1 \text{grad } T_1, \boldsymbol{\tau}^0) \neq (\Lambda_2 \text{grad } T_2, \boldsymbol{\tau}^0) \quad (11)$$

и, следовательно, вектор плотности теплового потока в точке на границе разрыва ТФХ может терпеть разрыв первого рода.

При этом для идеального контакта на границе  $w$  температура этой границы непрерывна

$$T_1|_w = T_2|_w = T_w. \quad (12)$$

Рассмотрим краевые условия в сопряженных задачах пограничного слоя и анизотропной теплопроводности на границах  $w$  сопряжения изотроп-

ной газообразной среды и анизотропной пластины ( $f'(x) \equiv 0$ ). Пусть проекция вектора плотности теплового потока на направление нормали со стороны газа равна  $\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y}|_w$  (без учета диффузионного, лучистого и других видов теплового потока).

Тогда на основе соотношения (10) можно записать [16–18]

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y}|_w = \lambda_{21} \frac{\partial T_T}{\partial x}|_w + \lambda_{22} \frac{\partial T_T}{\partial y}|_w, \quad (13)$$

где  $T_e(x, y)$ ,  $T_T(x, y)$  – распределение температур соответственно в газе и пластине.

Для криволинейной границы сопряжения, заданной функцией  $y = f(x)$ , в декартовой системе координат  $(x, y)$  в соответствии с условием (9) выполняется равенство

$$\begin{aligned} -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y}|_w & = [\lambda_{11} f'(x) + \lambda_{21}] \frac{\partial T_T}{\partial x}|_w + \\ & + [\lambda_{12} f'(x) + \lambda_{22}] \frac{\partial T_T}{\partial y}|_w. \end{aligned} \quad (14)$$

Кроме этого, в условия сопряжения должно входить условие равенства температур различных сред на границе сопряжения  $w$

$$T_e|_w = T_T|_w. \quad (15)$$

Добавление новых видов теплового потока как со стороны газа, так и со стороны тела принципиально не изменяют граничных условий (13), (14) в сопряженных задачах теплообмена на границах анизотропных тел.

*Выводы по разделу:*

1. На границах разрыва теплофизических характеристик двух анизотропных сред с идеальным контактом нормальные составляющие вектора плотности теплового потока являются непрерывными, а касательные составляющие могут быть разрывными. Физически это объясняется тем, что касательные составляющие, оставаясь непрерывными в своих средах в окрестности границы разрыва, не пересекают этой границы.

2. На любых границах, включая границы плоских тел, ограничивающих анизотропные тела, условия сопряжения содержат все компоненты градиента температур. На границах, например плоских изотропных тел, условия сопряжения содержат только один компонент градиента температур в нормальном к границе направлении.

3. Величина и направление теплового потока на границе анизотропного тела полностью определяются величинами главных компонентов и ориентацией главных осей тензора теплопроводности, а также компонентами градиента темпера-

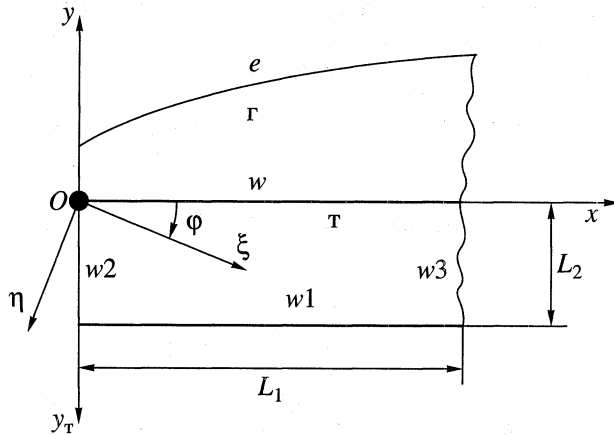


Рис. 3. Расчетная схема.

тур и функцией, описывающей поведение границы сопряжения.

## 2. СОПРЯЖЕННЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ И АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ

Основная трудность в проблемах сопряженно-теплообмена заключается в том, что для решения полных уравнений пограничного слоя необходимо в качестве краевого условия для уравнения энергии задать температуру границы сопряжения, для определения которой необходимо полностью решить задачу теплопроводности в теле. Для решения задачи теплопроводности в теле на границе сопряжения должны быть заданы тепловые потоки от пограничного слоя, которые определяются из решения полной системы уравнений пограничного слоя. Чаще всего решение этой проблемы находилось в виде итерационных процедур. А именно: если задача теплопроводности ставится в нестационарной постановке, а задача пограничного слоя – в квазистационарной (характерное время в виде отношения размера тела к скорости невязкого потока много меньше характерного времени прогрева тела), то в качестве начального приближения температуры границы сопряжения в задаче пограничного слоя принимается распределение температуры из предыдущего временного слоя. Далее осуществляется итерационный процесс. Этот подход применим и к стационарным сопряженным задачам пограничного слоя и теплопроводности, если решать их как нестационарные в режиме установления.

По исследованию сопряженного теплообмена на границах анизотропных тел публикации практически отсутствуют. Для изотропных тел известны классические работы Лыкова и его школы [19–21], в которых рассматривались простейшие сопряженные задачи в одномерных постановках.

В тех же работах высказаны основные идеи и методы решения сопряженных задач теплообмена, основными из которых являются следующие:

итерационные методы – эти методы сложно применить к стационарным сопряженным задачам;

метод объединения расчетных областей в одну расчетную область – он обладает существенным недостатком, связанным с различием физических процессов, протекающих в газе и теле (в последнем отсутствуют конвекция, диссипация энергии, градиент давления). Кроме этого, в стационарных сопряженных задачах дифференциальные уравнения для газа являются уравнениями параболического типа, а для тела – эллиптического;

метод введения на границе сопряжения неизвестной функции, в качестве которой принимается распределение температуры на этой границе, и сведение системы уравнений в частных производных к двум “несвязанным” [19, 20] краевым задачам, где неизвестная функция определяется из условия сопряжения. В работах [16–18] этот подход применен к решению сопряженных задач пограничного слоя и анизотропной теплопроводности без использования итерационных процедур.

В сопряженных задачах пограничного слоя и анизотропной теплопроводности трудности постановки и решения существенно возрастают. Во-первых, приходится формулировать и решать многомерные по пространству сопряженные задачи. Во-вторых, все направления в точках, принадлежащих границе сопряжения, равнозначны в том смысле, что нельзя пренебречь продольными перетоками тепла. В-третьих, решение подобных задач зачастую сводится не к трансцендентному уравнению, как в изотропном случае, а к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка относительно температуры границы сопряжения в двумерном случае и для уравнения первого порядка в частных производных – в трехмерном случае.

Для анализа всех особенностей моделирования сопряженных задач теплообмена в пограничных слоях и анизотропной теплопроводности рассмотрим простейшую задачу о нагреве двумерной анизотропной пластины от газодинамического пограничного слоя (рис. 3). Подобные задачи рассматривались в [18, 22].

Здесь  $w$  – граница сопряжения;  $e$  – наружная граница пограничного слоя;  $\varphi$  – угол, ориентирующий главные оси  $O\xi$ ,  $O\eta$  относительно декартовой системы координат  $(x, y_T)$  для тела;  $(x, y)$  – декартова система координат для пограничного слоя;  $\gamma$ ,  $\tau$  – индексы соответственно для газа и тела. Система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < \delta_e(x), \quad 0 < x < L_1, \quad (16)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (17)$$

$$0 < y < \delta_e(x), \quad 0 < x < L_1,$$

$$\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu(T)}{\text{Pr}} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\mu(T)}{2} \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial u^2}{\partial y} \right], \quad (18)$$

$$0 < y < \delta_e(x), \quad 0 < x < L_1,$$

$$p = \rho RT, \quad 0 < y < \delta_e(x), \quad 0 < x < L_1, \quad (19)$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < L_1, \quad (20)$$

$$u(x, \delta_e(x)) = u_e(x), \quad T(x, \delta_e(x)) = T_e(x),$$

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}, \quad y = \delta_e(x), \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad (21)$$

$$u(0, y) = u_0(y), \quad T(0, y) = T_0(y), \quad (22)$$

$$x = 0, \quad 0 < y < \delta_e(0),$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (23)$$

$$0 < x < L_1, \quad 0 < y_T < L_2,$$

$$-\lambda^r \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} \Big|_{y=0} =$$

$$= \left( \lambda_{21} \frac{\partial T(x, 0)}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y_T} \right)^T_{y_T=0}, \quad (24)$$

$$0 \leq x \leq L_1, \quad y_T = 0,$$

$$T(x, 0) \Big|_{y=0}^r = T(x, 0) \Big|_{y_T=0}^T = T_w(x), \quad (25)$$

$$0 \leq x \leq L_1, \quad y_T = 0,$$

$$\lambda_{21} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w_1} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{w_1} = 0, \quad 0 < x < L_1, \quad (26)$$

$$y_T = L_2,$$

$$T(0, y_T) \Big|_{w_2} = T_{w_2}(y_T), \quad x = 0, \quad 0 \leq y_T \leq L_2, \quad (27)$$

$$\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w_3} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{w_3} = 0, \quad x = L_1, \quad 0 < y_T < L_2. \quad (28)$$

Система уравнений пограничного слоя (16)–(22) заимствована из [23]; (24), (25) – условия сопряжения на границе  $w$  пограничного слоя и анизотропного тела по тепловому потоку (24) и температуре (25). В задаче теплопроводности (23)–(28) дифференциальное уравнение (23) содержит смешанные производные и производную второго порядка по переменной  $x$ . Поэтому на границах тела  $x = 0$  и  $x = L_1$  должны быть заданы граничные условия. Однако эти граничные условия являются следствием действия тепловых потоков от пограничного слоя. Вместе с этим для получения газодинамических параметров в сечении  $x = L_1$  необходимо решить совместные задачи пограничного слоя и анизотропной теплопроводности.

Выход из этой ситуации (имеющей место не только для анизотропных, но и многомерных изотропных сопряженных задач) может быть найден из согласования условий в сечении  $x = L_1$  в пограничном слое и в теле. То есть, если в пограничном слое в сечении  $x = L_1$  распределение газодинамических функций формируется в процессе решения в направлении от  $x = 0$  к  $x = L_1$ , то и в теле распределение температур в сечении  $x = L_1$  должно быть получено в процессе решения задачи теплопроводности в том же направлении.

Таким образом, для соблюдения условий сопряжения (24), (25) на границе  $x = L_1$  краевое условие (28) не задается. Однако для замыкания задачи теплопроводности в анизотропном теле на границе  $w_2$  ( $x = 0$ ) необходимо задать не только распределение температур (27), но и распределение тепловых потоков

$$\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w_2} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{w_2} = -q(0, y_T), \quad (29)$$

$$x = 0, \quad 0 < y_T < L_2.$$

В сечении  $x = 0$  граничные условия для задачи анизотропной теплопроводности также должны быть согласованы с газодинамическими характеристиками пограничного слоя в этом сечении. Различные конструкции анизотропного тела и различные условия обтекания предполагают различные способы задания граничных условий в теле при  $x = 0$ . Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть точка  $x = 0$  на границе  $w$  является точкой полного торможения газодинамического потока, направленного поперечно пластине. Тогда газодинамические характеристики пограничного слоя в сечении  $x = 0$  могут быть определены и заданы в виде (22). Если анизотропное тело симметрично относительно линии  $x = 0$ , т.е. симметричны как геометрические, так и теплофизические характеристики тела, то в этом случае сопряженный теплообмен симметричен и на границе  $x = 0$  тела можно задать условия симметрии тела

$$-\left( \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w_2}^- + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{w_2}^- \right) = \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w_2}^+ + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{w_2}^+, \quad (30)$$

$$x = 0, \quad 0 < y_T < L_2,$$

а распределение температуры (27) в сечении  $x = 0$  полностью определится по газодинамическим и тепловым характеристикам пограничного слоя при  $x = 0$ . Поскольку на линии  $x = 0$  при отсут-

ствии разрывов ТФХ на этой линии  $\lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{w_2}^- = \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{w_2}^+$ , то из (30) следует, что и  $\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w_2}^- = \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w_2}^+$ , т.е.

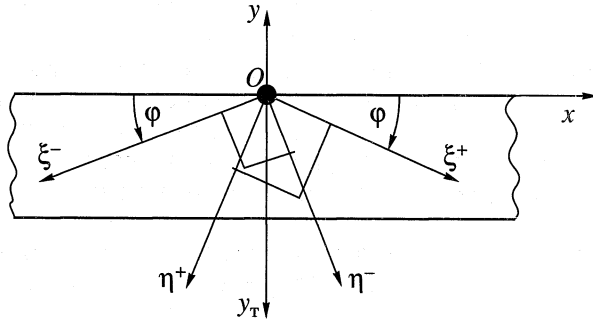


Рис. 4. Симметрия главных осей тензора теплопроводности на линии  $x = 0$ .

$$\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w_2} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{w_2} = 0, \quad x = 0, \quad 0 < y_T < L_2. \quad (31)$$

Таким образом, сопряженная задача теплообмена в пограничных слоях и анизотропных телах с симметрией геометрических и теплофизических характеристик тела описывается уравнениями (16)–(27), (31).

Симметричное относительно линии  $x = 0$  анизотропное тело можно изготовить путем склеивания по линии  $x = 0$  двух одинаковых тел с одними и теми же теплофизическими характеристиками. Тогда на этой линии будут симметрично-разрывными направления главных осей  $O\xi$ ,  $O\eta$  тензора теплопроводности, а следовательно, и направления действия главных компонентов тензора теплопроводности  $\lambda_\xi$ ,  $\lambda_\eta$  (рис. 4).

2. Пусть теперь линия  $x = 0$  является линией полного торможения однородной анизотропной пластины с одинаковой ориентацией главных осей тензора теплопроводности в каждой точке тела на линии  $x = 0$  (симметрия ТФХ на этой линии нарушена). В этом случае на границе тела  $x = 0$  не удастся задать граничные условия по температуре и тепловому потоку так, как в предыдущем, симметричном случае. Однако те же граничные условия на границе  $x = 0$  можно согласовать с параметрами пограничного слоя приближенно, если в сечении  $x = 0$  и двух соседних сечениях, очень близко находящихся к  $x = 0$ , определить локально одномерные распределения температур, используя тепловые потоки от пограничного слоя в этих сечениях, а затем в сечении  $x = 0$  найти распределение компонентов градиента температур  $\partial T/\partial x$  и  $\partial T/\partial y$ , с помощью которых в первом приближении можно определить распределение тепловых потоков в сечении  $x = 0$  и сформировать краевое условие (29). Это краевое условие можно уточнить в итерационном цикле, взяв в уравнении теплопроводности вторую производную температуры по переменной  $y$  на расчетной итерации, а смешанную производную и вторую производную по переменной  $x$  – из предыдущей итерации. В ре-

зультате формулировка данной задачи сводится к формулировке предыдущей задачи.

Поскольку в анизотропном случае на границе  $w$  сопряжения “газ–тело” продольные составляющие вектора теплового потока соизмеримы с нормальными к границе составляющими, а условия сопряжения содержат все компоненты градиента температур, то определение температуры границы сопряжения сводится не к трансцендентному уравнению, как в изотропном теле, а к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения относительно температуры  $T_w(x)$  границы  $w$  сопряжения с независимой переменной  $x$ .

В работах [18, 22] описан безытерационный метод решения сопряженного теплообмена в пограничном слое и анизотропном теле в соответствии с математической моделью (16)–(27), (31). Метод основан на введении параметра, которым является температура  $T_w(x)$  границы сопряжения, и на реализации вычислительных процедур таким образом, что прямой ход скалярных прогонок по переменной  $y$  осуществляется в направлении от наружной границы “ $e$ ” пограничного слоя и внутренней границы  $w_1$  тела к границе  $w$  сопряжения. Распределение температур в продольном направлении как в теле, так, возможно, и в пограничном слое должно быть определено предварительно. В результате появляется возможность определить температуру, а следовательно, и производную  $\partial T/\partial y$  в любом количестве узлов окрестности границы сопряжения как со стороны газа, так и со стороны тела через температуру границы сопряжения  $T_w$ . Тогда результатом подстановки значений  $\partial T(x, 0)/\partial y|_{y=0}$  и  $\partial T(x, 0)/\partial y_T|_{y_T=0}$  в условие (24) будет следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно температуры  $T_w(x)$  границы сопряжения (из-за наличия недиагонального компонента  $\lambda_{21}$  тензора теплопроводности при производной  $\partial T(x, 0)/\partial x$ ):

$$\frac{dT_w}{dx} + pT_w = q, \quad x > 0, \quad y = y_T = 0 \quad (32)$$

с начальным значением

$$T_w(0) = T_{w0}, \quad x = 0, \quad y = y_T = 0. \quad (33)$$

В предложенном методе задача Коши (32), (33) формулируется и решается на каждом промежутке  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, I}$  (предполагается, что эти промежутки для газа и тела совпадают):

$$\frac{dT_{wi}}{dx} + p_i T_{wi} = q_i, \quad i = \overline{1, I}, \quad (34)$$

$$T_w(x_{i-1}) = T_{wi-1}, \quad i = \overline{1, I-1}. \quad (35)$$

Причем на каждом промежутке температура  $T_w(x)$  непрерывно дифференцируема, а на всей границе сопряжения – непрерывна.

Решением задач Коши (34), (35) будут функции

$$T_{wi}(x) = T_{wi-1} \exp(-p_i x) + \frac{q_i}{p_i} [1 - \exp(-p_i x)],$$

$$x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = \overline{1, I},$$

где

$$p_i = \frac{\lambda_{22} \alpha^T}{\lambda_{12} 2 \Delta y^T} - \frac{\lambda^r \beta^r}{\lambda_{12} 2 \Delta y^r},$$

$$q_i = \frac{\lambda^r \beta^r}{\lambda_{12} 2 \Delta y^r} - \frac{\lambda_{22} \beta^T}{\lambda_{12} 2 \Delta y^T}, \quad \alpha^{(r, T)} = -3 + 4A_{i1}^{(r, T)} A_{i2}^{(r, T)},$$

$$\beta^{(r, T)} = 4B_{i1}^{(r, T)} - A_{i2}^{(r, T)} B_{i1}^{(r, T)} - B_{i2}^{(r, T)};$$

$A_{i1}^{(r, T)}, A_{i2}^{(r, T)}, B_{i1}^{(r, T)}, B_{i2}^{(r, T)}$  – прогоночные коэффициенты в первом и втором узлах  $i$ -го сечения в окрестности границы сопряжения соответственно со стороны газа и тела, а  $\Delta y^r, \Delta y^T$  – поперечные шаги сетки в газе и теле.

После определения температур  $T_{wi}(x), i = \overline{1, I}$  границы сопряжения осуществляются обратные скалярные прогонки в направлении переменной  $y$  как в пограничном слое по определению температурного распределения  $T_{ij}^r, j = \overline{0, J^r - 1}, i = \overline{1, I}$ , так и в теле по определению температурного поля  $T_{ij}^T, j = \overline{0, J^T}, i = \overline{1, I}$ .

Таким образом, в отличие от существующих способов решения сопряженных задач теплообмена [19–21] в предложенном методе отсутствуют итерации, связанные с сопряженностью задач (итерационный процесс может быть связан с существенной нелинейностью уравнений, входящих в математическую модель).

На рис. 5 приведено распределение температуры  $T_w(x)$  границы сопряжения, полученное при численном решении сопряженной задачи (16)–(27), (29) предложенным методом. Входные данные принимали следующие значения:  $u_e = 1000x, \text{ м/с}; T_e = 1200 - 200x, \text{ К}; L_1 = 0.5 \text{ м}; L_2 = 0.02 \text{ м}; \varphi = 45^\circ; \lambda_\xi = 0.01 \text{ кВт/м К}$ . Как видно, уменьшение компонента  $\lambda_\eta$  главного тензора теплопроводности по

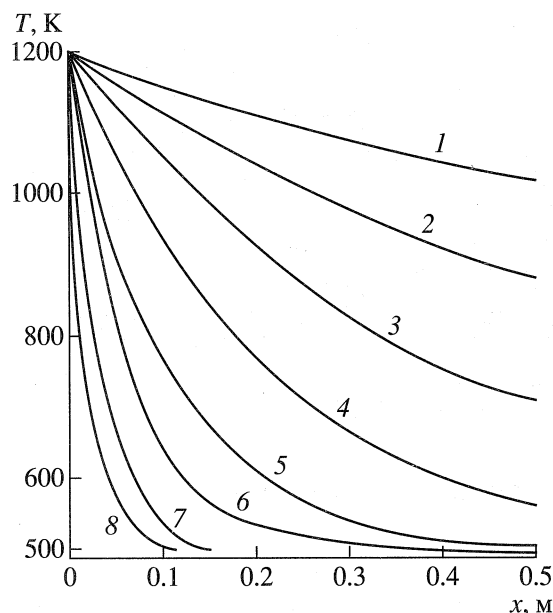


Рис. 5. Температурный профиль на границе сопряжения: 1 –  $\lambda_\eta = 0.01 \text{ кВт/м К}$ , 2 –  $\lambda_\eta = 0.02 \text{ кВт/м К}$ , 3 –  $\lambda_\eta = 0.04 \text{ кВт/м К}$ , 4 –  $\lambda_\eta = 0.08 \text{ кВт/м К}$ , 5 –  $\lambda_\eta = 0.16 \text{ кВт/м К}$ , 6 –  $\lambda_\eta = 0.32 \text{ кВт/м К}$ ; 7 –  $\lambda_\eta = 0.64 \text{ кВт/м К}$ ; 8 –  $\lambda_\eta = 1.28 \text{ кВт/м К}$ .

сравнению со значениями  $\lambda_\xi$  (или, что то же, увеличение компонента  $\lambda_\xi$  по сравнению с компонентом  $\lambda_\eta$ ) приводит к существенному увеличению значений температур на границе сопряжения, следствием чего является уменьшение вниз по потоку плотности газа и увеличение его динамической вязкости. Это явление должно приводить к снижению теплового потока от пограничного слоя к телу в зависимости от степени анизотропии.

Например, для пиролитического графита, характеристики которого заимствованы из [24] и приведены в табл. 1, при степени анизотропии  $\sim 100\text{--}200$  уменьшение теплового потока, по предварительным оценкам, может достигать 40%. Практически это можно сделать следующим образом: на конструкцию, работающую в условиях отсутствия уноса массы, наносится тонкий слой пиролитического графита ( $\sim 0.5\text{--}1 \text{ мм}$ ). В результате продольная составляющая кондуктивного теплового потока будет существенно выше поперечной составляющей по сравнению с изотропным случаем, что приведет к повышению температуры  $T_w(x)$  границы сопряжения вниз по потоку

Таблица 1

$T, \text{ К}$	100	200	400	500	1000	1500	2000	2500
$\lambda_\xi, \text{ кВт/м К}$	4.998	3.284	1.47	1.18	0.546	0.32	0.25	0.23
$\lambda_\eta, \text{ кВт/м К}$	0.04	0.0155	0.0071	0.0046	0.0025	0.0017	0.0013	0.0011
$c, \text{ кДж/кг К}$	0.714	–	–	1.26	2.1	2.39	2.48	2.56

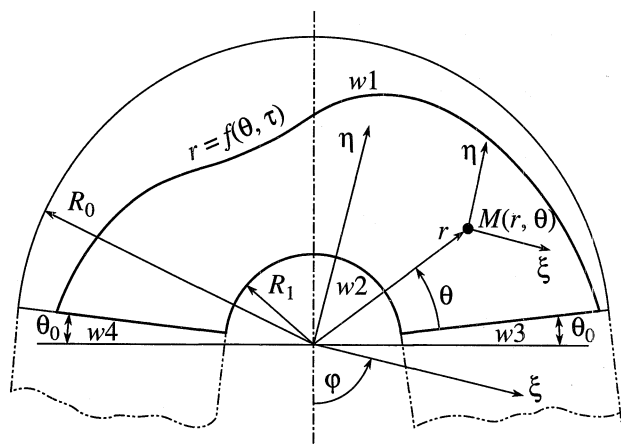


Рис. 6. Геометрия затупления носовой части.

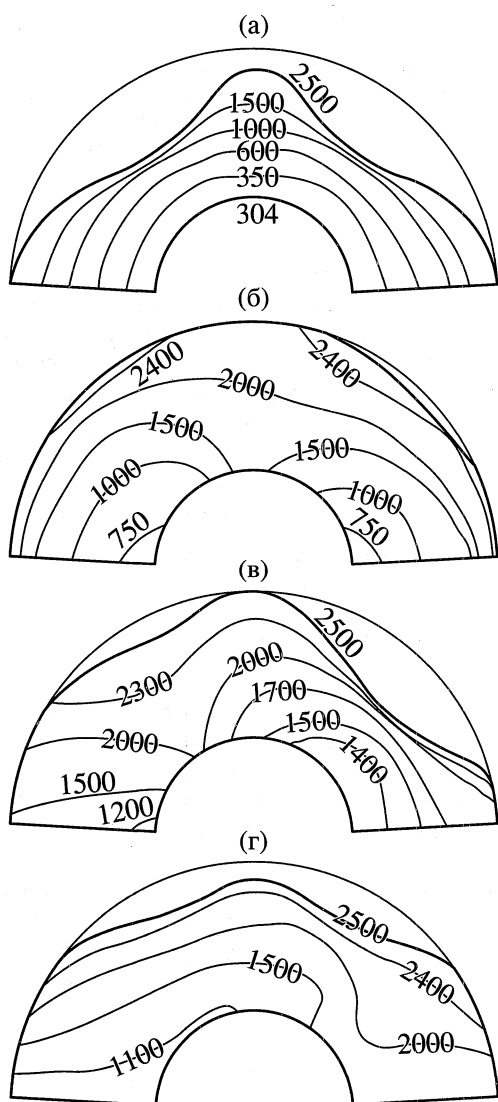


Рис. 7. Температурное поле и координаты границы  $w1$  в затупленном анизотропном теле: а – ортотропное тело ( $\varphi = \theta$ ), б –  $\varphi = 0$ , в –  $\varphi = 45^\circ$ , г –  $\varphi = 95^\circ$ .

и соответственно уменьшению теплового потока от пограничного слоя.

В условиях аэрогазодинамического нагрева затупленных носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов возникает необходимость сохранения геометрии носовой части (например, для сохранения лобового сопротивления, которое было принято при проектировании), хотя воздействие набегающего потока должно было бы приводить к уносу массы обтекаемого тела. Однако, если носовую часть изготовить из материала с высокой степенью анизотропии ( $\sim 100$ ) с ориентацией главной оси тензора теплопроводности с большим значением коэффициента теплопроводности вдоль продольной оси затупленного тела, то отвод теплового потока в этом направлении будет настолько велик, что температура поверхности на затуплении носовой части не достигнет значения, при котором будет происходить унос массы. Это подтверждают исследования, проведенные в работе [25].

На рис. 6 и 7 представлены схема расчетной области и один из вариантов расчета аэрогазодинамического нагрева носового затупления, изготовленного из анизотропного материала со степенью анизотропии  $\lambda_\xi/\lambda_\eta \sim 100$  (ТФХ приведены в табл. 1). Остальные исходные данные принимали следующие значения:  $R_1 = 0.01$  м;  $R_0 = 0.026$  м;  $\theta_0 = 5^\circ$ ; температура разрушения  $T^* = 2500$  К; эффективная энтальпия материала  $Q^* = 12600$  кДж/кг; степень черноты  $\epsilon = 0.8$ ; начальная температура  $T_{нач} = 300$  К. Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{w1}$  и эффективная температура пограничного слоя  $T_e$  для этого случая представлены в табл. 2.

Из рис. 7б видно, что унос массы практически равен нулю, поскольку главная ось  $\xi$  с большим коэффициентом теплопроводности  $\lambda_\xi$  ориентирована вдоль оси тела, хотя в других вариантах ориентации главных осей тензора теплопроводности унос массы существен (рис. 7а, 7в, 7г).

Решение аналогичной проблемы, но с целью затягивания области перехода ламинарного режима течения в турбулентный, рассматривалось в работах [26, 27], где использовался интенсивный нагрев газа на коротком начальном участке течения, что приводило к существенным затратам тепловой энергии.

*Выводы по разделу:*

1. В сопряженных задачах пограничного слоя и теплопроводности в анизотропных телах граничные условия должны быть согласованы практически на всех границах. Граничные условия могут быть однозначно сформулированы на продольных границах системы "газ-тело", т.е. на границах сопряжения, на наружной границе пограничного слоя и на внутренней границе тела. На поперечной границе в конечном сечении тела граничное

Таблица 2

$\theta$ , рад	0	0.371	0.742	1.113	1.484	1.855	2.226	2.6	2.97
$\alpha_{w1}$ , кВт/м <sup>2</sup> К	0.651	7.5	16.03	15.24	5.17	15.24	15.5	6.97	0.72
$T_e$ , К	4446	3870	3829	3829	3829	3829	3964	4249	4638

условие для уравнения теплопроводности, как правило, неизвестно, так как в этом сечении распределение температуры и теплового потока в существенной степени зависит от распределения температуры и теплового потока в конечном сечении пограничного слоя, где граничные условия не задаются (граница свободна от граничных условий). Таким образом, соответствующая граница в теле также должна быть освобождена от граничных условий. Однако для однозначности решения задачи теплопроводности в начальном сечении тела необходимо задать и распределение температур, и распределение тепловых потоков (т.е., в продольном направлении ставится задача Коши для уравнения теплопроводности в теле). Этот вывод в полной мере относится и к сопряженным задачам пограничного слоя и многомерной изотропной теплопроводности.

2. В сопряженных задачах пограничного слоя и изотропной теплопроводности (в том числе и многомерной) условие сопряжения сводится к трансцендентному уравнению относительно температуры  $T_w$  границы сопряжения в каждом сечении. Однако в сопряженных задачах пограничного слоя и анизотропной теплопроводности из-за наличия в условии сопряжения продольного компонента  $\partial T/\partial x$  градиента температур для нормальной составляющей вектора теплового потока условие сопряжения в двухмерном случае сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно температуры границы сопряжения  $T_w(x)$  и в трехмерном случае – к уравнению первого порядка в частных производных.

3. Исследования показали, что если процесс сопряженного теплообмена на телах с большой степенью анизотропии ( $\lambda_\xi/\lambda_\eta \sim 100$ ) организовать таким образом, чтобы главная ось с большим коэффициентом теплопроводности была направлена вдоль тела, а с меньшим – в поперечном направлении, то можно получить существенное снижение тепловых потоков к телу вниз по течению. Этот эффект можно использовать при построении тепловой защиты носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов для устранения уноса массы.

4. Проведение дополнительных исследований сопряженного теплообмена в условиях значительных составляющих продольного компонента градиента температуры на границе сопряжения является необходимым с целью подтверждения или опровержения одного из допущений, на осно-

ве которых формулируются уравнения пограничного слоя, а именно: о малости продольных составляющих градиента температуры по сравнению с поперечными составляющими. В этих условиях пристенное течение может описываться не уравнениями параболического типа, а уравнениями эллиптического типа.

### 3. СОВМЕСТНЫЕ ТЕПЛООБМЕН И ФИЛЬТРАЦИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ

Результаты исследований совместного теплообмена и фильтрации газообразных и жидких сред в изотропных пористых телах приведены в большом количестве публикаций и монографий, например, в [20, 28–34]. Сложности определения теплового состояния тел в условиях совместного теплообмена и фильтрации аналогичны тем, которые сопровождают сопряженный теплообмен. Для определения теплового состояния пористого тела необходимо знать массовую скорость фильтрации, а для определения последней необходимо знать тепловое состояние тела. Однако большинство естественных и искусственных пористых материалов являются анизотропными, причем, как правило, главные оси тензоров теплопроводности и проницаемости совпадают. Вместе с тем, за исключением некоторых работ автора [35, 36, 37], публикации как по совместной проблеме анизотропной теплопроводности и фильтрации, так и по анизотропной фильтрации отсутствуют.

Классическим законом линейной изотропной фильтрации является закон Дарси, в соответствии с которым вектор скорости фильтрации пропорционален антиградиенту давления фильтрации

$$\mathbf{V} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \quad (36)$$

где  $k$  – коэффициент проницаемости жидкой или газообразной фазы;  $\mu$  – ее динамическая вязкость. Так же как и в других законах, например, в законе анизотропной теплопроводности Фурье, форма закона анизотропной фильтрации сохраняется, а коэффициент проницаемости заменяется на тензор проницаемости

$$\mathbf{V}_f = -\frac{K}{\mu_f} \text{grad } p_f. \quad (37)$$

Здесь  $K$  – тензор проницаемости с компонентами  $[k_{ij}]$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ , причем, если главные оси тензора теплопроводности совпадают с главными

Таблица 3.  $\Pi(c\rho)_{\mu} = \Pi(c\rho)_{fV} = 1$ 

$Fo \backslash \bar{r}$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
0.0266	1.0	1.0	0.997	0.994	0.993
0.133	0.997	0.994	0.989	0.988	0.986
0.293	0.987	0.983	0.980	0.977	0.978
0.825	0.980	0.975	0.974	0.973	0.974
1.357	0.976	0.973	0.972	0.971	0.973
1.89	0.973	0.971	0.969	0.970	0.971

Таблица 4.  $\Pi(c\rho)_{\mu} = \Pi(c\rho)_{fV} = 10$ 

$Fo \backslash \bar{r}$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
0.0266	0.995	0.996	0.987	0.969	0.953
0.133	0.978	0.963	0.932	0.907	0.902
0.293	0.914	0.895	0.871	0.856	0.863
0.825	0.877	0.867	0.834	0.821	0.828
1.357	0.845	0.830	0.810	0.802	0.812
1.89	0.824	0.813	0.797	0.791	0.804

Таблица 5.  $\Pi(c\rho)_{\mu} = \Pi(c\rho)_{fV} = 20$ 

$Fo \backslash \bar{r}$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
0.0266	0.995	0.994	0.980	0.950	0.923
0.133	0.964	0.940	0.892	0.845	0.835
0.293	0.853	0.829	0.788	0.758	0.764
0.825	0.790	0.764	0.727	0.700	0.710
1.357	0.738	0.720	0.685	0.665	0.680
1.89	0.700	0.685	0.658	0.646	0.650

осями тензора проницаемости, то компоненты последнего получаются из компонентов тензора теплопроводности заменой главных компонентов тензора теплопроводности  $\lambda_{\xi}, \lambda_{\eta}, \lambda_{\zeta}$  на главные компоненты тензора проницаемости  $k_{\xi}, k_{\eta}, k_{\zeta}$ . В (37) индекс "f" относится к фильтрующей среде.

Уравнение фильтрации газовой фазы в пористом теле можно получить, если закон фильтрации (37) и зависимость плотности из уравнения состояния подставить в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \mathbf{V}_f) = 0. \quad (38)$$

Тогда уравнение нестационарной фильтрации для сжимаемого фильтрующегося газа относительно давления фильтрации примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_f}{RT} \right) = \text{div} \left( \frac{K p_f}{\mu(T) RT} \text{grad } p_f \right). \quad (39)$$

Для стационарной фильтрации несжимаемой жидкости уравнение фильтрации (39) упрощается и приобретает вид

$$\sum_{p,q=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{k_{pq}}{\mu(T)} \frac{\partial p_f}{\partial x_q} \right) = 0. \quad (40)$$

В качестве граничных условий для уравнений (39) или (40) на границах тела задается давление, однако существуют и случаи, когда на границе тела могут быть заданы значения нормальной производной давления.

Для определения компонентов вектора скорости фильтрации используется закон (37) в скалярной форме

$$\begin{aligned} -u &= \frac{1}{\mu(T)} \left( k_{11} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial p}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial p}{\partial z} \right), \\ -v &= \frac{1}{\mu(T)} \left( k_{21} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial p}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial p}{\partial z} \right), \\ -w &= \frac{1}{\mu(T)} \left( k_{31} \frac{\partial p}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial p}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial p}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

где распределение давления фильтрации определяется из уравнений (39) или (40). Компоненты  $u, v, w$  скорости фильтрации используются в конвективном члене уравнения анизотропной теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\Lambda(T) \text{grad } T) - \Pi(c\rho)_f (\mathbf{V}_f, \text{grad } T). \quad (42)$$

Здесь  $\Pi$  – пористость каркаса.

Соотношения (39)–(42) показывают, что в условиях анизотропной фильтрации очень трудно выбрать координатное направление с подавляющим расходом фильтрующейся среды, поскольку массовый поток зависит как от значений компонентов и направления главных осей тензора проницаемости, так и от величины градиента давления. Следовательно, задачу фильтрации с использованием уравнений (39) или (40) необходимо формулировать и решать в многомерной постановке. При этом, поскольку динамическая вязкость существенно зависит от температуры, многомерное температурное поле в анизотропном пористом теле должно быть известным, а для определения поля температур необходимо знать вектор  $\mathbf{V}_f$  скорости фильтрации. Таким образом, задачу анизотропной теплопроводности необходимо решать совместно с задачей анизотропной фильтрации.

В [35] исследовано влияние фильтрации на распределение температур в анизотропном пористом конусе с затуплением при его аэрогазодинамическом нагреве. В табл. 3–5 приведены некоторые результаты на линии полного торможения в виде зависимости отношения температуры анизотропного тела с учетом фильтрации к температуре



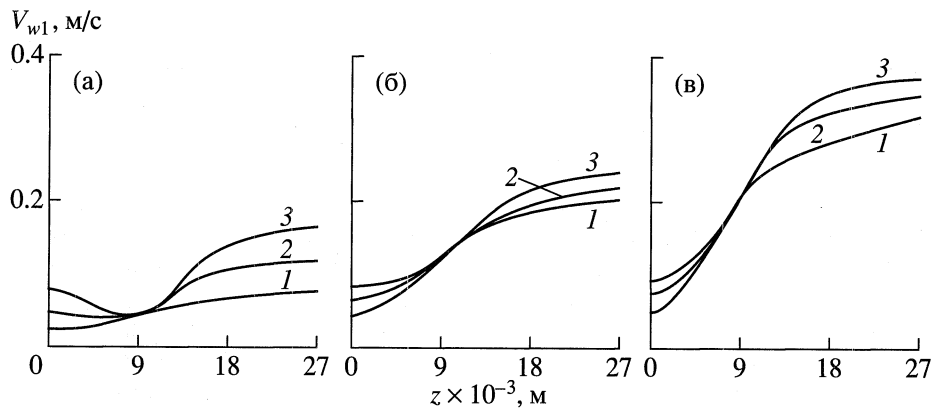


Рис. 9. Влияние на скорость анизотропной фильтрации на наружной границе компонента  $k_{\xi}$  тензора проницаемости: а –  $k_{\xi} = 10^{-14} \text{ м}^2$ , б –  $3 \times 10^{-14} \text{ м}^2$ , в –  $5 \times 10^{-14} \text{ м}^2$ .

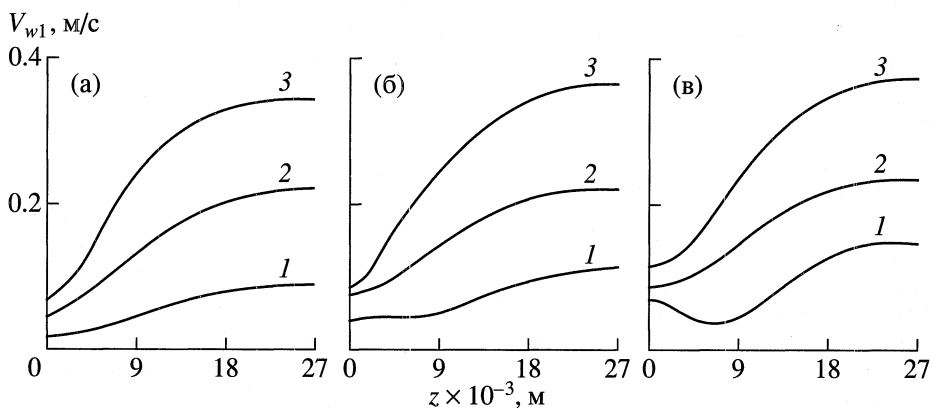


Рис. 10. Влияние на скорость анизотропной фильтрации на наружной границе компонента  $k_{\eta}$  тензора проницаемости: а –  $k_{\eta} = 10^{-14} \text{ м}^2$ , б –  $3 \times 10^{-14} \text{ м}^2$ , в –  $5 \times 10^{-14} \text{ м}^2$ .

$\rho_f = 1200 \text{ кг/м}^3$ ; теплоемкость  $c_f = 2.52 \text{ кДж/кг К}$ ; теплопроводность  $\lambda_f = 0.29 \text{ кВт/м К}$ ; пористость  $\Pi = 0.4$ . Для каркаса: плотность  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ; теплоемкость  $c = 1.26 \text{ кДж/кг К}$ ; компоненты главного тензора теплопроводности  $\lambda_{\xi} = 0.084 \text{ кВт/м К}$ ,  $\lambda_{\eta} = 0.336 \text{ кВт/м К}$ . Геометрические характеристики:  $r_{w1} = 0.013 \text{ м}$ ;  $r_{w2} = 0.01 \text{ м}$ ;  $\theta_0 = 10^\circ$ ;  $\varphi = 30^\circ$ . Давление на границе  $w2$  постоянно и равно  $p_{w2} = 5 \times 10^5 \text{ Па}$ , а распределение давления на границе  $w1$ , заимствованное из работы [40], вычисляется по следующей интерполяционной формуле:

$$p_{w1}(\theta)/p_0 = 1 - 1.17 \cos^2 \theta' + 0.25 \cos^6 \theta',$$

$$\theta' = \theta + \theta_0,$$

где  $p_0$  – давление торможения.

На рис. 9 представлены результаты расчетов зависимости скорости фильтрации  $|V_{w1}|$  охладителя от компонента  $k_{\xi}$  тензора проницаемости вдоль переменной  $z = (\pi/2 - \theta)r_{w1}$ . Из рисунка видно, что непосредственно на затуплении для значения про-

дольной координаты  $\theta' = \theta + \theta_0$ , равного значению  $\varphi = 30^\circ$  (или в окрестности этого угла), наблюдается совпадение скоростей фильтрации. Это указывает на то, что в окрестности этого угла фильтрация будет ортотропной, т.е. локальная система криволинейных координат  $(r, \theta)$  находится в окрестности главных осей  $O\xi$  и  $O\eta$  тензора проницаемости. В результате компонент  $k_{\xi}$  не дает вклада в суммарный расход охладителя, который ориентирован в направлении оси  $Or$ . Кроме этого, скорость анизотропной неизотермической фильтрации охладителя в окрестности линии полного торможения в несколько раз ниже скорости фильтрации на боковой поверхности ( $z \geq 18 \times 10^{-3} \text{ м}$ ), что объясняется значительно меньшим перепадом давления  $p_{w2} - p_{w1}(\theta(z))$  в окрестности этой линии по сравнению с перепадом на боковой поверхности.

На рис. 10 представлены аналогичные результаты для фиксированных значений  $k_{\xi}$  и варьируемых значений  $k_{\eta}$ . Результаты показывают, что влияние компонента  $k_{\eta}$  на скорость фильтрации значительно выше, чем влияние компонента  $k_{\xi}$ .

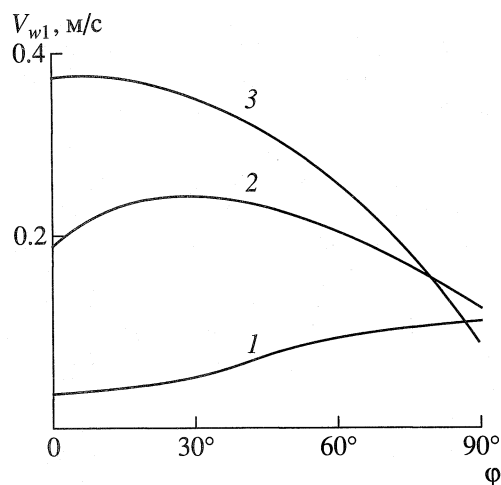


Рис. 11. Влияние на скорость фильтрации угла  $\varphi$  ориентации главных осей  $O\varphi$  и  $O\eta$  тензора проницаемости при  $k_{\xi} = 10^{-14} \text{ м}^2$ ,  $k_{\eta} = 5 \times 10^{-14} \text{ м}^2$ : 1 -  $z = 0 \text{ м}$ , 2 -  $z = 0.009 \text{ м}$ , 3 -  $z = 0.018 \text{ м}$ .

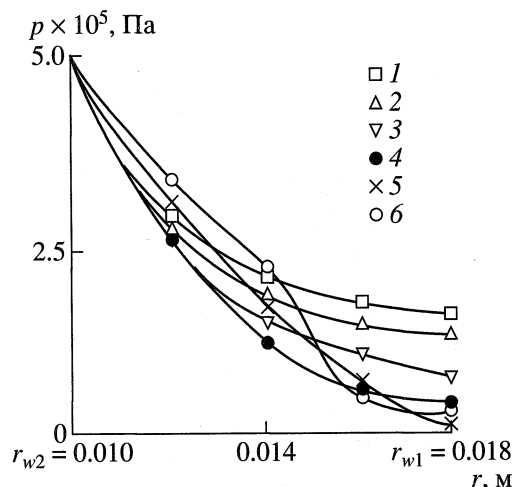


Рис. 12. Распределение давления фильтрации: 1 -  $z = 0$ , 2 -  $z = \pi/9r_{w1}$ , 3 -  $z = 2\pi/9r_{w1}$ , 4 -  $z = 3\pi/9r_{w1}$ , 5 -  $z = 4\pi/9r_{w1}$ , 6 -  $z = 0.2 \text{ м}$ .

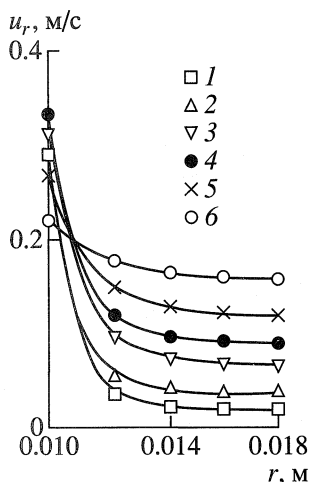


Рис. 13. Поле радиального компонента  $u_r(r, \theta)$  скорости изотропной фильтрации: 1 -  $z = 0$ , 2 -  $z = \pi/9r_{w1}$ , 3 -  $z = 2\pi/9r_{w1}$ , 4 -  $z = 3\pi/9r_{w1}$ , 5 -  $z = 4\pi/9r_{w1}$ , 6 -  $z = 0.2 \text{ м}$ .

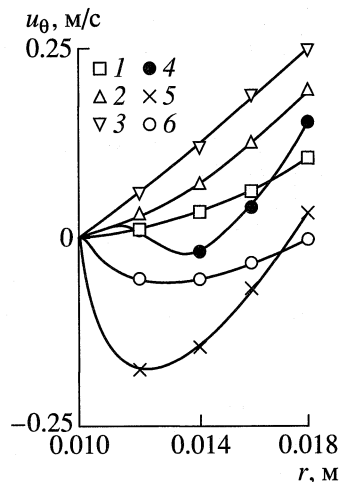


Рис. 14. Поле продольного компонента  $u_{\theta}(r, \theta)$  скорости изотропной фильтрации: 1 -  $z = 0$ , 2 -  $z = \pi/9r_{w1}$ , 3 -  $z = 2\pi/9r_{w1}$ , 4 -  $z = 3\pi/9r_{w1}$ , 5 -  $z = 4\pi/9r_{w1}$ , 6 -  $z = 0.2 \text{ м}$ .

(рис. 9). Это связано с тем, что на затуплении составляющая вектора скорости фильтрации в направлении оси  $Or$  возрастает быстрее с ростом  $k_{\eta}$ , поскольку угол между осями  $O\eta$  и  $Or$  меньше, чем угол между осями  $O\xi$  и  $Or$ . С увеличением угла  $\varphi$  ситуация будет меняться таким образом, что результаты на рис. 9 и 10 поменяются местами.

На рис. 11 приведены результаты расчетов зависимости расхода охладителя от угла  $\varphi$  ориентации главных осей  $O\xi$  и  $O\eta$  тензора проницаемости. Видно, что расход увеличивается с приближением оси  $Or$  к главной оси с большим значением компонента тензора проницаемости.

Отметим интересное поведение профиля давления  $p(r, \theta)$  фильтрации внутри пористого тела и компонентов  $u_r(r, \theta)$ ,  $u_{\theta}(r, \theta)$  вектора скорости фильтрации. Для того же варианта исходных данных на рис. 12–15 представлены профиль давления фильтрации (рис. 12), профили компонентов  $u_r(r, \theta)$  и  $u_{\theta}(r, \theta)$  изотропной неизотермической фильтрации (рис. 13, 14) и профиль продольного компонента  $u_{\theta}(r, \theta)$  вектора скорости анизотропной фильтрации (рис. 15).

Непосредственно на затуплении давление фильтрации монотонно убывает вдоль переменной  $r$  (кривые 1–5 на рис. 12). В конической области (кривая 6) распределение давления фильтрации

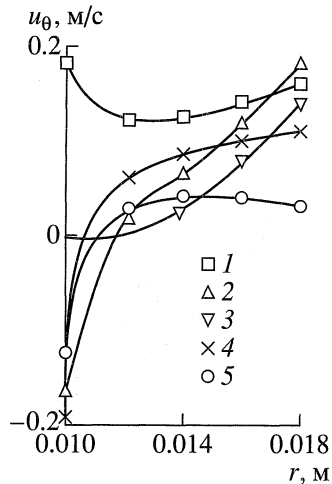


Рис. 15. Поле продольного компонента  $u_\theta(r, \theta)$  скорости анизотропной фильтрации: 1 -  $z = 0$ , 2 -  $z = \pi/9r_{w1}$ , 3 -  $z = 2\pi/9r_{w1}$ , 4 -  $z = 3\pi/9r_{w1}$ , 5 -  $z = 4\pi/9r_{w1}$ , 6 -  $z = 0.2$  м.

имеет точки перегиба. Это связано с тем, что продольный компонент  $u_\theta$  вектора скорости фильтрации на затуплении направлен от линии полного торможения к линии сопряжения затупления и конической области. В окрестности этой линии сопряжения газодинамическое давление  $p_e(\theta)$  возрастает вниз по потоку [40] и компонент  $u_\theta$  в этой окрестности направлен в противоположную сторону (от линии сопряжения к линии полного торможения).

На рис. 13 представлен профиль  $u_r(r, \theta)$  изотропной фильтрации ( $k_\xi = k_\eta$ ), из которого видно, что для изотропной фильтрации компонент  $u_r(r, \theta)$  монотонно убывает с возрастанием переменной  $r$  и всегда положителен. Можно показать, что в анизотропном случае компонент  $u_r(r, \theta)$  качественно ведет себя аналогичным образом. Совсем иное поведение наблюдается для продольного компонента  $u_\theta(r, \theta)$ . Для изотропной фильтрации ( $k_\xi = k_\eta = 10^{-14} \text{ м}^2$ ) зависимость  $u_\theta(r, \theta)$  представлена на рис. 14, а для анизотропной ( $k_\xi = 4 \times 10^{-14} \text{ м}^2$ ,  $k_\eta = 10^{-14} \text{ м}^2$ ) – на рис. 15. В изотропном случае на границе  $w_2$  компонент  $u_\theta$  равен нулю в силу постоянства давления (эта граница является изобарой с  $p = 5 \times 10^5$  Па). Однако в анизотропном случае компонент  $u_\theta$  на границе  $w_2$  не равен нулю, что следует из соотношений

$$\begin{aligned} -u_r &= \left( k_{rr} \frac{\partial p}{\partial r} + k_{r\theta} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right) / \mu_f(T), \\ -u_\theta &= \left( k_{\theta r} \frac{\partial p}{\partial r} + k_{\theta\theta} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right) / \mu_f(T), \end{aligned} \quad (43)$$

в которых для изобары  $k_{\theta\theta} \partial p / r \partial \theta|_{w_2} = 0$ , а  $k_{\theta r} \partial p / \partial r|_{w_2} \neq 0$ .

Кроме этого, в случае изотропной и анизотропной фильтрации зависимость компонента  $u_\theta(r, \theta)$  не монотонна и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Существенная зависимость динамической вязкости охладителя от температуры определяет нелинейный характер закона фильтрации (закона Дарси) относительно скорости фильтрации, поскольку температура пористой среды в значительной степени зависит от скорости фильтрации (невяная нелинейность) [37]. Однако закон Дарси при этом сохраняет свой вид. С увеличением скорости фильтрации в законе фильтрации необходимо учитывать не только градиент статического давления, но и скоростной напор охладителя в капилляре, т.е. полное давление (явная зависимость).

В работе [37] на основе анализа теоретических и экспериментальных данных предложен нелинейный закон анизотропной фильтрации, который затем применен для решения комплексной проблемы анизотропной теплопроводности, анизотропной фильтрации при пленочном охлаждении анизотропных затупленных тел при их аэродинамическом нагреве.

Основой при получении этого закона послужило сравнение распределения давления вдоль капилляра, вычисленное в приближении пограничного слоя, с зависимостью градиента давления от некоторой функции фильтрационного числа Рейнольдса

$$\frac{dp_f}{dx} = \frac{\mu_f u_f}{L^2} f(\text{Re}_L).$$

По Миллионщикову [20], фильтрационное число Рейнольдса имеет вид

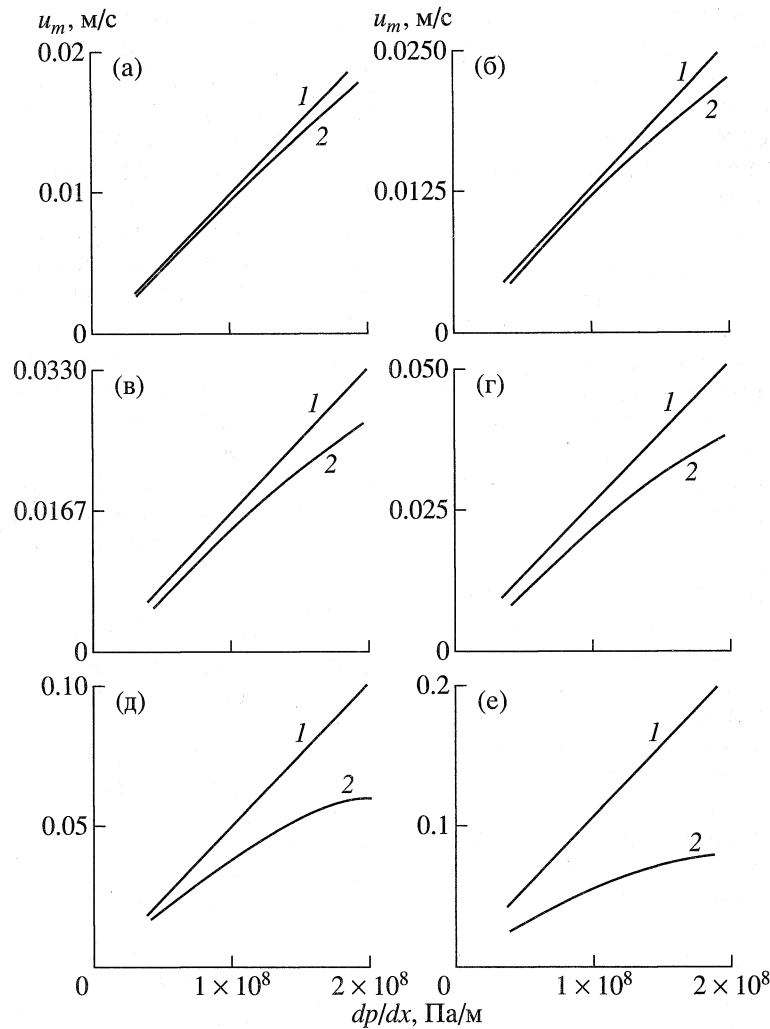
$$\text{Re}_L = \rho_f u_{mf} \sqrt{k} / (\Pi^{3/2} \mu_f), \quad (44)$$

где  $u_m = G/\rho$  – средняя скорость в капилляре в зависимости от секундного расхода  $G$ ;  $L = \sqrt{k}/\Pi$  – характерный линейный размер ( $\Pi$  – пористость). Разлагая функцию  $f(\text{Re}_L)$  в ряд Тейлора по степеням  $\text{Re}_L$  в окрестности  $\text{Re}_L = 0$  и ограничиваясь первыми двумя членами, получим  $f(\text{Re}_L) = f(0) + f'(0)\text{Re}_L$ .

Таким образом,

$$\frac{dp_f}{dx} = \frac{\mu_f \Pi u_{mf}}{k \Pi} \left[ f(0) + \frac{\rho_f u_{mf} \sqrt{k}}{\Pi^{3/2} \mu_f} f'(0) \right]. \quad (45)$$

При малых по сравнению с единицей числах  $\text{Re}_L$  вторым слагаемым в (45) можно пренебречь, в результате чего получим линейный закон фильтрации, для которого  $f(0) = 1$ . Из сравнения (45) с решением задачи о течении в капилляре получаем, что  $f'(0) = \Pi$ , в результате  $f(\text{Re}_L) = \exp(\Pi \text{Re}_L)$ , поскольку как раз для этой функции выполняются



**Рис. 16.** Сравнение линейной 1 и нелинейной 2 скоростей фильтрации в зависимости от градиента давления и динамической вязкости: а –  $\mu = 10 \times 10^{-5}$  кг/м с, б –  $8 \times 10^{-5}$  кг/м с, в –  $6 \times 10^{-5}$  кг/м с; г –  $4 \times 10^{-5}$  кг/м с, д –  $2 \times 10^{-5}$  кг/м с, е –  $1 \times 10^{-5}$  кг/м с.

ся условия  $f(0) = 1, f'(0) = \Pi$  и нелинейный закон фильтрации приобретает вид

$$-\frac{dp_f}{dx} = \frac{\mu_f u_{mf}}{k} (1 + \Pi Re_L)$$

или в более обычной форме

$$u_{mf} = -\frac{k}{\mu_f(T)(1 + \Pi Re_L)} \frac{dp_f}{dx}. \quad (46)$$

Из (46) видно, что увеличение числа  $Re_L$ , в частности скорости  $u_{mf}$ , входящей в  $Re_L$ , сопровождается уменьшением той же скорости  $u_{mf}$ , стоящей в левой части (46), т.е. наблюдается явная нелинейность относительно скорости  $u_{mf}$ . Таким образом, нелинейность закона, связанная с учетом инерционных членов, увеличивает коэффициент динамической вязкости и, следовательно, уменьшает скорость фильтрации, а, с другой стороны, увеличение градиента давления в (46) ведет к возраста-

нию скорости фильтрации и числа  $Re_L$ , что, в свою очередь, уменьшает скорость фильтрации.

Сравнение нелинейного закона (46) с законом Дарси в скалярной форме позволяет записать аналогичный закон в векторно-матричной форме для анизотропных сред в виде

$$\mathbf{V}_f = -\frac{K}{\mu_f(T)(1 + \Pi Re_L)} \text{grad } p_f. \quad (47)$$

Здесь  $K$  – тензор проницаемости пористой среды;  $Re_L = \rho_f \sqrt{\|K\|} |V_f| / \Pi^{3/2} \mu_f, \|K\| = \max\{k_x, k_y, k_z\}$ . Из (47) линейный закон Дарси получается при малых по сравнению с единицей значениях слагаемого  $Re_L$ .

На рис. 16 представлены результаты сравнительного анализа зависимости средней скорости фильтрации от градиента давления для линейного и нелинейного законов. Из рисунка видно, что не-

линейность закона фильтрации начинает оказывать влияние при значениях динамической вязкости начиная от  $\mu_f = 8 \times 10^{-5}$  кг/м с и ниже при градиенте давления, равном значению  $1.7 \times 10^8$  Па/м. При уменьшении вязкости до значения  $10^{-5}$  кг/м с величина градиента давления, при котором необходимо учитывать нелинейность фильтрации, составляет  $\sim 0.3 \times 10^8$  Па/м.

В работе [41] исследована двухтемпературная модель фильтрации в условиях сопряженного теплообмена. В этих условиях фильтрующийся компонент и каркас имеют различные температуры, что приводит к внутривязкому теплообмену. Показано, что интенсивность внутривязкого теплообмена при определенных условиях может превышать интенсивность теплообмена на границе пограничного слоя и тела.

*Выводы по разделу:*

1. При анализе совместного теплообмена и фильтрации в анизотропных телах на температурное поле оказывают влияние многие параметры теплопроводности и фильтрации. Однако наибольшее влияние оказывают компоненты массовых скоростей фильтрации, временные и теплофизические характеристики (в частности числа Фурье), глубина расположения точек относительно границ тела. При этом влияние фильтрации на температурное поле может оказаться существенным (до 35%) для линейных скоростей, не превышающих 1 м/с, причем в анизотропных телах трудно выделить главное координатное направление так, как это делается в изотропных телах, когда процесс фильтрации часто сводится к одномерному случаю.

2. Исследование совместной теплопроводности и фильтрации в анизотропных телах позволило установить, что если теплопроводность характеризуется тензором теплопроводности, то фильтрация в таких телах должна характеризоваться тензором проницаемости. Для подавляющего числа естественных и искусственных материалов ориентация главных осей тензоров теплопроводности и проницаемости совпадают. Таким образом, процесс неизотермической фильтрации должен описываться многомерными уравнениями, содержащими смешанные производные от ее потенциала, в качестве которого чаще всего принимается давление фильтрации.

3. При исследовании совместного многомерного теплообмена в анизотропных телах сложной формы (таких, как затупленные носовые части гиперзвуковых летательных аппаратов) теплопроводность полагается нестационарной, а фильтрация – квазистационарной. Оказалось, что компоненты вектора скорости фильтрации качественно ведут себя по-разному, а именно: если радиальный компонент имеет только положительные значения, то продольный компонент, имея примерно те же

абсолютные значения, меняет свой знак в зависимости от местоположения узлов (этот факт имеет место не только для анизотропной, но и многомерной изотропной неизотермической фильтрации). Кроме этого, интересно отметить, что если в изотропной многомерной фильтрации на изобарной границе тела продольный компонент вектора скорости фильтрации равен нулю, то в условиях анизотропной фильтрации этот компонент отличен от нуля и может принимать различные знаки.

4. Анализ тепловой защиты от аэрогазодинамического нагрева затупленных тел на основе фильтрации “сверхтекучих” жидкостей с образованием защитной жидкой пленки при постоянном давлении на внутренней границе показал, что такую тепловую защиту целесообразно применять только для затупления, где важно сохранить геометрию тела, и нецелесообразно – для боковых поверхностей, где наблюдается значительный расход охладителя из-за большего перепада давления на боковых поверхностях. При использовании “сверхтекучих” жидкостей, у которых динамическая вязкость уменьшается на три-четыре порядка при повышении температуры примерно на 200 градусов можно получить автоматическое регулирование подачи охладителя в местах изменения тепловых потоков и температур. Такую систему тепловой защиты можно построить и при разработке гидравлических подшипников и других трущихся поверхностей.

5. Существенная зависимость динамической вязкости фильтрующегося компонента от температуры, с одной стороны, неявно делает закон фильтрации Дарси нелинейным, а с другой стороны, за счет увеличения скорости фильтрации необходимо учитывать не только градиент статического давления, но и градиент динамического давления. С учетом этого предложен нелинейный закон изотропной и анизотропной фильтрации, который при малых фильтрационных числах Рейнольдса принимает форму закона Дарси. Сравнительный анализ линейного и нелинейного законов фильтрации в широком диапазоне изменения градиента давления и динамической вязкости показал, что неучет градиента динамического давления может приводить к существенному завышению скорости фильтрации.

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

В связи с недостаточной изученностью и крайне малым количеством публикаций по теории теплопроводности анизотропных тел моделирование сопряженных и совместных задач теплообмена для таких тел может приводить к принципиальным ошибкам. Поэтому при исследовании теплового

состояния анизотропных тел исключительно важными являются аналитические решения задач теплопроводности с тензором теплопроводности (их количество не превышает десятка).

Естественно, наличие смешанных производных в дифференциальных уравнениях накладывает серьезные ограничения на используемые методы, из которых применимыми оказываются только интегральные. Первыми работами по аналитическому исследованию теплового состояния анизотропных тел были работы [1–6, 11]. Более поздними публикациями по аналитическому исследованию теплового состояния анизотропных тел являются работы автора [42–45].

В [1] получено одно из первых аналитических решений нестационарной анизотропной теплопроводности в двумерном полубесконечном теле с разрывными граничными условиями первого рода (на границе задана температура), исследовано влияние на температурное поле отдельных компонентов тензора теплопроводности (в работе при тщательной проверке обнаружена ошибка принципиального характера). В [4] сделана попытка классификации задач анизотропной теплопроводности с позиций значений компонентов тензора теплопроводности. При этом вне классификации остались различные сопряженные и совместные задачи теплообмена, в которых составным элементом является анизотропная теплопроводность.

В [4, 5] получены аналитические решения задач теплопроводности в полых и сплошных анизотропных цилиндрах с граничными условиями в виде кусочно-постоянной температуры границы вдоль оси тела. На основе анализа этих решений сделано заключение о том, что диагональные миноры первого и второго порядков матрицы теплопроводности являются ответственными за уровень температур в соответствующих координатных направлениях. К ним относятся:  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{33}$ ,  $\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2$ ,  $\lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}^2$ ,  $\lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2$ . Внедиагональные элементы и миноры второго порядка  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{23}$ ,  $\lambda_{11}\lambda_{23} - \lambda_{12}\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{12}\lambda_{23} - \lambda_{22}\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{32}\lambda_{13}$  определяют сдвиг распределения температур от симметричного к асимметричному.

В работах [44, 45] проанализированы нестационарные двумерные и трехмерные температурные поля в анизотропных пластинах и оболочках на основе полученных аналитических решений. Впервые было обнаружено, что в окрестности начального момента времени  $t = 0$  входящие в решения функциональные ряды расходятся и распределение температур в начальные моменты времени формируется таким образом, что в дальнейшие моменты времени не соблюдается принцип максимума, являющийся в задачах теплообмена следствием первого начала термодинамики.

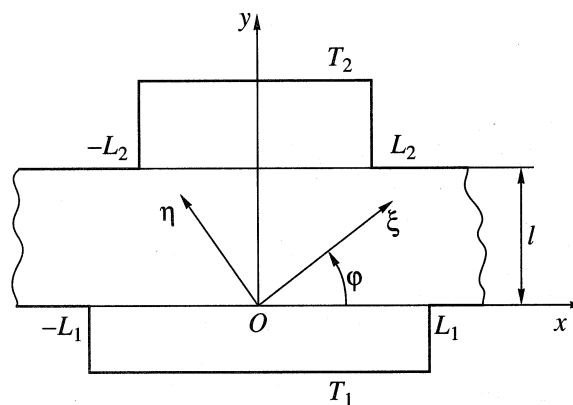


Рис. 17. Расчетная схема.

В перечисленных выше работах зарубежных авторов этот факт не исследовался, однако без решения вопроса о сходимости функциональных рядов в окрестности начального момента времени невозможно по готовому аналитическому решению адекватно вычислить значения температур в дальнейшие моменты времени. В работе [44] эта проблема решена следующим образом.

Для начально-краевой задачи теплопроводности в двумерной анизотропной пластине (рис. 17)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$0 < y < l, \quad t > 0,$$

$$T(x, 0, t) = \begin{cases} T_1, & |x| \leq L_1, \quad y = 0, \quad t > 0 \\ 0, & |x| > L_1, \quad y = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

$$T(x, l, t) = \begin{cases} T_2, & |x| \leq L_2, \quad y = l, \quad t > 0 \\ 0, & |x| > L_2, \quad y = l, \quad t > 0, \end{cases}$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq l, \quad t = 0$$

в работе [42] получено аналитическое решение

$$T(x, y, t) = \frac{T_1}{2} \int_0^t F_1(y, \tau) \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L_1 + my - x}{2\sqrt{q\tau}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{L_1 - my + x}{2\sqrt{q\tau}} \right) \right] d\tau + \frac{T_2}{2} \int_0^t F_2(y, \tau) \times \quad (48)$$

$$\times \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L_2 + m(y-l) - x}{2\sqrt{q\tau}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{L_2 - m(y-l) + x}{2\sqrt{q\tau}} \right) \right] d\tau,$$

где

$$F_1(y, \tau) = \begin{cases} \frac{2\pi}{k^2 l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{k^2 l^2} \tau\right), & 0 < y < l \\ \delta(\tau) = \delta(\tau - 0), & y = 0 \\ 0, & y = l, \end{cases}$$

$$F_2(y, \tau) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{k^2 l^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{k^2 l^2} \tau\right), & 0 < y < l \\ 0, & y = 0 \\ \delta(\tau) = \delta(\tau - 0), & y = l, \end{cases}$$

$$k^2 = c\rho/\lambda_{11}, \quad m = \lambda_{12}/\lambda_{22}, \quad q = \frac{\lambda_{\xi}\lambda_{\eta}}{c\rho\lambda_{22}},$$

$$\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \exp(-s^2) ds,$$

из которого видно, что при  $\tau \rightarrow 0$  экспоненты в функциональных рядах  $F_1(y, \tau)$  и  $F_2(y, \tau)$  стремятся к единице, а сами ряды при больших номерах гармоник  $n$  могут принимать большие, колеблющиеся из-за наличия синусов значения, не стремясь к нулю (к начальному значению), хотя интегралы в (48) при  $t = 0$  формально равны нулю.

Если в окрестности  $t = 0$  выделить малый промежуток времени  $[0, t^*]$ , определяемый из условия равенства по абсолютной величине единице функций ошибок, то внутри этого промежутка можно аналитически вычислить интегралы, входящие в решение (48). Известно [15], что  $\operatorname{erf}(x) = 1$  с точностью до  $10^{-4}$  уже при значении аргумента  $x = 4$ . Тогда, положив в выражениях  $\operatorname{erf}(A) = 1$  и  $\operatorname{erf}(-A) = -1$  значения  $A = 100$  и более, что имеет место при очень малых  $\tau$ , можно вычислить  $t^*$  следующим образом:

$$t^* = \min(t_1^*, t_2^*), \quad t_1^* = (L_1 \pm m y \mp x)^2 / 4 \times 10^4 q,$$

$$t_2^* = (L_2 \pm m(y-l) \mp x)^2 / 4 \times 10^4 q.$$

На промежутке  $t \in [0, t^*]$  выражения в квадратных скобках в решении (48)

$$B_1 = \operatorname{erf}\left(\frac{L_1 + m y - x}{2\sqrt{q\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{L_1 - m y + x}{2\sqrt{q\tau}}\right),$$

$$B_2 = \operatorname{erf}\left(\frac{L_2 + m(y-l) - x}{2\sqrt{q\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{L_2 - m(y-l) + x}{2\sqrt{q\tau}}\right)$$

принимают одно из постоянных значений множества  $\{0; +1; +2\}$ . В результате на промежутке  $t \in (0, t^*)$  решение (48) принимает вид

$$T(x, y, t) = \frac{T_1}{2} \frac{2\pi}{k^2 l^2} B_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) n \frac{k^2 l^2}{n^2 \pi^2} \times \\ \times \left[ 1 - \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{k^2 l^2} t\right) \right] + \frac{T_2}{2} \left(-\frac{2\pi}{k^2 l^2}\right) B_2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \times \\ \times \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \frac{k^2 l^2}{n^2 \pi^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{k^2 l^2} t\right) \right].$$

На промежутке  $t \in (t^*, t)$  вычисление интегралов в (48) осуществляется с помощью численных квадратур, например, с помощью квадратуры Симпсона.

Аналитическое решение (48) позволило проанализировать нестационарные двухмерные температурные поля в анизотропных пластинах [44], а в [45] – нестационарные температурные поля в трехмерных пластинах. На рис. 18 приведены распределения температур в анизотропной пластине в зависимости от угла  $\varphi$  ориентации главных осей  $O\xi, O\eta$  тензора теплопроводности при фиксированных значениях  $\lambda_{\xi} = 0.035$  кВт/м К и  $\lambda_{\eta} = 0.065$  кВт/м К. Остальные исходные данные принимали следующие значения:  $L_1 = L_2 = l = 0.02$  м;  $c\rho = 1000$  кДж/м<sup>3</sup> К;  $T(x, y, 0) = 300$  К;  $T_1 = 500$  К;  $T_2 = 400$  К. В ортотропном случае (рис. 18а при  $\varphi = 0^\circ$  и рис. 18г при  $\varphi = 90^\circ$ ) наблюдается симметрия изотерм относительно оси  $y$ . При увеличении угла  $\varphi$  изотермы отклоняются от оси симметрии в сторону главной оси с большим значением главного коэффициента теплопроводности  $\lambda_{\eta}$ . При этом изотерма  $T = 400$  К (штриховая линия) разграничивает изотермы с  $T > 400$  К, расположенные в центральной части пластины, и изотермы  $T < 400$  К, расположенные на периферии. В случае большой степени анизотропии  $\lambda_{\eta}/\lambda_{\xi} \sim 100$  этого не наблюдается.

На рис. 19 представлены результаты расчета прогрева анизотропной пластины при  $\lambda_{\xi} = 0.01$  кВт/м К,  $\lambda_{\eta} = 2.0$  кВт/м К. Остальные данные те же, что и для результатов, представленных на рис. 18. Для ортотропного случая ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda_{11} = \lambda_{\xi}$ ,  $\lambda_{22} = \lambda_{\eta}$ ,  $\lambda_{12} = 0$ ), представленного на рис. 19а, температурное поле локализовано в области  $|x|/L_1 < 1$ , распределение температуры линейно по переменной  $y$ , а именно:  $T(x, y, \infty) = T_1 + (T_2 - T_1)y/l$ ; в области  $1 < |x|/L_1 < 1.15$  значения температуры не превышают 301 К, а при  $|x|/L_1 > 1.3 - 300.01$  К (при начальной температуре, равной 300 К). Таким образом, благодаря низкому значению компонента  $\lambda_{11}$  тензора теплопроводности по сравнению с  $\lambda_{22}$  глубина прогрева в продольном направлении не превышает  $0.3L$ , при отсчете от линии  $|x| = L_1$ .

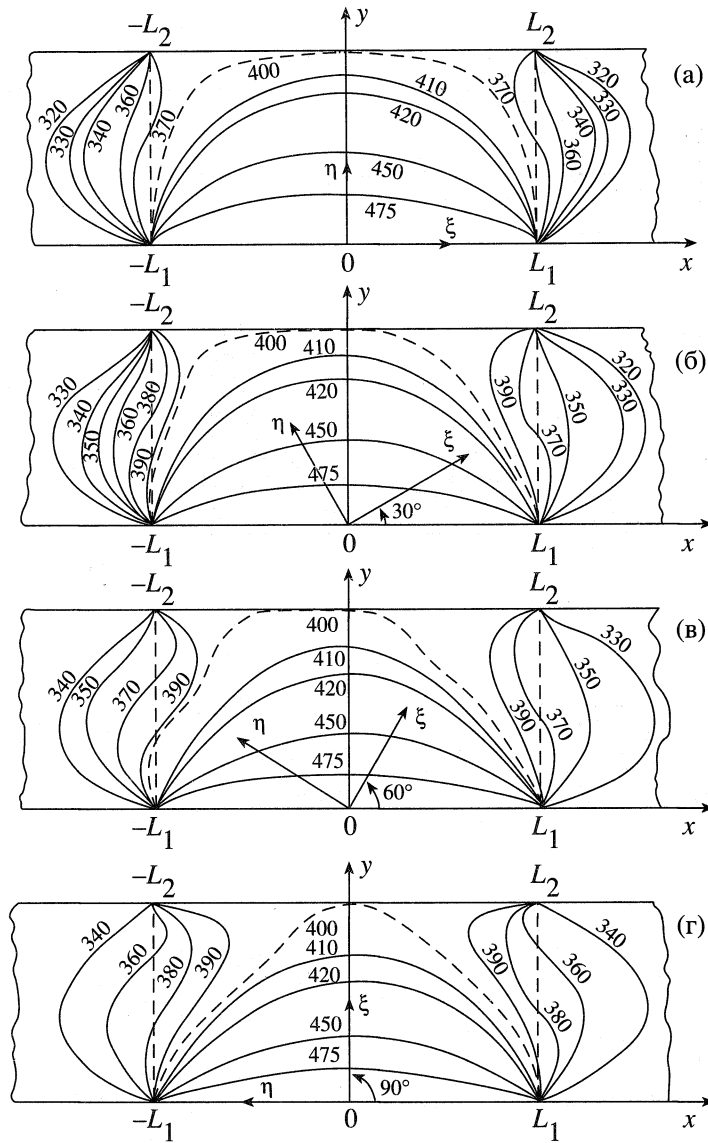


Рис. 18. Температурные поля при  $\lambda_\xi = 0.035$  кВт/м К,  $\lambda_\eta = 0.065$  кВт/м К: а –  $\varphi = 0^\circ$ , б –  $\varphi = 30^\circ$ , в –  $\varphi = 60^\circ$ , г –  $\varphi = 90^\circ$ .

Такой вариант ориентации главных осей тензора теплопроводности можно использовать для разработки тепловых аккумуляторов.

Для ортотропного случая  $\varphi = 90^\circ$  (рис. 19г), напротив, изотермы сильно вытянуты в продольном направлении и происходит значительный отток тепла в этом направлении. Такую ориентацию главных осей тензора теплопроводности можно использовать для охлаждения изделий. При этом в окрестности центральной точки пластины имеет место седловая точка.

Отметим, что при  $\varphi > 30^\circ$  наблюдается интересный случай, когда граничная изотерма с меньшей температурой “отрывается” от границы (изотерма  $T_2 = 400$  К на рис. 19в изображена штриховой линией) и начинает двигаться внутрь расчетной области. На границе  $y = l$  изотерма  $T_2 = 400$  К сохра-

няет прежнее положение. Появляется двухсвязная область прогрева. Одна область ограничена неподвижной граничной изотермой  $T_1 = 500$  К (с большей температурой) и подвижной изотермой (штриховая линия) со значением температуры, равным меньшему граничному значению. Вторая область ограничена неподвижной изотермой на границе с меньшим значением граничной температуры ( $T_2 = 400$  К) и подвижной изотермой с тем же значением температуры. Этот случай возможен, если на границах  $y = 0$  и  $y = l$  заданы различные значения температур и степень анизотропии  $\lambda_\eta/\lambda_\xi$  очень велика,  $\sim 100$ .

*Выводы по разделу:*

1. Качественное исследование температурных полей, полученных на основе аналитических решений, показывает, что диагональные миноры

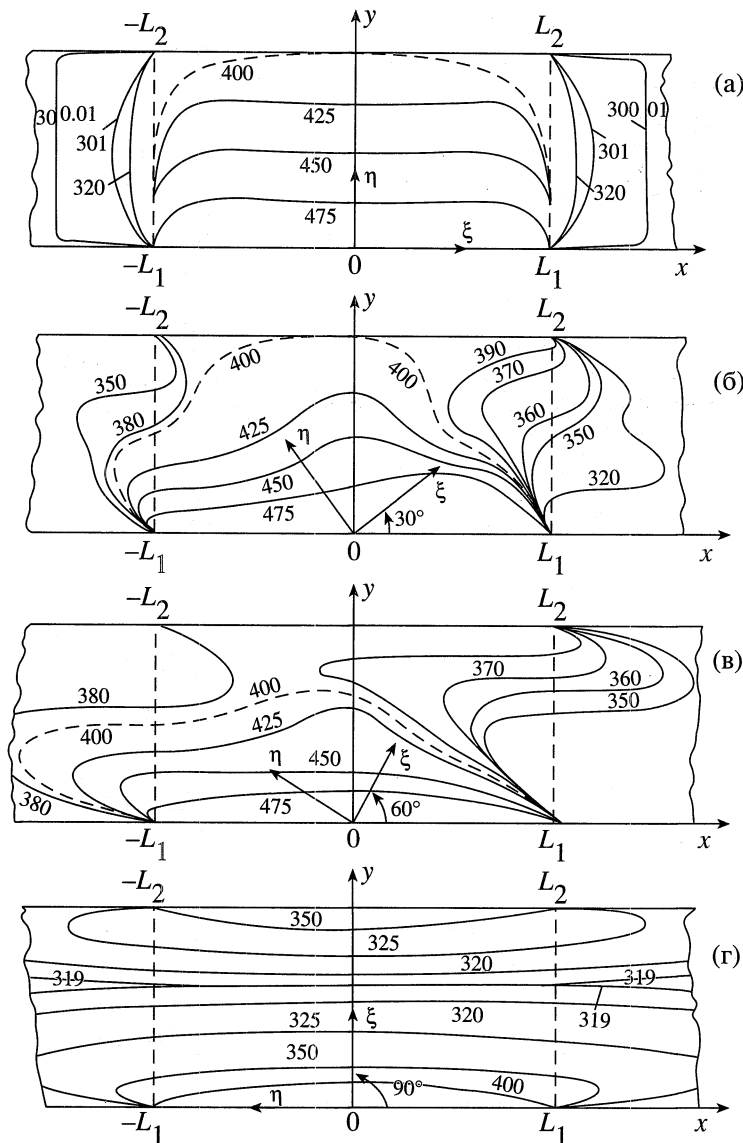


Рис. 19. Температурные поля при  $\lambda_\xi = 0.01$  кВт/м К,  $\lambda_\eta = 2$  кВт/м К: а –  $\varphi = 0^\circ$ , б –  $\varphi = 30^\circ$ , в –  $\varphi = 60^\circ$ , г –  $\varphi = 90^\circ$ .

первого и второго порядков матрицы (тензора) теплопроводности ответственны за увеличение температуры в соответствующих координатных направлениях по сравнению с изотропным случаем, а внедиагональные миноры – за отклонение температурных профилей от оси симметрии изотропного случая.

2. При исследовании готовых аналитических решений задач нестационарной анизотропной теплопроводности появляется особенность в окрестности начального момента времени, приводящая к неадекватности аналитического решения в дальнейшие моменты времени. Это характерно не только для нестационарных задач анизотропной теплопроводности, но и для соответствующих задач изотропной теплопроводности. Эту особен-

ность удается ликвидировать введением малого начального участка времени, внутри которого аналитическое решение вычисляется с помощью точных квадратур.

3. Исследование результатов аналитических решений позволило установить, что при определенных ориентациях главных осей тензора теплопроводности анизотропные материалы можно рассматривать как мощные аккумуляторы тепловой энергии, а также как проводники тепловой энергии в определенных направлениях. Кроме этого, в условиях значительной степени анизотропии ( $\lambda_\eta/\lambda_\xi \sim 100$ ) температурное поле расслаивается, граничные изотермы могут отходить от границ и двигаться внутри расчетной области.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00110, 2001 г.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пэдовен Д. Нестационарное распределение температур в анизотропном полупространстве // РТК. 1973. № 4. С. 174.
2. Пэдовен Д. Обобщенный метод Штурма–Лиувилля решения нестационарной теплопередачи в анизотропной композиционной среде // РТК. 1974. № 8. С. 190.
3. Пунь К.Ц., Цзоу Р.Ц., Чжан Ю.П. Решение анизотропных задач первого класса методом преобразования координат // Теплопередача. 1973. № 2. С. 177.
4. Чжан Ю.П., Цзоу Р.Ц. Теплопроводность в анизотропной среде, однородной в цилиндрических областях. Нестационарный режим // Теплопередача. 1977. № 1. С. 42.
5. Чжан Ю.П., Пунь К.Ц. Трехмерная установившаяся теплопроводность в цилиндрах из материала с анизотропией свойств общего вида // Теплопередача. 1979. № 3. С. 203.
6. Лыков А.В., Колпащиков В.Л. Об эффектах анизотропии переноса тепла в потоках жидкостей и газов // ИФЖ. 1973. Т. 25. № 4. С. 72.
7. Формалев В.Ф. Метод численного решения многомерных задач анизотропной теплопроводности. В сб.: Тепловое проектирование систем. М.: Изд-во МАИ, 1990. С. 21.
8. Формалев В.Ф., Мартыхина Т.Ю. Исследование нелинейной анизотропной фильтрации при пленочном охлаждении летательных аппаратов // Вестн. МАИ. 1996. Т. 3. № 2. С. 48.
9. Галицкий Б.М., Совершенный В.Д., Формалев В.Ф., Черный М.С. Тепловая защита лопаток турбин. М.: Изд-во МАИ, 1996. 356 с.
10. Формалев В.Ф., Мартыхина Т.Ю., Тюкин О.А. Пакет прикладных программ численного решения задач сопряженного теплообмена при пленочном охлаждении анизотропных тел // Вычислительные технологии. 1993. Т. 2. № 6. С. 73.
11. Коляно Ю.М. Определение температурных полей в тонких анизотропных пластинах // Докл. АН БССР. 1970. Т. 14. № 1.
12. Ким Л.В., Миков В.Л. Решение задач нестационарной теплопроводности в анизотропных средах: М., 1986. – Деп. в ВИНТИ. № 642–В86. 22 с.
13. Чепрасов А.И. Математическое моделирование теплового состояния анизотропного материала в области дефекта структуры. М., 1985. – Деп. в ВИНТИ. № 7001–В 85. 19 с.
14. Берцун В.Н., Крицкий О.Л. К вопросу о математическом моделировании тепловых полей в средах с анизотропной теплопроводностью. В сб.: Математическое моделирование и теория вероятностей. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1998. С. 12.
15. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
16. Формалев В.Ф. Численное моделирование двумерных нелинейных задач теплопроводности в анизотропных телах // ТВТ. 1988. Т. 25. № 6. С. 1122.
17. Формалев В.Ф. О краевых условиях в сопряженных задачах пограничного слоя и теплопроводности в анизотропных телах. В сб.: Математические методы механики жидкости и газа. Днепропетровск: Изд-во Днепропетровск. гос. ун-та, 1986. С. 80.
18. Формалев В.Ф., Голованов В.А. Исследование сопряженного теплообмена между пограничным слоем и телами с анизотропией свойств // ТВТ. 1999. Т. 37. № 5. С. 772.
19. Лыков А.В., Алексащенко А.А., Алексащенко В.А. Сопряженные задачи конвективного теплообмена. Минск: Изд-во БГУ, 1971.
20. Лыков А.В. Тепломассообмен. Спр. М.: Энергия, 1978.
21. Никитенко Н.И. Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. Киев: Наукова думка, 1988.
22. Формалев В.Ф. Безытерационный метод численного решения сопряженных задач пограничного слоя и анизотропной теплопроводности // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 6. С. 35.
23. Дорренс У.Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Мир. 1966.
24. Ho C.Y., Pawell R.W., Liley P.E. Thermal Conductivity of Selected Materials. Washington: U.S. Government Printing Office. 1968. P. 129.
25. Формалев В.Ф. Анализ двумерных температурных полей в анизотропных телах с учетом подвижных границ и большой степени анизотропии // ТВТ. 1990. Т. 28. № 4. С. 715.
26. Струминский В.В., Довгаль А.В., Лебедев Ю.Б. и др. Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости пограничного слоя при неравномерном нагреве поверхности: Препринт № 3–87. Новосибирск: ИПТМ АН СССР, 1987. 22 с.
27. Казаков А.В., Коган М.Н., Купарев В.А. Затягивание ламинарно-турбулентного перехода с помощью интенсивного локального нагрева поверхности вблизи передней кромки пластины // ТВТ. 1996. Т. 34. № 1. С. 46.
28. Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1.
29. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые тела. М.: Гостехиздат, 1960.
30. Лыков А.В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: Мир, 1954.
31. Развитие исследования по теории фильтрации в СССР / Под ред. Лыкова А.В. М.: Наука, 1969.
32. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964.
33. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976.
34. Мирзаджензаде А.Х. О законе фильтрации газа в пористой среде // Докл. АН СССР. Сер. Математическая физика. 1969. Т. 184. № 4. С. 797.

35. *Формалев В.Ф.* Влияние фильтрации на двумерное температурное поле в анизотропных телах. В сб.: Методы математической физики и задачи механики сплошных сред. М.: Изд-во МАИ, 1988. С. 7.
36. *Формалев В.Ф.* Численное исследование сопряженного теплообмена в условиях фильтрации и пленочного охлаждения анизотропных тел // ТВТ. 1992. Т. 30. № 2. С. 334.
37. *Формалев В.Ф.* Моделирование нелинейной неизо-термической фильтрации в условиях пленочного охлаждения анизотропных тел // ТВТ 1997. Т. 35. № 2. С. 286.
38. *Боровой В.Я.* Приближенный расчет пленочного охлаждения // Тр. ЦАГИ. 1969. С. 1108.
39. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
40. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975.
41. *Поляков А.Ф., Ревизников Д.Л.* Влияние теплога-зодинамического напряжения транспираторного охлаждения на его эффективность // Теплоэнергетика. Т. 2. С. 149. 2001. № 5.
42. *Формалев В.Ф., Москаленко А.А.* Аналитическое решение двумерной нестационарной задачи теплопроводности для анизотропной полосы // ИФЖ. 1989. Т. 56. № 1. С. 153.
43. *Формалев В.Ф., Москаленко А.А.* Аналитическое решение трехмерной нестационарной задачи теплопроводности с тензором теплопроводности // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 7. С. 1277.
44. *Формалев В.Ф., Тюкин О.А.* Исследование температурных полей на основе аналитического решения двумерной задачи анизотропной теплопроводности // ТВТ. 1994. Т. 32. № 4. С. 518.
45. *Формалев В.Ф., Тюкин О.А.* Исследование трех-мерной нестационарной теплопроводности в ани-зотропных телах на основе аналитического реше-ния // ТВТ. 1998. Т. 36. № 3. С. 521.