

О численном моделировании биомеханических процессов в медицинской практике

И.Б. Петров

Аннотация. В работе рассматривается общий подход к численному моделированию физиологических и патологических процессов в организме человека, а также некоторых хирургических операций.

Введение

Численное изучение физиологических и патологических процессов, происходящих в организме человека, представляется в настоящее время одним из самых актуальных и перспективных направлений в научных исследованиях. Очевидно, что современная медицина является чисто экспериментальной наукой, способной произвести констатации фактов и рекомендовать средства (операционные, медикаментозные) для ослабления патологических процессов. Что же касается построения математических моделей функционирования тех или иных органов, как нормальных, так и патологических, необходимых для изучения протекания и развития процессов, то эта проблема остается почти открытой. Хотя представляется очевидным тот факт, что изучать функционирование органов в условиях как нормальных, так и патологических, сравнивая эти процессы, необходимо для прогнозирования их развития, предсказания последствий патологии и выдачи медицинских рекомендаций.

При численном моделировании рассматриваемых процессов возникают такие задачи, как построение адекватных реологических моделей, разработка численных методов, способных учитывать специфику процессов (их динамический характер, большие градиенты решения, конечные деформации, непрямоугольные области интегрирования).

По-видимому, наиболее трудной проблемой при изучении рассматриваемых процессов является экспериментальная верификация расчетных данных вследствие отсутствия соответствующих экспериментов. Более того, одна из главных целей работы - изучение тех процессов, по которым эти данные отсутствуют. По этой причине и появились предложения со стороны медицинских специалистов численно промоделировать те процессы, которые возможно изучать только на этом уровне (виртуальные офтальмологические операции, черепно-мозговые травмы, деформация сердечной мышцы). Проводились качественные и, в определенной степени, количественные сравнения с результатами операций и последствий черепно-мозговых травм. Так, рассчитанные места локализации возможных повреждений элементов глаза хорошо согласуются с реальной медицинской практикой (проводились сравнения с данными хирургической практики Центра микрохирургии глаза им. Федорова). Локализация мозговых повреждений, по данным Института скорой помощи им. Склифосовского (отдел нейрохирургии), при затылочных ударах, а также в лобной части мозга была получена в работе путём численного моделирования. В задаче о деформации сердца

экспериментальные данные (поведение границ сердца по времени) являлись граничными условиями, и целью моделирования этого процесса было численное получение полей скоростей, напряжений, деформаций внутри сердечной мышцы, что представляется весьма трудной экспериментальной проблемой. В расчете наблюдалось соответствие с результатами операций, последствиями травм; численные методы и алгоритмы были многократно протестированы при решении задач из других приложений, в которых использовались аналогичные реологические модели. Отметим, что аналоги численного решения задач об офтальмологических операциях и черепно-мозговых травмах автору неизвестны. Подробный обзор работ по математическому моделированию биоэлектрической активности сердца приведен в [13], численному же моделированию деформационных процессов в сердечной мышце в приближении механики сплошных сред посвящено весьма ограниченное число работ (например, [14-16]).

Для математического моделирования динамического поведения биомеханических сред используется система уравнений динамики деформируемой среды [1, 17, 18], для численного решения соответствующей нестационарной системы уравнений в частных производных реализован сеточно-характеристический метод [2,3], учитывающий особенности процессов распространения волн в сплошных средах, а также гибридные сеточно-характеристические схемы [8, 9]. Этот метод многократно опробован и протестирован на решении различных динамических задач механики сплошных сред [19-27] и сейчас успешно применяется для численного решения задач биомеханики; например, в [28, 29] разработан подход к реализации виртуальных медицинских операций в областях офтальмологии и литотрипсии (удаление почечных камней без полостной операции). Представление о физиологических процессах базируется, в основном, на описании процессов в [4,5] и др. Автором предлагается общий подход к численному моделированию процессов в организме человека на основе системы уравнений динамики сплошных сред и современных численных методов их решения.

1. Математическая модель деформируемой биосреды

В зависимости от условий динамического деформирования (нагружения) и от реологии материала в механике деформируемого твердого тела существуют различные замкнутые математические модели, среди которых важное место занимают те, которые описываются системами уравнений гиперболического типа, и прежде всего – модели линейной и нелинейной теории упругости и вязкоупругости.

В тензорной форме используемая система двумерных динамических уравнений имеет вид

$$\rho \dot{v}^i = \nabla_j \sigma^{ij} + F_{ij}, \quad \dot{\sigma}_{ij} = q_{ijkl} \nabla_k v_l, \quad \rho \dot{U} = \sigma_{ij} \epsilon^{ij} + \rho Q, \quad i, j = 1, 2,$$

где v_i - компоненты вектора скорости, U - плотность внутренней энергии, $\epsilon_{ij}, \sigma_{kl}$ - компоненты тензоров деформаций и напряжений, ∇_k - ковариантная производная по k-й координате, Q - плотность источников энергии; тензор четвертого ранга q_{ijkl} задается в соответствии с реологией среды. Для модели упруго-идеальнопластической среды

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}), \quad F_{ij} = -\frac{s_{ij}}{\tau_0},$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, λ, μ - постоянные Ламе, k – предел текучести на ед. век., ρ - плотность, S_{ij} - девиатор тензора напряжения, τ_0 - время релаксации, s_{ij} - компоненты девиатора тензора напряжений.

Использовалось матричное представление приведенных уравнений:

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = f(t, \mathbf{u})$, где $\mathbf{u} = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, U\}^T$ – вектор-столбец иско-
мых функций, f – вектор-столбец правых частей, $A_1 A_2$ – квадратные матрицы 7×7 , вид которых
приведен в [2].

2. Метод численного решения

Для аппроксимации динамических уравнений гиперболического типа, описывающих поведение
деформируемой среды, использовалась сеточно-характеристическая схема:

$$\begin{aligned} u_{ml}^{n+1} &= u_{ml}^n + \mathcal{T}_{ml}^n + b_{1ml}^n + b_{2ml}^n \\ b_{1ml}^n &= \tau \left[(\Omega_1^{-1} \Lambda_1^+ \Omega_1)_{ml}^n \frac{(u_{m-1,l}^n - u_{ml}^n)}{h_1} - (\Omega_1^{-1} \Lambda_1^- \Omega_1)_{ml}^n \frac{(u_{m+1,l}^n - u_{ml}^n)}{h_1} \right] \\ b_{2ml}^n &= \tau \left[(\Omega_2^{-1} \Lambda_2^+ \Omega_2)_{ml}^n \frac{(u_{m,l-1}^n - u_{ml}^n)}{h_2} - (\Omega_2^{-1} \Lambda_2^- \Omega_2)_{ml}^n \frac{(u_{m,l+1}^n - u_{ml}^n)}{h_2} \right] \\ \Lambda_j^+ &= \frac{\Lambda_j + |\Lambda_j|}{2}, \Lambda_j^- = \frac{\Lambda_j - |\Lambda_j|}{2}, \Lambda_j = \{\lambda_i^j\}, |\Lambda_j| = \{|\lambda_i^j|\}, j = 1, 2, i = 1, 2, 3, \dots, 7; \end{aligned}$$

λ_i^k – собственные значения матриц $A_k, k = 1, 2$, определяемые из характеристических уравнений
 $\det(A_k - \lambda^k E) = 0$; $\Omega_j = \{\omega_{ik}^j\}$ – неособенные матрицы, строками которых являются линейно
независимые левые собственные векторы ω_i^j матриц A_j , определяемые с точностью до их длины
из совокупности линейных однородных систем уравнений $(A_k^T - \lambda_i^k E) \omega_i^k = 0, i = 1, \dots, 7$; Ω_k^{-1} –
обратные к Ω_k матрицы; A_k^T – транспонированные матрицы A_k . Аналитическое выражение эле-
ментов матриц Ω_k^{-1} аналогично приведенному в [2].

При построении расчетных формул на границах прямоугольной (в координатах $\tilde{t}, \eta_1, \eta_2$) об-
ласти интегрирования ограничимся рассмотрением только верхней ($\eta_2 = 1$) и нижней ($\eta_2 = 0$)
границ, имея в виду, что остальные границы ($\eta_1 = 0, \eta_{1*}$) часто являются плоскостью (или осью)
симметрии или периодичности решения либо выбираются таким образом, чтобы за рассматривае-
мое время $t \leq t_1$ возмущения от неоднородностей в начальных данных не достигали этих границ.
Обобщение на случай более сложных условий на границах $\eta_1 = 0, \eta_{1*}$ не представляет принци-
пальных трудностей и аналогично рассматриваемому ниже.

Умножая полученные разностные соотношения скалярно на собственные векторы $(\omega_i^2)_{ml}^n$, по-
лучаем соотношения

$$(\omega_i^2)_{ml}^n u_{ml}^{n+1} = B_i^2 = (\omega_i^2)_{ml}^n (u_{ml}^n + \mathcal{T}_{ml}^n + b_{1ml}^n) \pm \frac{\tau}{h_2} (\lambda_i^2)_{ml}^n (\omega_i^2)_{ml}^n (u_{m,l \mp 1}^n - u_{ml}^n), \quad l = 0, L,$$

аппроксимирующие с первым порядком точности условия совместности вдоль линий пересечения
характеристических поверхностей системы и координатной плоскости $\eta_1 = \eta_{1m}$ (с уравнениями
 $d\eta_2 = \lambda_i^2 dt$):

$$\omega_i^2 u_i + \lambda_i^2 \omega_i^2 u_{\eta_2} = \omega_i^2 (f - A_1 \eta_1), \quad i = 1, \dots, 7.$$

Как известно, число граничных условий для гиперболической системы уравнений [10] определяется числом отрицательных (положительных) собственных значений матрицы A_2 на верхней (соответственно, нижней) границе области интегрирования. В рассматриваемых ниже задачах на верхней границе $\eta_2 = 1$ имеет место $\lambda_7^2 < \lambda_6^2 < 0$, на нижней границе $\eta_2 = 0$, соответственно, $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > 0$ и, следовательно, на каждой из этих границ требуется постановка двух граничных условий, которые запишем в виде

$$\varphi_i(\tilde{t}, \eta_1, u_1, \dots, u_7) = 0, \quad i = 1, 2 \text{ при } \eta_2 = 0$$

$$\varphi_i(\tilde{t}, \eta_1, u_1, \dots, u_7) = 0, \quad i = 6, 7 \text{ при } \eta_2 = 1,$$

причем необходимо, чтобы $\det \Omega_- \neq 0$, $\det \Omega_+ \neq 0$, где, соответственно,

$$\Omega_- = \left\| \bar{\omega}_1 \quad \bar{\omega}_2 \quad \omega_3^2 \quad \dots \quad \omega_7^2 \right\|^T, \quad \Omega_+ = \left\| \omega_1^2 \quad \dots \quad \omega_5^2 \quad \bar{\omega}_6 \quad \bar{\omega}_7 \right\|^T.$$

Здесь $\bar{\omega}_i = \{\partial \varphi_i / \partial u_1, \dots, \partial \varphi_i / \partial u_7\}$, $i = 1, 2, 6, 7$, а ω_i^2 , $i = 1, \dots, 7$ - собственные векторы матрицы A_2 из [19]. Для рассматриваемых ниже задач граничные условия выбирались полулинейными и после их аппроксимации имели вид

$$\varphi_i = \bar{\omega}_i(\tilde{t}^{n+1}, \eta_{1m}) u_{ml}^{n+1} - g_i(\tilde{t}^{n+1}, \eta_{1m}), \quad i = 1, 2 \text{ при } \eta_2 = 0, \quad i = 6, 7 \text{ при } \eta_2 = 1.$$

Привлекая полученные разностные соотношения при $i = 3, \dots, 7$ для границы $\eta_2 = 0$ и при $i = 1, \dots, 5$ - для границы $\eta_2 = 1$, получаем все необходимые расчетные формулы для точек, принадлежащих этим границам. Для расчета точек, принадлежащих границам $\eta_1 = 0$, $\eta_1 = \eta_*$, использовались обычные расчетные формулы с привлечением дополнительных «лучей» $\eta_1 = -h_1$, ($m = -1$), $\eta_1 = \eta_* + h_1$, ($m = M + 1$), для которых компоненты искомого вектора u определялись по данным внутри области интегрирования с учетом соответствующей симметрии или периодичности решения либо экстраполяцией (в зависимости от типа границы).

Шаг по времени выбирался из условия устойчивости, имеющего вид $\tau \leq \left(\sum_{i=1}^2 h_i^{-1} \max |\lambda_i^j| \right)^{-1}$.

В устойчивых, но не монотонных разностных схемах, в которых на негладких решениях возникают нефизические осцилляции, используются различные способы регуляризации разрывных численных решений, вводимые во всей области интегрирования либо только вблизи разрывов.

Несмотря на все разнообразие реализаций, сущность различных способов регуляризации достаточно проста и в простейших случаях заключается в выборе двух (или более) опорных схем (одна из которых имеет достаточно высокий порядок точности, но является немонотонной и на разрывных решениях осциллирующей, другая положительно определена или близка к ним, но имеет первый порядок точности) и в организации перехода между ними в зависимости от поведения искомого решения. Так же можно трактовать и те разностные схемы, в которых используется явное либо опосредованное введение в схему членов, соответствующих разностной аппроксимации отсутствующих в системах уравнений гиперболического типа четных пространственных производных (v_{xx} , v_{xxxx} и т.п.) с некоторыми малыми коэффициентами при них, что, как давно замечено, оказывает стабилизирующее воздействие на численное решение.

Естественно ожидать, что наилучшие результаты будут при использовании в качестве опорных схем первого порядка аппроксимации с минимальной аппроксимационной вязкостью (которые в сравнении с другими монотонными схемами меньше размазывают фронты разрывов) и схем высо-

кого порядка точности, наиболее близких к схемам с положительной аппроксимацией (среди других схем высокого порядка они дают наименее осциллирующее решение).

Преимущество первого варианта — монотонность и минимальная аппроксимационная вязкость, второго — меньшее размазывание фронтов разрывов. Недостатком в первом случае является растущее со временем, как $t^{1/2}$, «размазывание» фронтов, недостаток второго — осциллирующий характер решения вблизи этих фронтов. Естественный шаг к улучшению численного описания фронтов — реализация некоторой промежуточной схемы. Это можно сделать следующим образом: записать разностную схему в виде:

$$\vec{u}_{ml}^{n+1} = \vec{u}_{ml}^n - \sum_{j=1}^2 \{ \sigma_j \Omega_j^{-1} \Lambda_j \Omega_j \Delta_j \vec{u} - \alpha \sigma_j \Omega_j^{-1} |\Lambda_j| \Omega_j \Delta_j^2 \vec{u} - (1-\alpha) (\sigma_j)^2 \Omega_j^{-1} |\Lambda_j|^2 \Omega_j \Delta_j^2 \vec{u} \}$$

При $\alpha=1$ получим схему первого порядка аппроксимации, при $\alpha=0$ - второго; аналогично, положив $0 < \alpha = \text{const} < 1$, получим некую промежуточную схему (также немонотонную, формально первого порядка аппроксимации), которая при хорошем экспериментальном выборе α позволит улучшить качество численного решения вблизи разрывов. Этот подход описан в работах [8,9].

3. Описание исследуемых физиологических, патологических и операционных процессов

3.1. Математическая модель глаза

Оптическая система глаза (Рис. 1) представляет собой неточно центрированную сложную систему линз, формирующую на сетчатке перевернутое и уменьшенное изображение внешнего мира. Диоптрический аппарат состоит из прозрачной роговицы, передней и задней камер, заполненных водянистой влагой, радужной оболочки, окружающей зрачок, хрусталика, окруженного прозрачной сумкой, и стекловидного тела, занимающего большую часть глазного яблока. Стекловидное тело — это прозрачный гель, состоящий из внеклеточной жидкости с коллагеном и гиалуроновой кислотой в коллоидном растворе. В задней части глаза его внутренняя поверхность выстлана сетчаткой. Промежуток между сетчаткой и плотной склерой, окружающей глазное яблоко, заполнен

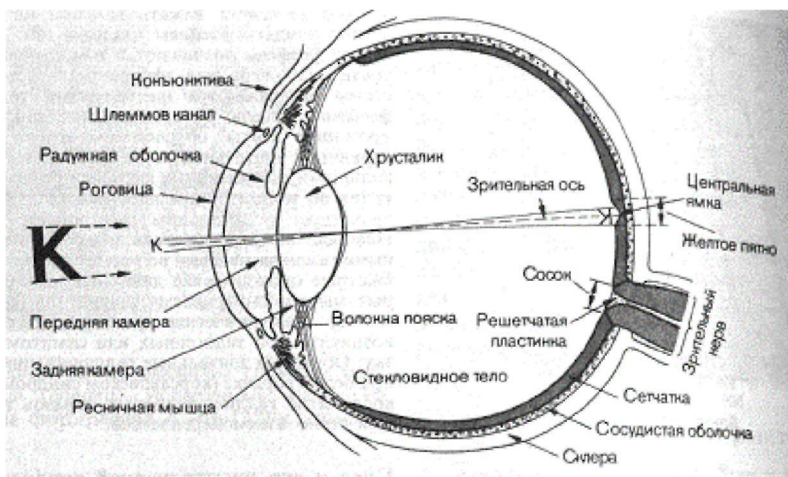


Рис. 1. Схема горизонтального сечения правого глаза

сетью кровеносных сосудов — сосудистой оболочкой. У заднего полюса глаза человека в сетчатке есть небольшое углубление — центральная ямка — место, где острота зрения при дневном освещении максимальна. Диаметр глаза — 2,5 см, толщина хрусталика — 4 мм, расстояние от роговицы до хрусталика — 6 мм.

Элементы глаза моделировались с помощью линейно-упругой модели с выделением в ней четырех различных материалов: склеры, хрусталика, стекловидного тела и роговицы. На границах были поставлены условия отсутствия нормальных напряжений.

Исследовалась картина рас-

пространения акустических колебаний при воздействии ультразвука и лазера на хрусталик. Эти воздействия задаются введением правых частей в используемое динамическое уравнение.

3.2. Постановка задачи о черепно-мозговых травмах

В начале 80-х годов в работах, посвященных биомеханике черепно-мозговых травм, получила распространение гипотеза о противоударном механизме ушибов мозга при закрытых черепно-мозговых травмах. Гипотеза призвана объяснить появление видимых очагов деструкции, кровоизлияний и некрозов, наблюдаемых средствами компьютерной томографии, не только в месте приложения механической силы (область удара), но и на противоположной стороне мозга (области противоудара). Однако единой теории противоударного механизма, которая бы удовлетворительно объясняла большинство клинических случаев, на сегодняшний день нет. Основные продвижения в данной области связаны с *механической* и *кавитационной* теориями. Согласно первой, главным фактором, определяющим степень выраженности и распространенности, а также динамику развития патологического очага в области противоудара, являются «первичные» повреждения, т.е. повреждения, обусловленные непосредственно механическим воздействием в момент удара; вторая отводит определенную роль мозговому кровообращению, вызывающему «вторичные» повреждения в области противоудара, появление которых может растягиваться во времени на периоды 2-10 суток, а может происходить и в течение минут или часов, особенно если имелось повреждение многих сосудов вплоть до полного разрушения их стенки.

Механическая теория ушибов мозга объясняет возникновение очагов поражения по противоударному механизму кинематикой костных пластинок. Согласно этой теории, в момент удара пластинчатая кость в области крыши орбиты, больших и малых крыльев основной кости испытывает значительные деформации (до 1 см.) Совершая возвратное движение, носящее хлопкообразный характер, костная пластина вызывает поражение мозгового вещества. Однако ряд фактов не согласуется с этой теорией. Во-первых, остается неясным, почему у ряда больных при КТ – исследованиях в первые часы после травмы очагов ушибов мозга не обнаруживается, они возникают позже. Кроме того, такие очаги располагаются не только на поверхностях мозга, непосредственно прилегающих к костным пластинкам, но и на их полюсных и конвексительных поверхностях, где граничит с мозгом не пластинчатая, а губчатая кость, которая при травме таких колебательных движений не совершает и мозг повредить не может.

Кавитационная теория строится на предположении, что вследствие ротационного движения мозга или смещения по инерции его массы на противоположной стороне образуется вакуум. Отрицательное давление, действующее в течение $1/700 - 1/1000$ с, вызывает в первую очередь в текущей жидкости (крови) появление пузырьков газа (кавитацию). Перемещаясь с потоком крови в область более высокого давления, кавитационный пузырек «схлопывается», вызывая при этом гидродинамическую ударную волну, которая и разрушает стенку сосуда в той или иной степени. Кавитационная теория хорошо объясняет развитие во времени очагов поражения в области противоудара, отсутствие в них (в первые часы и сутки) крови и травматически поврежденных клеток. Однако ясного представления, насколько кавитационные эффекты действительно имеют место в крови артерий мозга и каков масштаб этих эффектов, нет. За пределами теории также тот факт, что локализация отрицательных давлений (положительных напряжений) происходит, в основном, в лобной и височной областях. При затылочных травмах противоударные очаги развиваются существенно сильнее, чем при лобовых.

На коротких временах (порядка 10^{-3} с) существенную роль играют ударно-волновые и акустические эффекты. Имеет смысл предположить, что именно сложная волновая картина, обусловленная как геометрическими особенностями анатомии черепа, так и различиями в упругих свойствах пластинчатых и губчатых костей черепа, определяет пространственное распределение областей положительных напряжений.

Для решения этих задач предложена модель черепно-мозгового отдела в *сагиттальной* (вертикальной) и *трансверсальной* (горизонтальной) проекциях. Расчетная область (Рис. 2) в обоих слу-

чаях представляет собой деформируемое тело, составленное из двух однородных изотропных материалов – *кости* и *мозгового вещества*. Граница с условием полного слипания рассчитывается сквозным образом.

3.3. Сжатие сердечной мышцы

Кровь может выполнять свои разнообразные функции только в постоянном движении. Это движение крови обеспечивается сердцем. Сердце можно рассматривать как два полых мышечных органа – «левое» сердце и «правое» сердце, каждое из которых состоит из предсердия и желудочка (Рис.3). Нагнетательная функция сердца основана на чередовании расслабления (*диастолы*) и сокращения (*систола*) желудочков.

Во время диастолы желудочки заполняются кровью, а во время систолы они выбрасывают ее в крупные артерии (аорту и легочный ствол). У выхода из желудочков расположены клапаны, препятствующие обратному поступлению крови из артерий в сердце. Перед тем как заполнить желудочки, кровь притекает по крупным венам (полым и легочным) в предсердия. Систола предсердий предшествует систоле желудочков; таким образом, предсердия служат как бы вспомогательными насосами, способствующими заполнению желудочков.

Моделирование поведения сердца осуществлялось на основе композиции двух сред (мышца миокарда и кровь), обладающих свойствами изотропности, линейной упругости, однородности ткани. Для математического моделирования процесса сжатия мышцы использовалось приближение малых упругих деформаций.

Решалась смешанная задача. На границе сердечной мышцы задавались скорости перемещения. Приближенно закон движения границ можно считать синусоидальным, однако он может быть точно определен из опыта и наблюдениями над активным сердцем. На отрезках, где должна вытесняться кровь, были поставлены условия свободной границы.

4. Результаты расчетов

4.1. Моделирование офтальмологической операции по удалению катаракты

В первой задаче (лазерная офтальмологическая операция по удалению катаракты) исследуется воздействие хирургического лазера на хрусталик глаза. Параметры материалов глаза:

склера: $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$, $\nu = 0.33$, $\rho = 1\text{г/см}^3$;

хрусталик: $E = 1.4 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$, $\nu = 0.2$, $\rho = 1\text{г/см}^3$;

стекловидное тело: $E = 10^{11} \text{ дин/см}^2$, $\nu = 0.45$, $\rho = 1\text{г/см}^3$;

роговица: $E = 10^{11} \text{ дин/см}^2$, $\nu = 0.33$, $\rho = 1\text{г/см}^3$.

Лазер моделируется уравнениями динамики деформируемой среды для источника тепла $Q(t)$:

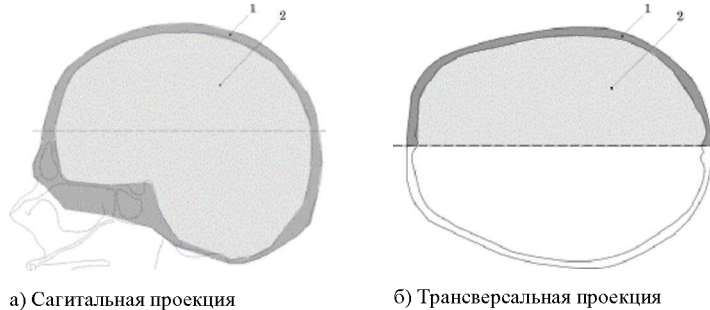


Рис. 2. Структура расчетных областей с выделенными материалами (по данным [5]): 1- кость, 2 – мозговое вещество

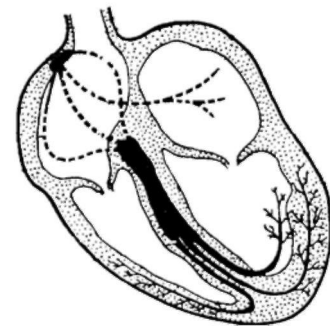


Рис. 3. Базовый рисунок, использованный для построения модели

$$Q(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{V \cdot T_1}, T_0 n < t < (T_0 + T_1)n \\ \frac{\varepsilon}{V \cdot T_1} \cdot \frac{P_0}{P_1}, (T_0 + T_1)n < t < T_0(n+1), \end{cases}$$

где $\varepsilon = 10^6$ эрг., $T_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ с, $T_0 = 15 \cdot 10^{-6}$ с, $P_0/P_1 = 10^{-2}$, $\alpha = 5,2 \cdot 10^5 \text{K}^{-1}$, $V = 10^{-3} \text{см}^3$ (ε – энергия импульса, T_1 – длительность импульса, T_0 – период импульса, α – коэффициент теплового расширения, V – объем, в котором действует излучение в начальный момент времени, n – количество импульсов, P_0/P_1 – характеризует уровень шума).

На рисунках 4-6 приведены поля скоростей в материалах глаза. Видно, что в течение некоторого времени векторы скоростей направлены из глаза (Рис. 4,5), затем внутрь глаза (Рис. 6) после взаимодействия с его границами. На Рис. 7 приведены зоны возможных разрушений глаза (с отрицательными значениями давления).

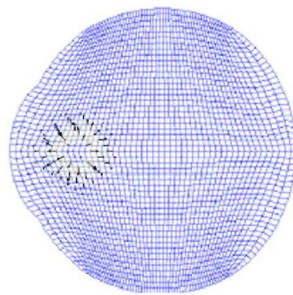


Рис. 4. Поле скоростей, $t=5 \cdot 10^{-4}$ с

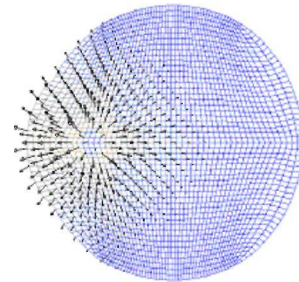


Рис. 5. Поле скоростей, $t=1.9 \cdot 10^{-6}$ с

4.2. Моделирование деформации сердечной мышцы

В расчетах о деформации сердечной мышцы задавались изменения внешних деформаций во времени, упругие константы полагались равными: $E = 1,04 \cdot 10^9$ Па (модуль Юнга), $\gamma = 0,41$ – коэффициент Пуассона, $\rho_0 = 10^3 \text{кг/м}^3$ (плотность).

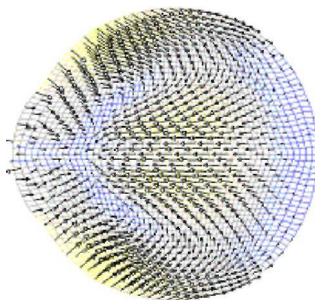


Рис.6. поле скоростей, $t=6 \cdot 10^{-4}$ с



Рис. 7. Зоны возможных повреждений

На границах области интегрирования задавался вектор скорости, в местах выхода крови – нормальные условия. Построенная в начальный момент времени квазиортогональная расчетная сетка изображена на Рис. 8. Поля скоростей в разные моменты времени (при сжатии сердечной мышцы): $t_1 = 2,53 \cdot 10^{-5}$ с, $t_2 = 5,07 \cdot 10^{-5}$ с, $t_3 = 5,3 \cdot 10^{-3}$ с приведены на Рис. 9-11. Хорошо виден динамический процесс выталкивания крови из желудочков.

4.3. Моделирование последствий черепно-мозговых травм

В задаче о последствиях черепно-мозговых травм исследовались поля скоростей, деформаций и напряжений при получении ударной травмы в затылочной области. Модули Юнга материалов кости и мозга имеют значения: $6,5 \cdot 10^9 \text{н/м}^2$; $6,67 \cdot 10^5 \text{н/м}^2$; коэффициенты Пуассона - 0,22; 0,44; плотности - $1,51 \text{кг/м}^3$, $1,02 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$, соответственно. На Рис. 12, 14 изображены расчетные сетки для численного решения рассматриваемой задачи в двух проекциях: вертикальной и горизонтальной. Соответственно, ход волновых процессов изображен на Рис. 13, 15. Видно, что возмущения распространяются значительно быстрее в костной ткани, что может привести к появлению областей поражения в местах, не прилегающих к зоне удара.



Рис.8

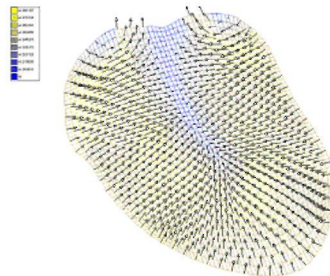


Рис.9

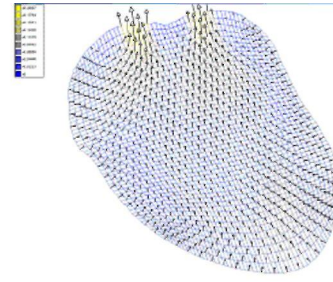


Рис.10

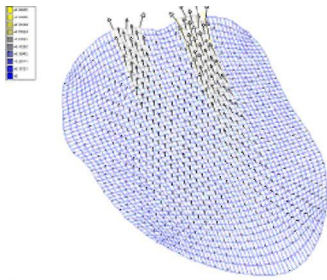


Рис.11

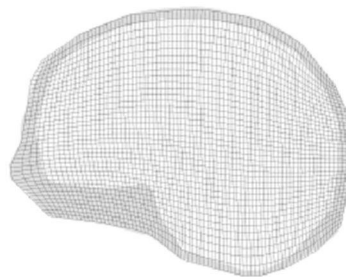


Рис.12



Рис.13

В заключение автор благодарит действительного члена РАН О.М. Белоцерковского, чл.- корреспондента РАН А.С. Холодова, д.ф.-м.н. В.И. Кондаурова за внимание к данной работе.

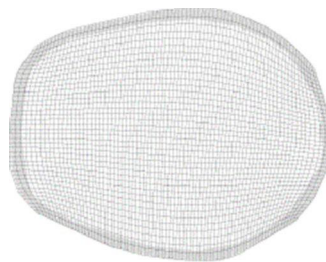


Рис.14



Рис.15

Литература

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988.
2. Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом. Ж. Выч. матем. и матем. физ. 1984. – Т. 24. – №5. – С. 722-739.
3. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988.
4. Г. Тевс, Р. Шмидс. Физиология человека. М.: Мир, 1996. – Т. 1,2,3.
5. Петровский Б.В. Краткая медицинская энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1989. – Т. 1,2,3.
6. Громов А.П. Биомеханика травмы. М.: Наука, 1979.
7. Лебедев В.В., Крылов В.В. Замечания к патогенезу ушибов мозга, возникающих по противоударному механизму, в остром периоде их развития. Нейрохирургия, 1998. – С. 22-25.
8. Петров И.Б., Холодов А.С. О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа. Ж. Выч. мат. и матем. физ. 1984. – Т. 24. – №8. – С. 1172 – 1188.
9. Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С. Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела. Ж. Выч. мат. и матем. физ. 1990 – Т. 30. – №8. – С. 1237 – 1244.
10. Иваненко С.А. Расчет течений в водоемах на криволинейных сетках. ВЦ АН СССР. М., 1991, препринт.
11. Бубнов А.В., Коротин П.Н., Холодова О.А. Математическое моделирование ультразвуковых колебаний фактоэммульсификатора в среде хрусталика. Информатика и медицина: Сб. ст. – М.: Наука, 1997, – С. 144 – 155.
12. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физико-математическая литература, 1994.
13. Титомир Л.И., Кнепко П. Математическое моделирование биоэлектрического генератора сердца. – М.: Наука. Физматлит. 1999. 447 с.

14. Arts T., Hunter W.C., Douglas A., Muijtiens A.M., Reneman R.S. Discription of the deformation of the left ventricle by a binematic model. 1992. *J. Biomech.* 25(10), p. 1119-1127.
15. Panda S.C., Natarajan R. Finite – element method of stress analis in the human left ventricular layered wall structure. *Med. Biol. Eng. Comp.* 15. p. 67-71.
16. Huyghe J.M., Arts T., van Campen D.H., Reneman R.S. Porous medim finite element model of the diastolic left ventricle. *J. Biomech.* 24(7), p. 527-538.
17. Регирер С.А., Лекции по биологической механике ч. I. Москва, изд. МГУ, 1980 г. 144 с.
18. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Конечные деформации вязкоупругих мышечных тканей // ПИММ. 1987. т. 51. вып. 3. с. 443-452.
19. Петров И.Б. Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины. *Изв. РАН. МТТ.* №4. 1986. с. 118-124.
20. Петров И.Б. Численное исследование волновых процессов в слоистой преграде при соударении с жёстким телом вращения. *Изв. РАН. МТТ.* №4. 1985. с. 125-129.
21. Коротин П.Н., Петров И.Б., Пирогов В.Б., Холодов А.С. О численном решении связанных задач сверхзвукового обтекания деформируемых оболочек конечной толщины. *Жур. выч. мат. и мат. физ.* т. 27. №8. 1987 с. 1233-1243.
22. Петров И.Б., Тормасов А.Г. О численном исследовании трёхмерных задач обтекания волнами сжатия препятствия или полости в упругопластическом полупространстве. *ДАН СССР.* т. 314. №4. 1990. с. 817-820.
23. Коротин П.Н., Петров И.Б., Холодов А.С. Численное моделирование поведения упругих и упругопластических тел под воздействием мощных энергетических потоков. *Матем. мод. т. 1.* №7. 1989. с. 1-12.
24. Иванов В.Д., Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С., Пашутин Р.А. Сеточно-характеристический метод расчета динамического деформирования на нерегулярных сетках. *Матем. мод. т. 11.* №7. 1999. с. 119-125.
25. Лобанов А.И., Петров И.Б. Численное решение совместной задачи о воздействии сжатой плазмы на электроды рельсотрона. *Матем. мод. т. 5.* №10. 1993. с. 48-56.
26. Иванов В.Д., Петров И.Б., Суворова Ю.В. Расчет волновых процессов в наследственных вязкоупругих средах. *Механика композитных материалов.* №3. 1990. с. 447-450.
27. Иванов В.Д., Петров И.Б. Моделирование деформаций и разрушений в мишенях под действием лазерного излучения. *Труды ИОФ РАН.* Т. 36. 1992. с. 247-266.
28. Жуков Д.С., Петров И.Б., Тормасов А.Г. Численное и экспериментальное изучение разрушения твердых тел в жидкости. В кн. *Информатика и медицина. Серия «Кибернетика» РАН.* – М.: Наука. 1997. 156-167.
29. Петров И.Б., Бубнов А.В., Калачевский Н.Н., Коротин П.Н. Численное моделирование последствий воздействия лазера при офтальмологических операциях на элементы глаза. VII съезд офтальмологов России. Тезисы докладов ч.2. Москва. Министерство здравоохранения РФ, Общество офтальмологов России. 2002 г. с. 349-350.

Петров Игорь Борисович. Родился в 1953 г. Окончил Московский физико-технический институт в 1976 году. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики Московского физико-технического института. Специалист в области прикладной математики, численного моделирования и компьютерных методов обучения. Автор более 100 научных работ. За научную деятельность награжден правительственной наградой – медалью ордена «За заслуги перед отечеством». Член экспертного совета Российского фонда фундаментальных исследований, пяти специализированных советов, в том числе трех докторских, ученого совета Московского физико-технического института. Является действительным членом Нью-Йоркской Академии наук и Российской Академии Естественных наук.